УДК 517.956

К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией в общем случае

Б. М. Шоймкулов
Таджикский национальный университет
Таджикистан, 734025, г. Душанбе, ул. Рудаки, 17
boitura@mail.ru; +992 919-43-11-84

Р. М. С. Лукмон
Таджикский национальный университет
Таджикистан, 734025, г. Душанбе, ул. Рудаки, 17
mslrostayee@gmail.com; +992 555-54-38-38

Исследована переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией в общем случае. Найдено условие совместности для переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией в общем случае. При выполнении условии совместности найдены интегральные представления многообразия решений в явном виде через три произвольных постоянных, когда сингулярная линия находится в границы области, для которой можно поставить задачи с начальными данными (задачи типа Коши).

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения; системы дифференциальных уравнений; частные производные; переопределенные; сингулярные; линия.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2021-2-10-15

В дальнейшем обозначим через D треугольную область, ограниченную отрезками
$\Gamma_1 = \{0 < x < a_0, y = 0\}, \Gamma_2 = \{0 < x < a_0, y = x\}$,
$\Gamma_3 = \{x = a_0, 0 < y < a_0\}$.

В области D рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{a_1(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \\ + \dfrac{c_1(x,y)}{(x-y)^2}v + \dfrac{f_1(x,y)}{(x-y)^2}, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = \frac{a_2(x,y)}{x-y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{b_2(x,y)}{x-y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{c_2(x,y)}{(x-y)^2}v + \frac{f_2(x,y)}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{a_3(x,y)}{x-y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{b_3(x,y)}{x-y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{c_3(x,y)}{(x-y)^2}v + \frac{f_3(x,y)}{(x-y)^2}, \quad (1)$$

где $a_j(x,y), b_j(x,y), c_j(x,y), f_j(x,y) (1 \le j \le 3)$ – заданные функции класса $C^1(D) \cap C(\overline{D})$, $v(x,y) \in C^2(D)$ – искомая функция.

Пусть в системе (1) коэффициенты $a_j(x,y), b_j(x,y), c_j(x,y)$ *и правые части* $f_j(x,y) (1 \le j \le 3)$ *удовлетворяют условиям совместности:*

$$\begin{aligned} &a_3(x,y), b_3(x,y), c_3(x,y), f_3(x,y) \in C_x^1(\overline{D}), \\ &a_2(x,y), b_2(x,y), c_2(x,y), f_2(x,y) \in C^1(\overline{D}), \\ &a_1(x,y), b_1(x,y), c_1(x,y), f_1(x,y) \in C_y^1(\overline{D}), \end{aligned} \quad (2)$$

© Шоймкулов Б. М., Лукмон Р. М. С., 2021

$$(x-y)^2\frac{\partial}{\partial x}[\frac{a_2(x,y)}{x-y}]+a_2(x,y)b_2(x,y)+c_2(x,y)=(x-y)^2\frac{\partial}{\partial y}[\frac{a_1(x,y)}{x-y}]+a_3(x,y)b_1(x,y), \tag{3}$$

$$(x-y)^2\frac{\partial}{\partial x}[\frac{b_2(x,y)}{x-y}]+a_2(x,y)\cdot b_1(x,y)+b_2(x,y)b_2(x,y)==(x-y)^2\frac{\partial}{\partial y}[\frac{b_1(x,y)}{x-y}]+a_1(x,y)\cdot b_2(x,y)+b_1(x,y)b_3(x,y)+c_1(x,y), \tag{4}$$

$$(x-y)^3\frac{\partial}{\partial x}[\frac{c_2(x,y)}{(x-y)^2}]+a_2(x,y)\cdot c_1(x,y)+b_2(x,y)c_2(x,y)=(x-y)^3\cdot\frac{\partial}{\partial y}[\frac{c_1(x,y)}{(x-y)^2}]+a_1(x,y)c_2(x,y)+b_1(x,y)c_3(x,y), \tag{5}$$

$$(x-y)^3\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,y)}{(x-y)^2}]+a_2(x,y)\cdot f_1(x,y)+b_2(x,y)f_2(x,y)==(x-y)^3\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_1(x,y)}{(x-y)^2}]+a_1(x,y)\cdot f_2(x,y)+b_1(x,y)f_3(x,y), \tag{6}$$

$$(x-y)^2\frac{\partial}{\partial x}[\frac{a_3(x,y)}{x-y}]+a_1(x,y)\cdot a_3(x,y)+a_2(x,y)b_3(x,y)+c_3(x,y)==(x-y)^2\frac{\partial}{\partial y}[\frac{a_2(x,y)}{x-y}]+a_2(x,y)\cdot a_2(x,y)+a_3(x,y)b_2(x,y), \tag{7}$$

$$(x-y)^2\frac{\partial}{\partial x}[\frac{b_3(x,y)}{x-y}]+a_3(x,y)\cdot b_1(x,y)=(x-y)^2\frac{\partial}{\partial y}[\frac{b_2(x,y)}{x-y}]+a_2(x,y)b_2(x,y)+c_2(x,y), \tag{8}$$

$$(x-y)^3\frac{\partial}{\partial x}[\frac{c_3(x,y)}{(x-y)^2}]+a_3(x,y)\cdot c_1(x,y)+b_3(x,y)c_2(x,y)==(x-y)^3\frac{\partial}{\partial y}[\frac{c_2(x,y)}{(x-y)^2}]+a_2(x,y)\cdot c_2(x,y)+b_2(x,y)c_3(x,y), \tag{9}$$

$$(x-y)^3\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y)}{(x-y)^2}]+a_3(x,y)\cdot f_1(x,y)+b_3(x,y)f_2(x,y)==(x-y)^3\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_1(x,y)}{(x-y)^2}]+a_2(x,y)\cdot f_2(x,y)+b_2(x,y)f_3(x,y). \tag{10}$$

Тогда, вводя новую функцию

$$v(x,y)=(x-y)^{-1}u$$

и используя равенства

$$g_1(x,y)=b_1(x,y),\ g_2(x,y)=b_2(x,y)+(x-y)^{\beta-1},$$
$$g_3(x,y)=b_3(x,y)-2(x-y)^{\gamma-1},$$

из системы (1), получим систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{g_1(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{f_1(x,y)}{x-y},\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{g_2(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{f_2(x,y)}{x-y},\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{g_3(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{f_3(x,y)}{x-y}.\end{cases} \tag{11}$$

Для системы (11) условиями совместности являются:

$$(x-y)^2\frac{\partial}{\partial x}[\frac{g_2(x,y)}{x-y}]+g_2(x,y)\cdot g_2(x,y)=(x-y)^2\frac{\partial}{\partial y}[\frac{g_1(x,y)}{x-y}]+g_3(x,y)g_1(x,y), \tag{12}$$

$$(x-y)^2\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,y)}{x-y}]+g_2(x,y)\cdot f_2(x,y)=(x-y)^2\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_1(x,y)}{x-y}]+g_1(x,y)f_3(x,y), \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{g_3(x,y)}{x-y}]=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{g_2(x,y)}{x-y}], \tag{14}$$

$$(x-y)^2\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y)}{x-y}]+g_3(x,y)\cdot f_2(x,y)=(x-y)^2\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_2(x,y)}{x-y}]+g_2(x,y)f_3(x,y). \tag{15}$$

Вводя новую функцию $\frac{\partial u}{\partial y}=W$ из двух последних уравнений системы (11) получим переопределенную систему в частных производных первого порядка с одной сингулярной линией

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial x}=\frac{g_2(x,y)}{x-y}W+\frac{f_2(x,y)}{x-y}, \\ \frac{\partial W}{\partial y}=\frac{g_3(x,y)}{x-y}W+\frac{f_3(x,y)}{x-y}. \end{cases} \quad (16)$$

Сначала находим решение второго уравнения системы (16). В этом случае однородное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{g_3(x,y)}{x-y}W.$$

Эту уравнение запишем в виде

$$\frac{\partial \ln W}{\partial y}=\frac{g_3(x,y)}{x-y}.$$

Интегрируя от 0 до y, будем иметь

$$W(x,y)=(x-y)^{-g_3(0,0)}\exp[\omega_3(x,y)]\psi_1(x), \quad (17)$$

где

$$\omega_3(x,y)=\int_0^y \frac{g_3(x,\tau)-g_3(0,0)}{x-\tau}d\tau, \psi_1(x)-$$

произвольная непрерывно-дифференцируемая функция переменной x.

Подставляя значение $W(x,y)$ во второе уравнение и считая, что функция $\psi_1(x)$ зависит от переменной y, для нахождение $\psi_1(x)-$ будем иметь

$$\frac{d\psi_1(x)}{dy}=\frac{f_3(x,y)\exp[-\omega_3(x,y)]}{(x-y)^{1-g_3(0,0)}}.$$

Интегрируя, находим

$$\psi_1(x)=\int_0^y \frac{f_3(x,\tau)\exp[-\omega_3(x,\tau)]}{(x-\tau)^{1-g_3(0,0)}}d\tau+\psi_2(x). \quad (18)$$

После, подставляя значение $\psi_1(x)$ из (18) в (17), находим общее решение второго уравнения системы (16) в виде

$$\begin{aligned} W(x,y)=\frac{\exp[\omega_3(x,y)]}{(x-y)^{g_3(0,0)}}[\psi_2(x)+ \\ +\int_0^y \frac{f_3(x,\tau)\exp[-\omega_3(x,\tau)]}{(x-\tau)^{1-g_3(0,0)}}d\tau]. \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть $g_3(0,0)<0$ и функция $g_3(x,y)$ удовлетворяет условию типа Гельдера:

$$\begin{aligned} |g_3(x,y)-g_3(0,0)|\le H_1(x-y)^{\gamma_1}, \\ H_1=const>0, \gamma_1>0, \end{aligned} \quad (20)$$

и функция $f_3(x,y)$ обращается в нуль с асимптотической формулой

$$f_3(x,y)=o[(x-y)^{\gamma_2}], \gamma_2>-g_3(0,0). \quad (21)$$

Теперь от функции $W(x,y)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла первому уравнению системы (16), отсюда находим условие совместности вида

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y)\exp(-\omega_3(x,y))}{(x-y)^{1-g_3(0,0)}}]= \\ &=\frac{\partial}{\partial y}\{(\frac{g_2(x,y)}{x-y}-\frac{\partial\omega_3(x,y)}{\partial x}+ \\ &+\frac{g_3(0,0)}{x-y})(\psi_2(x)+ \\ &+\int_0^y \frac{f_3(x,\tau)\exp(-\omega_3(x,\tau))}{(x-\tau)^{1-g_3(0,0)}}d\tau)+ \\ &+\frac{f_2(x,y)\exp(-\omega_3(x,y))}{(x-y)^{1-g_3(0,0)}}\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Используя условие (22) из первого уравнения системы (16), получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с одной сингулярной линией вида

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_2(x)}{dx}=\frac{g_2(x,0)+g_3(0,0)}{x}\cdot \\ \cdot\psi_2(x)+\frac{f_2(x,0)}{x^{1-g_3(0,0)}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Общее решение уравнения (23) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_2(x)=x^{g_2(0,0)+g_2(0,0)}\exp(\omega_2(x,0)[c_1+ \\ +\int_0^x \frac{f_2(t,0)\exp(-\omega_2(t,0))}{t^{1+g_2(0,0)}}dt], \end{aligned} \quad (24)$$

где $\omega_2(x,0)=\int_0^x \frac{g_2(t,0)-g_2(0,0)}{t}dt$, c_1 – произвольная постоянная.

Пусть функция $g_2(x,0)$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} |g_2(x,0)-g_2(0,0)|\le H_2(x^{\gamma_3}), \\ H_2=const>0, \gamma_3>0, \end{aligned} \quad (25)$$

и функция $f_2(x,0)$ в окрестности точек $x=0$ обращается в нуль, и ее поведение определяется следующей асимптотической формулой:

$$f_2(x,0)=o[x^{\gamma_4}],\gamma_4>g_2(0,0) \tag{26}$$

и $g_2(0,0)+g_3(0,0)>0$.

Тогда, подставляя (24) в (19) и учитывая

$$u(x,y)=\int_0^y W(x,\tau)d\tau+\psi_3(x), \tag{27}$$

из первого уравнения системы (11) получим условие

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[W(x,y)]=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{g_1(x,y)}{x-y}W(x,y)+\frac{f_1(x,y)}{x-y}]. \tag{28}$$

Используя условие (28) для нахождения произвольной функции $\psi_3(x)$, получим уравнение вида

$$\frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2}=\frac{g_1(x,o)\exp(\omega_2(x,0))}{x^{1-g_2(0,0)}}[c_1+ \\ +\int_0^x\frac{f_2(t,0)\exp(-\omega_2(t,0))}{t^{1+g_2(0,0)}}dt]+\frac{f_1(x,o)}{x}. \tag{29}$$

Дважды интегрируя (29) по переменной x, произвольную функцию $\psi_3(x)$ находим в виде

$$\psi_3(x)=c_1\int_0^x\frac{(x-t)(g_1(t,o)\exp(\omega_2(t,0))-g_1(0,0))}{t^{1-g_2(0,0)}}dt+ \\ +\int_0^x\frac{(x-t)^2 f_2(t,0)\exp(-\omega_2(t,0))}{2t^{1+g_2(0,0)}}dt+ \\ +\int_0^x\frac{(x-t)(f_1(t,0)-f_1(0,0))}{t}dt+ \\ +\frac{c_1g_1(0,0)x^{1+g_2(0,0)}}{g_2(0,0)(g_2(0,0)+1)}+ \\ +f_1(0,0)[x\ln x-x]+c_2x+c_3. \tag{30}$$

Пусть функции $g_1(x,0)$ и $f_1(x,0)$ удовлетворяют условию типа Гельдера:

$$|g_1(x,y)\exp(\omega_2(x,0))-g_1(0,0)|\le H_3(x^{\gamma_5}), \\ H_3=const>0,\gamma_5>0, \tag{31}$$

$$|f_1(x,0)-f_1(0,0)|\le H_4(x^{\gamma_6}), \\ H_4=const>0,\gamma_6>0. \tag{32}$$

Тогда, подставляя функцию $\psi_3(x)$ из (30) в (27) и учитывая (19), будем иметь

$$u(x,y)=\int_0^y\frac{f_3(x,\tau_1)\exp(-\omega_3(x,\tau_1))}{(x-\tau_1)^{1-g_3(0,0)}}\cdot \\ \cdot W_1(x,\tau_1)d\tau_1+ \\ +c_1[\int_0^y\frac{(x-\tau)^{-g_3(0,0)}\exp(\omega_3(x,\tau))}{x^{g_2(0,0)-g_3(0,0)}\exp(-\omega_2(x,0))}d\tau+ \\ +\int_0^x\frac{(x-t)(g_1(t,0)\exp(\omega_2(t,0))-g_1(0,0))}{t^{1-g_2(0,0)}}dt]+ \\ +\int_0^x K_1(x,y,t)f_2(t,0)dt+ \\ +\int_0^x\frac{(x-t)(f_1(t,0)-f_1(0,0))}{t}dt+ \\ +\frac{c_1g_1(0,0)x^{1+g_2(0,0)}}{g_2(0,0)(g_2(0,0)+1)}+ \\ +f_1(0,0)[x\ln x-x]+c_2x+c_3, \tag{33}$$

где $$W_1(x,\tau_1)=\int_{\tau_1}^y(x-s)^{-g_3(0,0)}e^{\omega_3(x,s)}ds,$$

$$K_1(x,y,t)=[\frac{x^{g_2(0,0)+g_3(0,0)}}{t^{1+g_2(0,0)}}\int_0^y(x-\tau)^{-g_3(0,0)}\cdot \\ \cdot\exp(\omega_3(x,\tau))d\tau+\frac{(x-t)^2g_1(x,0)}{2}]\cdot \\ \cdot\exp(\omega_2(x,0)-\omega_2(t,0)),$$

а c_1,c_2,c_3 – произвольные постоянные.

Теорема 1. *Пусть в системе (11), функции* $g_j(x,y),f_j(x,y)(1\le j\le 3)$ *– удовлетворяют условиям (12), (13), (14), (15), (20), (21), (22), (25), (26), (28), (31), (32) и* $g_3(0,0)<0,\ g_2(0,0)+g_3(0,0)>0$ *в области* D. *Тогда любое решение системы (11) из класса* $C^2(D)$ *представимо в виде (33).*

Замечание 1. Решение вида (33) в окрестности сингулярной линии $y=x$, при выполнении всех условий теоремы 1 непрерывно.

Теорема 2. *Пусть в системе (1) коэффициенты* $a_j(x,y),b_j(x,y),c_j(x,y)$ *и правые части* $f_j(x,y)(1\le j\le 3)$ *удовлетворяют условиям (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10) и выполнены все условии теоремы 1. Тогда любое решение системы (1) из класса* $C^2(D)$ *представимо в виде*

$$v(x,y)=(x-y)^{-1}u(x,y), \tag{34}$$

где функция $u(x,y)$ *имеет вид (33).*

Замечание 2. Решение вида (34) в окрестности сингулярной линии $y = x$ при выполнении всех условий теоремы 2 неограниченно.

Список литературы

1. *Wilczynski E.J.* Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces. Leipzig: B.G. Teubner, 1906. 324 p.
2. *Appel P.* Fonctons hypergeometriges of hyperspheriges Polynomes d'Hermite / P. Appel, M.J. Kampe de Feriet. Paris: Gauthier-Villars. 1926. 434 p.
3. *Архутик Г.М.* Регулярная особая точка линейных уравнений в полных дифференциалах высших порядков // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1979. №3. С. 46–54.
4. *Михайлов Л.Г.* Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. Душанбе: Дониш, 1986. 116 с.
5. *Begehr H.* Transformations, transmutations and kernel functions / H. Begehr, R.P. Gilbert. Vol. 2. Harlow: Longman, 1993. 268 p.
6. *Раджабов Н.* Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями // Душанбе, изд-во ТГУ, ч. I, 1980. 126 с.; ч. II, 1981. 170 с.; ч. III. 1982. 170 с.
7. *Зайцев М.Л., Аккерман В.Б.* Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики // Вестник ВГУ. Серия: физика. Математика. 2015. №. 2. 527.
8. *Курант, Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
9. *Пиров Р.* Исследование некоторых нелинейных систем уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией на плоскости // Крайові задачі для диференціалних рівнянь. Чернівці: Прут, 2006. Вып. 14. С. 313–320.
10. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
11. *Бровко Г.Л.* Необходимые и достаточные условия однородно-простой деформации // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. С. 701–710.
12. *Ленская С.Э.* О неоднородно-простых процессах // Вестник Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. 1988. № 1. С. 100–103.
13. *Пиров Р.* Об одной переопределенной системе уравнений в частных производных второго порядка. Душанбе, 1989. 15 с. Деп. в Тадж. НИИНТИ 19.06.89. № 22(622).
14. *Шоймкулов Б.М., Рузметов Э.* К теории некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками на плоскости // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения (сборник научных статей), ТГПУ. Душанбе. 1998. Вып. 6. С. 96–106.
15. *Шоймкулов Б.М., Раджабов Н.* Линейная переопределенная система второго порядка с одной сингулярной точкой // Вестник Национального Университета (серия естественных наук). Душанбе, ТГНУ: "Сино". 2005. № 3(26). С. 3–10.
16. *Шоймкулов Б.М., Раджабов Н., Комилов А.О.* Интегральные представления многообразия решений для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с тремя сверхсингулярными областями // Вестник Таджикского национального университета, № 1/2, (научный журнал), серия естественных наук, Душанбе. 2017. С. 3–7.
17. *Шоймкулов Б.М.* К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией и двумя сверхсингулярными линиями // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. Душанбе. 2018. № 3. С. 32–43.
18. *Шоймкулов Б.М.* Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сверхсингулярной и одной сингулярной плоскостью в трехмерном пространстве // Электронный инновационный вестник: междунар. периодич. журн. науч. тр. Бугульма. 2019. № 6. С. 4–12.
19. *Шоймкулов Б.М.* Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и двумя сверхсингулярными точками // Материалы междунар. науч. конф. "Современные проблемы естественных и гуманитарных наук и их роль в укреплении научных связей между странами", посвященной 10-летию Филиала МГУ им. М.В. Ломоно-

сова в г. Душанбе (10–11 октября). Душанбе. 2019. С. 79–82.
20. *Шоймкулов Б.М.* Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и одной сверхсингулярной точкой // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. № 3(50). С. 17–23.

Of one over determined system differential equations at private derivative second order with one singular lines in general case

B. M. Shoimkulov
Tajik State University; 17, Rudaki st., Dushanbe, 734025, Tajikistan
boitura@mail.ru; +992 919-43-11-84

P. M. C. Лукмон
Tajik State University; 17, Rudaki st., Dushanbe, 734025, Tajikistan
mslrostayee@gmail.com; +992 555-54-38-38

In this paper, an over determined system of second-order partial differential equations with a single singular line in the General case is investigated. A compatibility condition is found for over determined systems of second-order partial differential equations with a single singular line in the General case. If the compatibility condition is met, integral representations of the variety of solutions are found explicitly in terms of three arbitrary constants, when the singular line is in the boundaries of the domain for which initial data problems (Cauchy-type Problems) can be set.

Keyword: *system differential equations; at private derivative; over determined; singular; line.*