ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2021 Математика. Механика. Информатика Вып. 2 (53)

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией

Б. М. Шоймкулов
Таджикский национальный университет
Таджикистан, 734025, г. Душанбе, ул. Рудаки, 17
boitura@mail.ru; +992 919-43-11-84

Исследована переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией. Найдено условие совместности для переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией. При выполнении условий совместности найдены интегральные представления многообразия решений в явном виде через три произвольных постоянных, для которой можно поставить задачи с начальными данными (Задачи типа Коши).

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения; системы дифференциальных уравнений; частные производные; переопределенные; сингулярные; линия.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2021-2-5-9

Через D обозначим треугольную область, ограниченную отрезками

$$\Gamma_1 = \{0 < x < a_0, y = 0\},$$
$$\Gamma_2 = \{0 < x < a_0, y = x\}, \Gamma_3 = \{x = a_0, 0 < y < a_0\}.$$

В области D рассмотрим переопределенную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\dfrac{2}{x-y}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{1}{x-y}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \\ \quad -\dfrac{1}{(x-y)^2}v + \dfrac{f_1(x,y)}{(x-y)^2}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{x-y}\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{2}{x-y}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \\ \quad +\dfrac{1}{(x-y)^2}v + \dfrac{f_2(x,y)}{(x-y)^2}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{3}{x-y}\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{1}{(x-y)^2}v + \\ \quad + \dfrac{f_3(x,y)}{(x-y)^2}, \end{cases} \tag{1}$$

где $f_j(x,y)(1 \le j \le 3)$ – заданные функции класса $C^1(D) \cap C(\overline{D}), v(x,y) \in C^2(D)$ – неизвестная функция.

Систему (1) назовем переопределенной системой дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией с постоянными коэффициентами.

Пусть в системе (1) правые части $f_j(x,y)(1 \le j \le 3)$ удовлетворяют условиям совместности:

$$\begin{aligned} &f_3(x,y) \in C_x^1(\overline{D}), \\ &f_2(x,y) \in C^1(\overline{D}), \\ &f_1(x,y) \in C_y^1(\overline{D}), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{\partial f_3(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y}, \tag{3}$$

$$(x-y)\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}-2f_2(x,y)= \\ =(x-y)\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}+f_1(x,y)+f_3(x,y). \tag{4}$$

При выполнении условии (2), (3), (4), вводя новую функцию $v=v(x,y)=(x-y)^{-1}u$ из системы (1) получим систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{x-y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{f_1(x,y)}{x-y}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{x-y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{f_2(x,y)}{x-y}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{1}{x-y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{f_3(x,y)}{x-y}. \end{cases} \tag{5}$$

Если будем использовать функцию $W(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$, тогда из двух последних уравнений системы (5) имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x}=-\dfrac{1}{x-y}W+\dfrac{f_2(x,y)}{x-y}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial y}=\dfrac{1}{x-y}W+\dfrac{f_3(x,y)}{x-y}. \end{cases} \tag{6}$$

Для нахождения общего решения системы (6), предположим, что второе уравнение является основным. Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{1}{x-y}W. \tag{7}$$

Однородное уравнение (7) запишем в виде

$$\frac{\partial \ln W}{\partial y}=\frac{1}{x-y}.$$

После интегрирования получим

$$\ln W(x,y)=-\ln(x-y)+\psi_1(x),$$

где $\psi_1(x)$ – произвольно дифференцируемая функция.

Отсюда

$$W(x,y)=\frac{\psi_1(x)}{x-y}. \tag{8}$$

Предположим, что функция $\psi_1(x)$ зависит не только от переменной x, но и от переменной y, в этом случае, дифференцируя $W(x,y)$ по переменной y:

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}=\frac{\psi'_1(x)(x-y)+\psi_1(x)}{(x-y)^2},$$

а после подставляя во второе уравнение системы (6), имеем

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}=\frac{\psi'_1(x)(x-y)+\psi_1(x)}{(x-y)^2}= \\ =\frac{1}{x-y}\cdot\frac{\psi'_1(x)}{x-y}+\frac{f_3(x,y)}{x-y}.$$

Отсюда, для нахождения произвольной функции $\psi_1(x)$, получим дифференциальное уравнение $\psi'_1(x)=f_3(x,y)$.

Интегрируя, находим

$$\psi_1(x)=\int_0^y f_3(x,\tau)d\tau+\psi_2(x), \tag{9}$$

где $\psi_2(x)$ – произвольно дифференцируемая функция.

Значение $\psi_1(x)$ подставим в (8) и находим общее решение второго уравнения (6) в виде

$$W(x,y)=\frac{1}{x-y}(\psi_2(x)+\int_0^y f_3(x,\tau)d\tau). \tag{10}$$

Из функции $W(x,y)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла первому уравнению системы (6), т. е., дифференцируя

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}=-\frac{1}{(x-y)^2}(\psi_2(x)+\int_0^y f_3(x,\tau)d\tau)+ \\ +\frac{1}{x-y}(\frac{d\psi_2(x)}{dx}+\int_0^y\frac{\partial}{\partial x}(f_3(x,\tau))d\tau)$$

и подставляя в первое уравнение системы (6)

$$-\frac{1}{(x-y)^2}(\psi_2(x)+\int_0^y f_3(x,\tau)d\tau)+ \\ +\frac{1}{x-y}(\frac{d\psi_2(x)}{dx}+\int_0^y\frac{\partial}{\partial x}(f_3(x,\tau))d\tau)= \\ =-\frac{1}{x-y}\cdot\frac{1}{x-y}(\psi_2(x)+\int_0^y f_3(x,\tau)d\tau)+ \\ +\frac{f_2(x,y)}{x-y},$$

отсюда получим

$$\frac{d\psi_2(x)}{dx}=f_2(x,y)-\int_0^y\frac{\partial}{\partial x}(f_3(x,\tau))d\tau). \tag{11}$$

Дифференцируя по переменной y, получим условие совместности (3). Используя условие (3) для нахождения $\psi_2(x)$, имеем

$$\frac{d\psi_2(x)}{dx}=f_2(x,0). \tag{12}$$

Интегрируя равенство (12), получим

$$\psi_2(x) = \int_0^x f_2(t,0)dt + c_1, \tag{13}$$

где c_1 – произвольная постоянная.

Значение $\psi_2(x)$ подставим в (10), получим общее решение системы (6) в виде

$$W(x,y) = \frac{1}{x-y}\Big(c_1 + \int_0^x f_2(t,0)dt + \int_0^y f_3(x,\tau)d\tau\Big). \tag{14}$$

Отметим, что интегралы в правой части равенства (14) сходятся, так как функции $f_2(x,0),\ f_3(x,y)$ являются непрерывными функциями.

Теперь из общего решения системы (6), то есть из функции $W(x,y)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла первому уравнению системы (5). Для этого используем

$$W(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y},$$

в результате получим

$$u(x,y) = \int_0^y W(x,\tau)d\tau + \psi_3(x), \tag{15}$$

где $\psi_3(x)$ – произвольно дифференцируемая функция.

Равенство (15) дифференцируем дважды, будем иметь

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \int_0^y \frac{\partial^2}{\partial x^2}[W(x,\tau)]d\tau + \frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2}. \tag{16}$$

Дифференцируя по переменной y, получим условие совместности системы (5) в виде

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{W(x,y)+f_1(x,y)}{x-y}\Big] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[W(x,y)]. \tag{17}$$

Используя условие (17) из равенства (16) для нахождения $\psi_3(x)$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2} = \frac{c_1}{x^2} + \frac{1}{x}\int_0^x f_2(t,0)dt + \frac{f_1(x,0)}{x}. \tag{18}$$

Дважды интегрируя равенство (18), произвольную $\psi_3(x)$ находим в виде

$$\psi_3(x) = \int_0^x \frac{(x-t)f_1(t,0)}{t}dt + \frac{1}{2}\int_0^x \Big(1-\frac{t}{x}\Big)^2 f_2(t,0)dt - c_1\ln x + c_2 x + c_3, \tag{19}$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

Предположим, что функции $f_1(x,0),\ f_2(x,0)$, имеющие в окрестности точек $x=0$, удовлетворяют асимптотическим формулам:

$$f_1(x,0) = o(x^{\gamma_1}), \gamma_1 > 0, \tag{20}$$

$$f_2(x,0) = o(x^{\gamma_2}), \gamma_2 > 1. \tag{21}$$

Тогда интегралы равенства (19) сходятся.

Значение $\psi_3(x)$ из равенства (19) подставим в (15) и, учитывая (14), найдем общее решение системы (5) в явном виде

$$u(x,y) = \int_0^y \Big(\frac{y-\tau}{x-\tau}\Big) f_3(x,\tau)d\tau + \int_0^x \Big[\frac{1}{2}\Big(1-\frac{t}{x}\Big)^2 + \ln\frac{x}{x-y}\Big] f_2(t,0)dt + \int_0^x \frac{(x-t)f_1(t,0)}{t}dt - c_1\ln|x-y| + c_2 x + c_3, \tag{22}$$

где c_1, c_2, c_3 – *произвольные постоянные*.

Таким образом, доказано:

Теорема 1. *Пусть в системе (5) функции* $f_j(x,y)$ $(1 \le j \le 3)$ – *удовлетворяют условиям (2), (3), (4), (17), (20). Кроме того, функция* $f_3(x,y)$ *в окрестности точек линии* $y = x$, *удовлетворяет асимптотической формуле*

$$f_1(x,0) = o(x^{\gamma_1}), \gamma_1 > 0.$$

Тогда любое решение системы (5) из класса $C^2(D)$ *представимо в виде (22)*

Замечание 1. Решение вида (22) в окрестности точек линии $y = x$, при выполнении всех условий теоремы 1 имеет логарифмическую особенность.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда общее решение системы (1) из класса* $C^2(D)$ *представимо в виде*

$$v(x,y) = (x-y)^{-1}u(x,y), \tag{23}$$

где функция $u(x,y)$ *имеет вид (22).*

<u>Замечание 2</u>. Решение вида (23) в окрестности точек линии $y = x$ при выполнении всех условий теоремы 2 неограниченно.

Список литературы

1. *Wilczynski E.J.* Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces / E.J. Wilczynski. Leipzig:B.G. Teubner, 1906. 324 p.
2. *Appel P.* Fonctons hypergeometriges of hyperspheriges Polynomes d'Hermite / P. Appel, M.J. Kampe de Feriet. Paris: Gauthier-Villars. 1926. 434 p.
3. *Архутик Г.М.* Регулярная особая точка линейных уравнений в полных дифференциалах высших порядков // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1979. № 3. С. 46–54.
4. *Михайлов Л.Г.* Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. Душанбе: Дониш, 1986. 116 с.
5. *Begehr H.* Transformations, transmutations and kernel functions / H. Begehr, R.P. Gilbert. Vol. 2. Harlow: Longman, 1993. 268 p.
6. *Раджабов Н.* Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями // Душанбе, изд-во ТГУ, ч. I, 1980. 126 с.; ч. II, 1981. 170 с.; ч. III. 1982. 170 с.
7. *Зайцев М.Л., Аккерман В.Б.* Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики // Вестник ВГУ. Серия: физика. Математика. 2015. № 2. 527 с..
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
9. *Пиров Р.* Исследование некоторых нелинейных систем уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией на плоскости // Крайовi задачi для диференцiалних рiвнянь. Чернiвцi: Прут, 2006. Вып. 14. С. 313–320.
10. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
11. *Бровко Г.Л.* Необходимые и достаточные условия однородно-простой деформации // Прикл. матем. и механика. 1978. Т. 42. С. 701–710.
12. *Ленская С.Э.* О неоднородно-простых процессах // Вестник Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. 1988. № 1. С. 100–103.
13. *Пиров Р.* Об одной переопределенной системе уравнений в частных производных второго порядка. Душанбе, 1989. 15 с. Деп. в Тадж. НИИНТИ 19.06.89. № 22(622).
14. *Шоймкулов Б.М., Рузметов Э.* К теории некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками на плоскости // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения (сб. науч. статей), ТГПУ. Вып. 6. Душанбе. 1998. С. 96–106.
15. *Шоймкулов Б.М., Раджабов Н.* Линейная переопределенная система второго порядка с одной сингулярной точкой // Вестник Национального Университета (серия естественных наук). № 3(26). Душанбе, ТГНУ: "Сино". 2005. С. 3–10.
16. *Шоймкулов Б.М., Раджабов Н., Комилов А.О.* Интегральные представления многообразия решений для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с тремя сверхсингулярными областями // Вестник Таджикского национального университета, № 1/2, (науч. журн.), серия естественных наук, Душанбе. 2017. С. 3–7.
17. *Шоймкулов Б.М.* К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией и двумя сверхсингулярными линиями // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. № 3. Душанбе. 2018. С. 32–43.
18. *Шоймкулов Б.М.* Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сверхсингулярной и одной сингулярной плоскостью в трехмерном пространстве // Электронный инновационный вестник: междунар. период. журн. науч. тр. № 6. Бугульма. 2019. С. 4–12.
19. *Шоймкулов Б.М.* Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и двумя сверхсингулярными точками // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы естественных и гуманитарных наук и их роль в укреплении научных связей между странами", посвященной 10-летию Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе (10–11 октября). Душанбе. 2019. С. 79–82.

20. *Шоймкулов Б.М.* О некоторых переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и двумя сверх сингулярными точками // Электронный инновационный вестник: междунар. период. журн. науч. тр. № 1(12). Бугульма. 2020. С. 4–11.
21. Шоймкулов Б.М. К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной слабой сингулярной и двумя сверхсингулярными линиями // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. № 4 (51). С. 24–28.

Integral representation of solution manifolds for over determined systems with one singular line

B. M. Shoimkulov
Tajik State University; 17, Rudaki st., Dushanbe, 734025, Tajikistan
boitura@mail.ru; +992 919-43-11-84

In this paper, an over determined system of second-order partial differential equations with one singular line is investigated. A compatibility condition is found for over determined systems of second-order partial differential equations with one singular line. Under the condition of compatibility, introducing a new function, we come to a over determined system of partial differential equations of the second order with one singular line of a simpler form. The integral representation of the manifold of solutions of the redefined second-order partial differential system with one singular line is found explicitly through three arbitrary constants, for which initial data problems (Cauchy type problems) can be posed.

Keywords: *partial differential equations; systems of differential equations; partial derivatives; over determined; singular; line.*