Механика

УДК 531.381; 531.13

К проблеме редукции в динамике гиростата

Н. Н. Макеев
e-mail: nmakeyev@mail.ru; **SPIN-код (РИНЦ): 7373-7840, ORCID: 0000-0003-2807-977X**

Рассматривается движение относительно неподвижного полюса гиростата, происходящее в режиме авторегулирования по Р. Граммелю. На гиростат действует система заданных нестационарных сил, обусловленных внешним воздействием. Приводится описание процедуры редуцирования динамической системы гиростата, для которой необходимо существует первый интеграл, линейный по компонентам угловой скорости его носителя. Редуцирование реализуется в результате построения нелинейного интегродифференциального уравнения, определяющего зависимость одной из компонент вектора абсолютной угловой скорости носителя гиростата. Рассмотрены некоторые частные случаи редуцирования, связанные со структурно-динамическими особенностями гиростата и видами заданной аналитической зависимости компонент вектора гиростатического момента.

Ключевые слова: *гиростат; динамическая система; редуцирование системы уравнений; линейный интеграл динамической системы; режим авторегулирования движения*

Поступила в редакцию 21.11.2021, принята к опубликованию 27.01.2022

On the problem of reduction in the dynamics of a gyrostat

N. N. Makeyev
e-mail: nmakeyev@mail.ru; **SPIN-код (РИНЦ): 7373-7840, ORCID: 0000-0003-2807-977X**

We consider the motion relative to the fixed pole of the gyrostat, which occurs in the automatic control mode according to R. Grammel. The gyrostat is acted upon by a system of specified non-stationary forces caused by the influence of the external environment. A description is given to the procedure for reducing the dynamic system of the gyrostat, for which there must be a first integral linear in the components of the angular sorption of its carrier. The reduction is realized as a result of constructing a nonlinear integrodifferential equation that determines the dependence of one of the components of the absolute angular velocity vector of the gyrostat carrier. Some special cases of reduction associated with the structural and dynamic features of the gyrostat and the types of a given analytical dependence of the components of the gyrostat moment vector are considered.

Keywords: *gyrostat; dynamic system; reduction of the system of equations; linear integral of a dynamical system; automatic motion control mode*

Received 21.11.2021, accepted 27.01.2022

DOI: 10.17072/1993-0550-2022-1-22-28

1. Основные предпосылки

Кинетически асимметричный (в общем случае) гиростат, присоединенная масса которого (вращающийся ротор) является абсолютно твердым телом, движется вокруг неподвижного полюса O, находясь вне воздействия внешних силовых полей природного происхождения. Предполагается, что гиростатический момент $k(t)$, заданный относительно полюса O, определяется известной управляющей программой, построенной для значений времени $t \in [0, +\infty) \equiv T$.

Введем правые координатные ортобазисы с общим началом в полюсе *O*: неподвижный Γ_0, связанный с инерциальным пространством, и базис $\Gamma(Ox_1x_2x_3)$, оси координат которого $Ox_j\,(j=1,2,3)$ направлены по главным в полюсе *O* направлениям тензора инерции $\mathbf{J}=\mathrm{diag}\,(A_1, A_2, A_3)$.

В дальнейшем все координатные элементы относятся к осям базиса Γ и соответствуют указанным номерам $j=1,2,3$.

Обозначим: $\boldsymbol{\omega}(\omega_j)$ − мгновенная угловая скорость носителя гиростата, $\mathbf{k}(k_j)$ − гиростатический момент, заданный координатами в базисе Γ. Предварительно зададим вектор $\mathbf{k}(0)=\mathbf{k}^0$, неизменно связанный с базисом Γ. Здесь и далее нулевой верхний индекс относится к значениям величин при $t=0$.

Предполагается, что на гиростат действует система внешних сил с результирующим моментом $\mathbf{L}(t)$, заданным для $t\in T$ относительно полюса *O* проекциями $L_j(t)$ (j = 1, 2, 3) в системе осей координат базиса Γ.

Согласно принятым предпосылкам динамическое уравнение гиростата имеет вид [1]

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}+(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})+(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k})=\boldsymbol{\Phi}, \tag{1}$$

где

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathbf{L}(t)-\dot{\mathbf{k}}(t). \tag{2}$$

В уравнении (1) **J** обозначает приведенный по Н. Жуковскому [2] тензор инерции гиростата; $\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(\Phi_j)$ − некоторый эффективный силовой момент, отнесенный к полюсу *O*.

Режим движения гиростата, определяемый уравнением (1) с заданным силовым моментом (2), является режимом *авторегулирования* [3, 4]. Понятие о данном режиме для твердого тела введено *Р. Граммелем* [5]; соответствующее ему движение твердого тела рассмотрено в монографии [6, с. 154].

Уравнение (1) эквивалентно динамической системе [4]

$$A_1\dot{\omega}_1+(A_3-A_2)\omega_2\omega_3+k_3\omega_2-k_2\omega_3=\Phi_1, \tag{3}$$
$$(1,2,3),$$

где обозначение (1, 2, 3) здесь и всюду далее − символ циклической перестановки величин с индексами j = 1, 2, 3.

В уравнениях (3) заданными считаются аналитические функции

$$k_j(t)\in\mathrm{C}^1,\ L_j(t)\in\mathrm{C}^0,\ \omega_j(t)\in\mathrm{C}^2,$$

где обозначение C^p (p = 0, 1, …) является символом класса функций.

Задача об интегрировании в замкнутом аналитическом виде динамической системы (3) является одной из центральных проблем динамики гиростата. Одним из приемов, способствующих аналитическому решению этой задачи, является редуцирование данной системы, применяемое в случае некоторых определенных ограничений.

Под редуцированием системы уравнений в данной задаче понимается процесс выделения из динамической системы (3) уравнения, являющегося определяющим для одной из величин ω_j.

Аналогичная трактовка процедуры редуцирования приведена в монографии [7]. Там же отмечено, что "для построения точных решений классической задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку, сведение этой задачи к одному уравнению имеет принципиальное значение" [7, с. 26]. При этом редуцированное уравнение может быть как дифференциальным, так и интегродифференциальным уравнением.

Получение этого уравнения формально решает задачу редуцирования, а найденное точное решение данного уравнения обусловливает интегрирование исходной динамической системы в замкнутом конечном виде. Под последним понимается получение аналитического решения без применения разложений в ряды и каких-либо приближенных аналитических методов [8, с. 318].

Таким образом, интегрирование системы уравнений (3) в ряде случаев предварительно сводится к ее редуцированию.

Однако решение задачи редуцирования системы уравнений данного вида в общем виде, допускающем эффективное применение результирующего редуцированного уравнения, до настоящего времени не найдено.

В силу этого далее рассматриваются лишь ограниченное решение поставленной задачи для отдельных случаев исходной динамической системы.

2. Динамическая система с линейным интегралом

Введем линейную форму

$$F(\boldsymbol{\omega})=(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega}) \qquad (\|\mathbf{a}(t)\|^2\neq 0) \tag{4}$$

и определим условия существования для системы уравнений (3) первого интеграла вида

$$F(\boldsymbol{\omega}) \equiv a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 = h \qquad (5)$$

в определенном классе функций.

Предварительно отметим, что в соотношениях (4), (5) $a_j(t)\,(j=1,2,3)$ − функции класса $\mathrm{C}^1(T);\, h$ − постоянная интегрирования.

Обозначим

$$\begin{gathered} w_i = a_1^{-1}a_{i+1} \;\; (i=1,2), \\ c_1 = A_1^{-1}, \quad m_1 = c_1(A_2 - A_3) \;\; (1,2,3) \end{gathered} \qquad (6)$$

и в силу равенств (6) введем тождества

$$\sum_{j=1}^{3} m_j A_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{3} m_j A_j^2 = 0. \qquad (7)$$

В частности, при *центральной* (полной) кинетической симметрии гиростата имеем

$$A_j = A \quad (j=1,2,3), \qquad (8)$$

и тождества (7) становятся тривиальными.

Утверждение. Для того чтобы равенство (5) являлось первым интегралом системы уравнений (3), необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{gathered} (a_1^{-1}\dot{a}_1 + c_2k_3w_1 - c_3k_2w_2)h + \\ + a_1\sum_{j=1}^{3} c_j\Phi_j w_{j-1} = 0 \;\; (w_0 \equiv 1), \end{gathered} \qquad (9)$$

$$\begin{gathered} \dot{w}_1 - c_2k_3w_1^2 + c_3k_2w_1w_2 + \\ + (ha_1^{-1}m_3 + c_3k_1)w_2 - c_1k_3 = 0, \end{gathered} \qquad (10)$$

$$\begin{gathered} \dot{w}_2 + c_3k_2w_2^2 - c_2k_3w_1w_2 + \\ + (ha_1^{-1}m_2 - c_2k_1)w_1 + c_1k_2 = 0, \end{gathered} \qquad (11)$$

$$m_1 - m_2w_1^2 - m_3w_2^2 = 0, \qquad (12)$$

$$m_r w_1 w_2 = 0 \qquad (r=2,3). \qquad (13)$$

Доказательство. Полагая $a_1 \neq 0$ в силу условия (4), выразим компоненту ω_1 из равенства (5). Вычисляя величину $\dot{F}$ согласно выражению (5) и уравнениям системы (3), с учетом обозначений величин (6), в результате получаем равенство, удовлетворяющееся тождественно по переменным ω_2, ω_3 при выполнении условий (9)−(13). □

Рассмотрим следствия, вытекающие из данного утверждения.

При заданном первом интеграле (5), когда выполняются условия (9)−(13), для различных заданных ограничений имеют место следующие частные случаи.

1. Если векторы $\mathbf{a}(t), \boldsymbol{\omega}(t)$ для $t \in T$ ортогональны, то, согласно равенству (5),

$$h = 0. \qquad (14)$$

Тогда из условий (9)−(11) следуют уравнения, соответственно

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\Phi}) = 0, \qquad (15)$$

$$\dot{w}_1 - c_2k_3w_1^2 + c_3(k_2w_1 + k_1)w_2 - c_1k_3 = 0, \qquad (16)$$

$$\dot{w}_2 + c_3k_2w_2^2 - c_2(k_3w_2 + k_1)w_1 + c_1k_2 = 0. \qquad (17)$$

В случае, при котором в силу соответствующего условия (13) имеем

$$w_1 = a_2(t) \equiv 0, \qquad (18)$$

ограничения (15)−(17) принимают вид, соответственно,

$$c_1\Phi_1 + c_3w_2\Phi_3 = 0, \qquad (19)$$

$$c_1k_3 - c_3k_1w_2 = 0, \qquad (20)$$

$$\dot{w}_2 + (c_3w_2^2 + c_1)k_2 = 0. \qquad (21)$$

Из соотношений (12), (20) следует

$$w_2 = \pm\sqrt{\frac{m_1}{m_3}} = \frac{c_1k_3}{c_3k_1}, \qquad (22)$$

откуда получаем известное условие [9]:

$$k_1\sqrt{A_1(A_2 - A_3)} - k_3\sqrt{A_3(A_1 - A_2)} = 0. \qquad (23)$$

Вводя дополнительное ограничение

$$k_2(t) \equiv 0, \qquad (24)$$

согласно равенствам (21), (22), получаем

$$w_2(t) \equiv \mathrm{const}, \; A_1k_1a_3 - A_3k_3a_1 = 0. \qquad (25)$$

В силу условий (23), (24) гиростатический момент $\mathbf{k}(k_1, 0, k_3)$ ортогонален плоскости кругового сечения гирационного эллипсоида, отнесенного к полюсу *O*.

Отметим, что структурное условие (20) тождественно удовлетворяется при значениях параметров

$$a_r = A_r k_r \qquad (r=1,3). \qquad (26)$$

В силу этого, с учетом условий (14), (18), (24), линейный первый интеграл системы уравнений (3) принимает вид

$$A_1 k_1 \omega_1 + A_3 k_3 \omega_3 = 0, \qquad (27)$$

идентичный соответствующему интегралу, полученному в другой задаче [9] с однотипной структурно-динамической моделью. При этом, согласно зависимостям (26), второе соотношение (25) обращается в тривиальное тождество.

При условии $w_2(t) \neq 0$ для $t \in T$ из соотношений (19), (22) следует

$$k_1 \Phi_1 + k_3 \Phi_3 = 0,$$

откуда при ограничении (24) получаем условие ортогональности векторов $\mathbf{k}(t), \mathbf{\Phi}(t)$ для всех значений $t \in T$.

При $w_2 = a_3(t) \equiv 0 \; (a_1, a_2) \neq 0$ имеет место случай, структурно симметричный случаю с условием (18).

2. Пусть $h \neq 0$ и, согласно условиям (13), $m_2 = m_3 = 0 \; (w_1 w_2 \neq 0)$, откуда непосредственно следует условие полной структурно-кинетической симметрии (8). При этом ограничение (12) становится тривиальным, а уравнения (10), (11) упрощаются.

Согласно зависимостям (26) из условия (9) получаем

$$h\dot{k}_1 + k_1 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Phi}) = 0, \qquad (28)$$

а из соотношений (10),(11) при $k_1 \neq 0$ следует, соответственно,

$$k_1^{-1} k_2 = C_1, \qquad k_1^{-1} k_3 = C_2, \qquad (29)$$

где $(C_1, C_2) \neq 0$ – определенные постоянные.

Из равенств (29), как следствие, имеем

$$k_2^{-1} k_3 = \mathrm{const} \neq 0,$$

а в силу условия (28), согласно равенствам (2), (26), получаем определяющее для k_1 соотношение

$$h k_1^{-1} + D k_1 = C + \int_0^t Q \, d\tau. \qquad (30)$$

В равенстве (30) обозначено:

$$C = h(k_1^0)^{-1} + D k_1^0, \; D = 1 + C_1^2 + C_2^2,$$

$$Q(t) = L_1 + C_1 L_2 + C_2 L_3.$$

Зависимости для величин k_2, k_3 определяются соотношениями (29) согласно определяющему равенству (30).

В силу условий, содержащихся в приведенном утверждении, полная форма (при $a_1 a_2 a_3 \neq 0$) линейного интеграла (5) для системы уравнений (3) имеет место лишь при центральной кинетической симметрии, определяемой условиями (8).

3. Редуцирование динамической системы

Получим уравнение, являющееся определяющим для одной из компонент ω_j (j = 1, 2, 3) динамической системы (3), имеющей линейный интеграл (5). Для этого представим систему уравнений (3) в канонической форме:

$$\dot{\omega}_1 = m_1 \omega_2 \omega_3 + c_1 (k_2 \omega_3 - k_3 \omega_2 + \Phi_1), \qquad (31)$$

$$(1, 2, 3),$$

и рассмотрим уравнения выделенной подсистемы, содержащие величины $\dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$.

Обозначим

$$p_1 = c_3 \dot{k}_1 - h m_3 a_1^{-2} \dot{a}_1,$$

$$p_2 = c_3 k_1 + h m_3 a_1^{-1}, \quad p_3 = h k_3 a_1^{-1} + \Phi_2,$$

$$p_4 = h m_2 a_1^{-1} - c_2 (k_1 + k_3 w_2),$$

$$q_1 = c_3 (\Phi_3 - h k_2 a_1^{-1}), \; q_2 = p_2 + c_3 k_2 w_1.$$

Выразим величину ω_1 из равенства (5) и подставим это выражение в уравнения системы (31).

В результате получим следующую подсистему уравнений:

$$\dot{\omega}_2 = p_3 - c_2 k_3 w_1 \omega_2 + p_4 \omega_3 - \\ - m_2 w_1 \omega_2 \omega_3 - m_2 w_2 \omega_3^2, \qquad (32)$$

$$\dot{\omega}_3 = q_1 + q_2 \omega_2 + c_3 k_2 w_2 \omega_3 - \\ - m_3 w_2 \omega_2 \omega_3 - m_3 w_1 \omega_2^2. \qquad (33)$$

Принимая в дальнейшем ограничения (18), (24), согласно соотношению (33) получаем выражение для $\ddot{\omega}_3$, в котором используем равенство (32).

В результате получаем

$$\ddot{\omega}_3 = c_3 \dot{\Phi}_3 + (p_1 - m_3 \dot{w}_2 \omega_3 - m_3 w_2 \dot{\omega}_3) \omega_2 + \\ + (p_2 - m_3 w_2 \omega_3) P(t, \omega_3). \qquad (34)$$

Обозначим

$$P(t,\omega_3) = p_3 + p_4\omega_3 - m_2 w_2 \omega_3^2,$$

$$\mu(t,\omega_3) = \exp\,[-\int_0^t (m_2\omega_3 + c_2 k_3)\, w_1\, d\tau].$$

Рассматривая соотношение (32) как линейное дифференциальное уравнение относительно функции ω_2, в результате получаем

$$\omega_2 = \mu(t,\omega_3)[\omega_2^0 + \int_0^t \mu^{-1}(\tau,\omega_3) P(\tau,\omega_3) d\tau], \tag{35}$$

где μ − интегрирующий множитель уравнения (32) для ω_2.

Подставляя выражение (35) в уравнение (34), получаем результирующее соотношение для компоненты ω_3 в виде

$$\ddot{\omega}_3 + [m_3(w_2\dot{\omega}_3 + \dot{w}_2\omega_3) - p_1]\cdot$$
$$\cdot\,\mu\,(\omega_2^0 + \int_0^t \mu^{-1} P\, d\tau) = c_3\dot{\Phi}_3 +$$
$$+ (p_2 - m_3 w_2 \omega_3)\, P(t,\omega_3). \tag{36}$$

Равенство (36) является *интегродифференциальным уравнением*, определяющим зависимость вида $\omega_3 = \omega_3(t^0, t)$. Здесь нулевой верхний индекс относится к значению величины в начальный момент времени.

Следует отметить, что идея данного приема построения результирующего интегродифференциального уравнения для динамической системы твердого тела принадлежит Е.И. Харламовой [7, 10].

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (36). Примем условия (14), (18) и присоединенные к ним дополнительные ограничения

$$k_2(t) = k_2^0 + \int_0^t L_2(\tau)\, d\tau \quad (t \in T),$$

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}) = 0, \quad m_2 = 0 \Leftrightarrow A_1 = A_3.$$

Тогда, согласно объединенной системе указанных условий, имеем

$$\mu \equiv 1, \; p_3 = \Phi_2 = P \equiv 0,$$

и соотношение (36) вырождается в линейное дифференциальное уравнение, имеющее вид

$$\ddot{\omega}_3 + [m_3(w_2\dot{\omega}_3 + \dot{w}_2\omega_3) - c_3\dot{k}_1]\omega_2^0 = c_3\dot{\Phi}_3. \tag{37}$$

В случае, при котором $\omega_2^0 = 0$, из уравнения (37) получаем

$$\omega_3(t) = \omega_3^0 + \dot{\omega}_3^0 t + c_3\Omega_3(t),$$
$$\Omega_3(t) = k_3^0 - k_3(t) + \int_0^t L_3(\tau)\, d\tau. \tag{38}$$

Зависимость (38) определяет квазиравномерное движение проекции апекса вектора $\boldsymbol{\omega}$ на координатную ось Ox_3 базиса Γ, в которой величина Ω_3 играет роль нестационарного возмущения, наложенного на равномерное движение апекса.

Рассмотрим теперь случай, при котором

$$w_1 w_2 = 0, \; m_r \neq 0 \;\; (r = 2, 3), \tag{39}$$

и тогда в силу условия (4) интеграл (5) принимает вид

$$\omega_1 = h. \tag{40}$$

Согласно соотношению (40) из условия (9) следует

$$h\dot{a}_1 + a_1^2 c_1 \Phi_1 = 0, \tag{41}$$

откуда при ограничении (14) получаем зависимость

$$k_1(t) = k_1^0 + \int_0^t L_1(\tau)\, d\tau \neq 0 \quad (t \in T),$$

однотипную зависимости для параметра k_2, полученной ранее.

В случае, при котором условие (14) не выполняется, соотношения (39)−(41) приводят к зависимости

$$a_1^{-1}(t) = (a_1^0)^{-1} + c_1 h^{-1}\int_0^t \Phi_1(\tau)\, d\tau,$$

а ограничения (39) в силу условий (10), (11) порождают тождества $c_1 k_r = 0$, откуда имеем

$$k_r \equiv 0 \;\; (r = 2, 3).$$

Если при условии (14) имеет место режим движения гиростата, происходящий согласно соотношению (40), то, в силу уравнений системы (31), путем редуцирования получаем определяющее для компоненты ω_3 уравнение

$$\ddot{\omega}_3 - k_1^{-1}\dot{k}_1\dot{\omega}_3 + c_2 c_3 k_1^2 \omega_3 = Q_3(t), \tag{42}$$

где обозначено

$$Q_3(t) = c_3 k_1 [c_2\Phi_2 + \frac{d}{dt}\big(k_1^{-1}\Phi_3\big)].$$

Принимая условие $k_1 \neq 0$ и вводя новые переменные

$$\omega_3(t) = Z(\tau), \quad \tau = \int_0^t k_1(s)\,ds, \qquad (43)$$

представим уравнение (42) в виде

$$Z'' + c_2 c_3 Z = k_1^{-2} Q_3(\tau), \qquad (44)$$

где штрих обозначает производную функцию по переменной τ.

Соотношение (44) является уравнением одномерного гармонического осциллятора, колеблющегося в фазовом пространстве по оси Z с собственной частотой $\Omega = \sqrt{c_2 c_3}$ под воздействием заданной нестационарной внешней силовой нагрузки.

Получив аналитическую зависимость вида $\omega_3 = Z(\tau)$, определяемую равенствами (43) в форме полученного решения уравнения (44), из системы уравнений (31) при условии (40) находим

$$\omega_2 = c_1 \frac{k_2 \omega_3 + \Phi_1}{c_1 k_3 - m_3 \omega_3}. \qquad (45)$$

Соотношение (45) имеет место лишь при условии

$$\omega_3 \neq -c_1 m_1^{-1} k_3 \quad (A_2 \neq A_3).$$

Список литературы

1. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 294 с.
2. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью: собр. соч. в 7 т. М.; Л.: Гостехиздат. 1949. Т. 2. С. 152−309.
3. *Теория а*втоматического управления / под ред. А.В. Нетушила. М.: Высшая школа, 1976. 400 с.
4. *Макеев Н.Н.* Управляемость и стабилизируемость вращательного движения космического аппарата // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 1999. Вып. 31. С. 97−105.
5. *Граммель Р.* Теория несимметричного гироскопа с реактивным приводом // Механика: периодич. сб. перев. иностр. статей. 1958. № 6. С. 145.
6. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 528 с.
7. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Интегро-дифференциальное уравнение динамики твердого тела. Киев: Наукова думка, 1986. 296 с.
8. *Харламов П.В.* Новые методы исследования задач динамики твердого тела // Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. М.: Наука, 1975. 344 с.
9. *Макеев Н.Н.* Интегрируемость гиростатических систем в магнитном поле // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2003. Вып. 35. С. 49−70.
10. *Харламова Е.И.* Сведение задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, к одному уравнению. Новое частное решение этой задачи // Прикладная математика и механика. 1966. Т. 30. Вып. 4. С. 784−788.

References

1. *Vittenburg J.* Dinamika sistem tvyordyh tel. M.: Mir, 1980. 294 s.
2. *ZHukovskij N.E.* O dvizhenii tvyordogo tela, imeyushchego polosti, napolnennye odnorodnoyu kapel'noyu zhidkost'yu. Sobr. soch. v 7 t. M.; L.: Gostekhizdat. 1949. T. 2. S. 152−309.
3. *Teoriya* avtomaticheskogo upravleniya / pod red. A.V. Netushila. M.: Vysshaya shkola, 1976. 400 s.
4. *Makeev N.N.* Upravlyaemost' i stabiliziruemost' vrashchatel'nogo dvizheniya kosmicheskogo apparata // Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelinejnye dinamicheskie si-stemy. Sb. nauch. tr. / Perm. un-t. Perm'. 1999. Vyp. 31. S. 97−105.
5. *Grammel' R.* Teoriya nesimmetrichnogo giroskopa s reaktivnym privodom // Mekhanika: Periodicheskij sbornik perevodov inostrannyh statej. 1958. № 6. S. 145.
6. *Magnus K.* Giroskop. Teoriya i primenenie. M.: Mir, 1974. 528 s.
7. *Harlamova E.I., Mozalevskaya G.V.* Integrodifferencial'noe uravnenie dinamiki tvyordogo tela. Kiev: Naukova dumka, 1986. 296 s.
8. *Harlamov P.V.* Novye metody issledovaniya zadach dinamiki tvyordogo tela // Problemy analiticheskoj mekhaniki, teorij ustojchivosti i upravleniya. M.: Nauka, 1975. 344 s.
9. *Makeev N.N.* Integriruemost' girostaticheskih sistem v magnitnom pole // Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelinejnye dinamiches-

kie sistemy. Sb. nauch. tr. / Permskij un-t. Perm'. 2003. Vyp. 35. S. 49‒70.
10. *Harlamova E.I.* Svedenie zadachi o dvizhenii tyazhyologo tvyordogo tela, imeyushchego nepodvizhnuyu tochku, k odnomu uravneniyu. Novoe chastnoe reshenie etoj zadachi // Prikladnaya matematika i mekhanika, 1966. T.30. Vyp. 4. S. 784‒788.

Просьба ссылаться на эту статью:

Макеев Н.Н. К проблеме редукции в динамике гиростата // Вестник ПГУ. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 1 (56). С. 22–28. DOI: 10.17072/1993-0550-2022-1-22-28.

Please cite this article as:

Makeev N.N. On the problem of reduction in the dynamics of a gyrostat // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022. Vyp. 1 (56). P. 22–28.
DOI: 10.17072/1993-0550-2022-1-22-28.