МАТЕМАТИКА

УДК 517.917.52

К необходимым условиям оптимальности в системах с запаздыванием

К. Б. Мансимов
Институт систем управления НАН Азербайджана; Баку, Азербайджан
kamilbmansimov@gmail.com, ORCID 0000-0002-1518-2279, AuthorID 247352

Рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием и многоточечным функционалом качества. Получены необходимые условия оптимальности особых управлений.

Ключевые слова: *система с запаздыванием; многоточечный функционал; формула приращения; особое управление; принцип максимума Понтрягина*

Поступила в редакцию 23.10.2021, принята к опубликованию 10.11.2021

To the necessary optimality conditions in systems with delay

K. B. Mansimov
Institute of Control Systems of NAS Azerbaijan; Baku, Azerbaijan
kamilbmansimov@gmail.com, ORCID 0000-0002-1518-2279, AuthorID 247352

An optimal control problem described by a system of ordinary differential equations with delay and a multipoint performance functional is considered. Necessary optimality conditions of singular controls are obtained.

Keywords: *system with delay; multipoint functional; increment formula; singular control; Pontryagin's maximum principle*

Received 23.10.2021, accepted 10.11.2021

DOI: 10.17072/1993-0550-2021-4-5-13

Введение

Принцип максимума Л.С. Понтрягина является самым сильным необходимым условием оптимальности первого порядка. Но нередки случаи, когда число управлений, выделенных среди всех допустимых управлений с помощью принципа максимума Понтрягина, является достаточно большим. Кроме того, не исключено также вырождение, т.е. тривиальным образом выполнение принципа максимума Понтрягина или же его следствий (см., например, [1–5]).

Подобный случай называется *особым*, а управление, вдоль которого необходимое условие оптимальности вырождается называется *особым управлением*. Заметим, что термин *особое управление* в математическую теорию оптимального управления был введен Л.И. Розоноэром [5]. Все это привело к необходимости получения содержательных и конструктивно проверяемых необходимых условий оптимальности особых управлений.

Ранее Р. Габасовым был предложен [2, 3] метод исследования особых управлений в задаче терминального управления, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем этот метод был развит Р. Габасовым, Ф.М. Кирилловой и их учениками (см., например, [2–4, 6], а также обзоры из [7, 8]).

Как и в случае с принципом максимума Понтрягина, после получения различных критериев оптимальности особых управлений в задачах управления обыкновенными динамическими системами возник вопрос о распространении установленных результатов на более общие системы управления, в частности, на системы с запаздыванием.

Стало ясно, что для вывода необходимых условий оптимальности в более сложных задачах оптимального управления, чем обыкновенные динамические системы, надо иметь новые схемы исследования, носящие качественно новый, нетрадиционный характер.

В работе [9] была предложена новая схема исследования особых управлений в системах с запаздыванием и с распределенными параметрами. В предлагаемой работе с помощью метода предложенного в [9] исследуется особый случай в одной задаче оптимального управления с запаздыванием и многоточечным критерием качества. Получен ряд необходимых условий оптимальности. Заметим, что ряд необходимых условий оптимальности особых управлений в различных системах с запаздыванием и терминальным критерием качества различными способами исследованы в работах [9–14] и др.

1. Постановка задачи

Предположим, что управляемый процесс на заданном отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ описывается системой дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), x\big(h(t)\big), u(t)\right),$$
$$t \in [t_0, t_1] \qquad (1)$$

с начальным условием

$$x(t) = x^0(t), \qquad t \in E_{t_0} = [h(t_0), t_0]. \quad (2)$$

Здесь $f(t, x, y, u) -$ заданная -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x, y до второго порядка включительно, $h(t) -$ заданная непрерывно дифференцируемая скалярная функция, причем, $\dot{h}(t) > 0, x^0(t) -$ заданная непрерывная на E_{t_0} начальная вектор-функция, а $u(t) - r$-мерный измеримый и ограниченный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U \subset R^r$ (допустимое управление)

$$u(t) \in U \subset R^r, \qquad t \in [t_0, t_1]. \qquad (3)$$

В дальнейшем предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t) \in L_\infty([t_0, t_1], U)$ соответствует единственное абсолютно непрерывное решение $x(t)$ системы (1)–(2), определенное на $T = [t_0, t_1]$.

На решениях основной начальной задачи (1)–(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим многоточечный функционал типа Майера:

$$S(u) = \varphi\big(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)\big). \quad (4)$$

Здесь

$$T_i \in (t_0, t_1],$$
$$i = \overline{1, k}, (t_0 < T_1 < \cdots < T_k \le t_1) -$$

заданные точки, а $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_k)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Допустимый процесс $(u(t), x(t))$, являющийся решением задачи о минимуме функционала (4), при ограничениях (1)–(3), назовем *оптимальным процессом*.

Для вывода необходимых условий оптимальности предварительно будет построена пригодная для исследования формула приращения функционала качества.

2. Формула приращения критерия качества

Пусть $(u(t), x(t))$ некоторый, а

$$\big(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)\big)$$

– произвольный – допустимые процессы.

Введем обозначения:

$$H(t, x, y, u, \psi) = \psi' f(t, x, y, u),$$
$$f_x[t] \equiv f_x\big(t, x(t), y(t), u(t)\big),$$
$$\Delta_{v(t)} H[t] \equiv \psi'(t) \Delta_{v(t)} f[t], y(t) = x\big(h(t)\big),$$
$$\Delta_v f[t, x] \equiv$$
$$\equiv f\big(t, x(t), y(t), v(t)\big) - f\big(t, x(t), y(t), u(t)\big),$$
$$H_x[t] \equiv H_x\big(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)\big),$$
$$H_{xx}[t] \equiv H_{xx}\big(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)\big).$$

Здесь, и в дальнейшем ($'$) штрих означает операцию транспонирования, а $\psi(t)$ – измеримая и ограниченная вектор-функция, являющаяся решением уравнения (сопряженная система)

$$\psi(t) =$$
$$= \int_t^{t_1} \left[f'_x[\tau]\psi(\tau) + \dot r(\tau) f'_y[\tau]\psi(\tau)\right] d\tau -$$
$$- \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) \frac{\partial \varphi\big(z(T_1), z(T_2), \ldots, z(T_k)\big)}{\partial a_i}, \quad (5)$$
$$\psi(t) = 0, t > t_1,$$

где $\alpha_i(t)$ — характеристическая функция области $[t_0, T_i]$, а $r(t)$ – функция, обратная к $h(t)$. Учитывая введенные обозначения и принимая во внимание (5), приращение функционала (4), соответствующее допустимым управлениям $\bar u(t)$ и $u(t)$, может быть представлено в виде

$$\Delta S(u) = S(\bar u) - S(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar u} H[t]dt +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} \Delta x'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi\big(x(T_1), x(T_2), \ldots, x(T_k)\big)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x(T_j) -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} [\Delta_{\bar u} H_x[t]\Delta x(t) + \Delta_{\bar u} H_y[t]\Delta y(t)]dt -$$
$$- \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [\Delta x'(t) H_{xx}[t]\Delta x(t) +$$
$$+ \Delta x'(t) H_{xy}[t]\Delta y(t) + \Delta y'(t) H_{yx}[t]\Delta x(t) +$$
$$+ \Delta y'(t) H_{yy}[t]\Delta y(t)]dt -$$
$$- \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [\Delta x'(t)\Delta_{\bar u} H_{xx}[t]\Delta x(t) +$$
$$+ \Delta x'(t)\Delta_{\bar u} H_{xy}[t]\Delta y(t) +$$
$$+ \Delta y'(t)\Delta_{\bar u} H_{yx}[t]\Delta x(t) +$$
$$+ \Delta y'(t)\Delta_{\bar u} H_{yy}[t]\Delta y(t)\big]dt$$
$$+ o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k} \|\Delta z(T_i)\|\right]^2\right) -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} o_2([\|\Delta x(t)\| + \|\Delta y(t)\|]^2)dt. \quad (6)$$

Здесь $\|\alpha\|$ – норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)'$, которая определяется формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$, а величины $o_i, i = 1,2$ определяются из разложений:

$$\varphi\big(\bar x(T_1), \bar x(T_2), \ldots, \bar x(T_k)\big) -$$
$$- \varphi\big(x(T_1), x(T_2), \ldots, x(T_k)\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi'\big(x(T_1), x(T_2), \ldots, x(T_k)\big)}{\partial a_i} \Delta x(T_i) +$$
$$+ o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k} \|\Delta x(T_i)\|\right]^2\right),$$

$$H\big(t, \bar x(t), \bar y(t), \bar u(t), \psi(t)\big) -$$
$$- H\big(t, x(t), y(t), \bar u(t), \psi(t)\big) =$$
$$= H'_x\big(t, x(t), y(t), \bar u(t), \psi(t)\big)\Delta x(t) +$$
$$+ H'_y\big(t, x(t), y(t), \bar u(t), \psi(t)\big)\Delta y(t) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta x'(t) H_{xx}\big(t, x(t), y(t), \bar u(t), \psi(t)\big)\Delta x(t) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta x'(t) H_{xy}\big(t, x(t), y(t), \bar u(t), \psi(t)\big)\Delta y(t) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta y'(t) H_{yx}\big(t, x(t), y(t), \bar u(t), \psi(t)\big)\Delta x(t) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta y'(t) H_{yy}\big(t, x(t), y(t), \bar u(t), \psi(t)\big)\Delta y(t) +$$
$$+ o_2([\|\Delta x(t)\| + \|\Delta y(t)\|]^2).$$

С другой стороны, из условий гладкости, наложенных на правую часть уравнения (1) получаем, что приращение $\Delta x(t)$ траектории $x(t)$ является решением линеаризованной задачи:

$$\Delta \dot x(t) =$$
$$= f_x[t]\Delta x(t) + f_y[t]\Delta y(t) +$$
$$+ \Delta_{\bar u(t)} f[t] + \eta_1(t; \Delta u), \quad (7)$$
$$\Delta x(t) = 0, t \in E_{t_0}. \quad (8)$$

Здесь по определению

$$\eta_1(t; \Delta u) =$$
$$= \Delta_{\bar u(t)} f_x[t]\Delta x(t) + \Delta_{\bar u(t)} f_y[t]\Delta y(t) +$$
$$o_3([\|\Delta x(t)\| + \|\Delta y(t)\|]).$$

Здесь величина $o_3(.)$ определяется из разложения

$$f(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t),\bar{u}(t)) - f(t,x(t),y(t),\bar{u}(t)) = \\ = f_x(t,x(t),y(t),\bar{u}(t)) + o_3([\|\Delta x(t)\| + \|\Delta y(t)\|]).$$

Интерпретируя уравнение (7) как линейное неоднородное дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, на основе аналога формулы Коши об интегральном представлении решении таких уравнений (см., например [15]), имеем

$$\Delta x(t) = \\ = \int_{t_0}^{t} F(t,\tau)\, \Delta_{\bar{u}(\tau)} f[\tau]d\tau + \eta_2(t;\Delta u), \quad (9)$$

где

$$\eta_2(t;\Delta u) = \int_{t_0}^{t} F(t,\tau)\, \eta_1(\tau;\Delta u)d\tau,$$

а $F(t,\tau) - (n \times n)$ матрица Коши линеаризованной системы, являющаяся решением уравнения

$$F_\tau(t,\tau) = \\ -F(t,\tau)f_x[\tau] - F(t,r(\tau))\dot{r}(\tau)f_x[r(\tau)], \\ \tau < t \quad (10)$$

$$F(t,t) = E, \quad F(t,\tau) = 0, \\ \tau > t, \quad (11)$$

$E - (n \times n)$ единичная матрица.

Займемся преобразованием отдельных слагаемых в формуле приращения (6).

Используя представление (9), и учитывая формулу Дирихле (см., например [16]), получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1} [\Delta_{\bar{u}(t)} H_x[t]\Delta x(t) + \Delta_{\bar{u}(t)} H_y[t]\Delta y(t)]dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \Bigg[\int_{t}^{t_1} [\Delta_{\bar{u}(\tau)} H_x[\tau]F(\tau,t) + \\ + \Delta_{\bar{u}(\tau)} H_y[t]F(h(\tau),t)]d\tau \Bigg] \Delta_{\bar{u}(t)} f[t]dt + \\ + \eta_3(\Delta u), \quad (12)$$

где по определению

$$\eta_3(\Delta u) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} [\Delta_{\bar{u}(t)} H_x[t]\eta_2(t;\Delta u) + \\ + \Delta_{\bar{u}(t)} H_y[t]\eta_2(t;\Delta u)]dt.$$

Из (9) следует, что

$$\Delta x(T_i) = \\ \int_{t_0}^{t_1} \alpha_i(t)F(T_i,t)\, \Delta_{\bar{u}(t)} f[\tau]d\tau + \eta_2(T_i;\Delta u) \quad (13)$$

Положим

$$K(\tau,s) = \\ -\sum_{i,j=1}^{k} \alpha_i(\tau)\alpha_j(s)F'(T_i,t) \\ \frac{\partial^2 \varphi'(x(T_1),x(T_2),\dots,x(T_k))}{\partial a_i \partial a_j} F(T_j,s) - \\ - \int_{\max(\tau,s)}^{t_1} [F'(t,\tau)H_{xx}[t]F(t,s) + \\ + F'(t,\tau)H_{xy}[t]F(h(t),s) + \\ + F'(h(t),\tau)H_{yx}[t]F(t,s) + \\ + F'(h(t),\tau)H_{yy}[t]F(h(t),s)]dt. \quad (14)$$

Принимая во внимание обозначение (14), используя представления (9), (13) и учитывая тождество из [17, с. 204], получим, что

$$\sum_{i,j=1}^{k} \Delta x'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi'(x(T_1),x(T_2),\dots,x(T_k))}{\partial a_i \partial a_j} \Delta x(T_j) - \\ - \int_{t_0}^{t_1} [\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t) + \Delta x'(t) \\ H_{xy}[t]\Delta y(t) + \Delta y'(t)H_{yx}[t]\Delta x(t) + \\ + \Delta y'(t)H_{yy}[t]\Delta y(t)]dt = \\ + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_i(\tau)\alpha_j(s)\Delta_{\bar{u}(\tau)} f[\tau] \\ F'(T_i,t)\frac{\partial^2 \varphi'(x(T_1),x(T_2),\dots,x(T_k))}{\partial a_i \partial a_j} \\ F(T_j,s)\Delta_{\bar{u}(s)} f[s]dsd\tau$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\int_{t_0}^{t} F(t,\tau)\,\Delta_{\overline{u}(\tau)}f[\tau]d\tau\right)'\right.$$

$$H_{xx}[t]\left(\int_{t_0}^{t} F(t,s)\,\Delta_{\overline{u}(s)}f[s]ds\right)+$$

$$+\left(\int_{t_0}^{t} F(t,\tau)\,\Delta_{\overline{u}(\tau)}f[\tau]d\tau\right)'$$

$$H_{xy}[t]\left(\int_{t_0}^{t} F(h(t),s)\,\Delta_{\overline{u}(s)}f[s]ds\right)+$$

$$+\left(\int_{t_0}^{t} F(h(t),\tau)\,\Delta_{\overline{u}(\tau)}f[\tau]d\tau\right)'$$

$$H_{yx}[t]\left(\int_{t_0}^{t} F(t,s)\,\Delta_{\overline{u}(s)}f[s]ds\right)+$$

$$+\left(\int_{t_0}^{t} F(th(t),\tau)\,\Delta_{\overline{u}(\tau)}f[\tau]d\tau\right)'$$

$$\left.H_{xy}[t]\left(\int_{t_0}^{t} F(h(t),s)\,\Delta_{\overline{u}(s)}f[s]ds\right)\right]dt+$$

$$+\eta_3(\Delta u)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\overline{u}(\tau)}f'[\tau]K(\tau,s)\Delta_{\overline{u}(s)}f[s]dsd\tau+$$

$$+\ \eta_4(\Delta u), \qquad (15)$$

где по определению выражение $\eta_4(\Delta u)$ определяется по формуле

$$\eta_4(\Delta u)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{k}\left(\int_{t_0}^{t_1}\alpha_i(t)\,\Delta_{\overline{u}(t)}f'[t]F'(T_i,t)\,dt\right)$$

$$\frac{\partial^2\varphi'\big(x(T_1),x(T_2),\dots,x(T_k)\big)}{\partial a_i\partial a_j}\eta_2\big(T_j,\Delta u\big)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{k}\eta_2{}'(T_i,\Delta u)\frac{\partial^2\varphi'\big(x(T_1),x(T_2),\dots,x(T_k)\big)}{\partial a_i\partial a_j},$$

$$\Delta x\big(T_j,\Delta u\big)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t} F(t,\tau)\,\Delta_{\overline{u}(\tau)}f[\tau]d\tau\right)'$$

$$H_{xx}[t]\eta_2(t,\Delta u)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\eta'_2(t,\Delta u)\,H_{xx}[t]\Delta x(t)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\eta'_2(t,\Delta u)\,H_{xy}[t]\Delta y(t)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t} F(h(t),\tau)\,\Delta_{\overline{u}(\tau)}f[\tau]d\tau\right)'$$

$$H_{yx}[t]\eta_2(t,\Delta u)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t} F(t,\tau)\,\Delta_{\overline{u}(\tau)}f[\tau]d\tau\right)'$$

$$H_{xy}[t]\eta_2(t,\Delta u)dt$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\eta'_2\left(h(t),\int_{t_0}^{t_1}\eta'_2(h(t),\Delta u)\,H_{yy}[t]\Delta y(t)dt\right).$$

$$H_{yx}[t]\Delta x(t)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\eta'_2(h(t),\Delta u)\,H_{yy}[t]\Delta y(t)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t} F(h(t),\tau)\,\Delta_{\overline{u}(\tau)}f[\tau]d\tau\right)'$$

$$H_{yy}[t]\eta_2(h(t),\Delta u)dt. \qquad (16)$$

Учитывая тождества (15), (16) в формуле (6), приращение функционала качества (4) представляется в следующем окончательном виде:

$$\Delta S(u)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t_1}[\Delta_{\overline{u}(\tau)}H'_x[\tau]F(\tau,t)+\right.$$

$$+\Delta_{\overline{u}(\tau)}H'_y[\tau]F(h(t),\tau)\Big]d\tau\Bigg]\Delta_{\overline{u}(\tau)}f[t]dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\overline{u}(\tau)}H[t]dt + \eta_5(\Delta u), \qquad (17)$$

где $\eta_5(\Delta u)$ определяется по формуле

$$\eta_5(\Delta u) =$$

$$= o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta x(T_i)\|\right]^2\right) -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} o_2([\|\Delta x(t)\| + \|\Delta y(t)\|]^2)dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[\Delta x'(t)\Delta_{\overline{u}(t)}H_{xx}[t]\Delta x(t) +$$

$$+\Delta x'(t)\Delta_{\overline{u}(t)}H_{xy}[t]\Delta y(t) +$$

$$+\Delta y'(t)\Delta_{\overline{u}(t)}H_{yx}[t]\Delta x(t) +$$

$$+\Delta y'(t)\Delta_{\overline{u}(t)}H_{yy}[t]\Delta y(t)]dt - \eta_3(\Delta u) - \frac{1}{2}\eta_4(\Delta u).$$

Одной из особенностей построенной формулы (1) является то, что в ней главные члены в явном виде от $\Delta x(t)$ и $\Delta y(t)$ не зависят. Отметим, что формула приращения (17) существенно отличается от традиционных формул приращений второго порядка из [2–4, 6, 7, 10–13, 18].

3. Необходимые условия оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений

Известно, что (см., например [1]) для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче, необходимо, чтобы неравенство

$$\Delta_v H(\theta) \le 0 \qquad (18)$$

выполнялось для всех $v \in U$ и $\theta \in [t_0, t_1)$.

Здесь, и в дальнейшем $\theta \in [t_0, t_1)$ – произвольная точка (точка Лебега) (см., например [19]) управления $u(t)$.

Неравенство (18) является аналогом условия максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи. Изучим случай его вырождения.

Определение. Допустимое управление $u(t)$ назовем особым, в смысле принципа максимума Понтрягина, если для всех $v \in U$ и $\theta \in [t_0, t_1)$

$$\Delta_v H(\theta) = 0. \qquad (19)$$

Как видно, при выполнении (19), условие максимума Понтрягина (18) теряет свой содержательный смысл и становится неэффективным.

Построенная формула приращения (17) позволяет получить необходимые условия оптимальности особых управлений.

Пусть $u(t)$ – особое оптимальное управление, m – произвольное натуральное число, $\varepsilon > 0$ – произвольное достаточно малое число, $l_i \ge 0, i = \overline{1,m}$ – произвольные числа, $v_i \in U, i = \overline{1,m}$ – произвольные векторы, $\theta_i \in [t_0, t_1), i = \overline{1,m}$ – произвольные правильные точки управления $u(t)$, причем

$$t_0 \le \theta_1 \le \theta_2 \le \dots \le \theta_m < t_1,$$

а $\delta u(t, \varepsilon; \theta_i, l_i, v_i)$ игольчатая вариация управления, т.е.

$$\delta u(t, \varepsilon; \theta_i, l_i, v_i) = \begin{cases} v_i - u(t), t \in [\theta_i, \theta_i + l_i\varepsilon), \\ 0, t \in [t_0, t_1] \backslash [\theta_i, \theta_i + l_i\varepsilon). \end{cases} \qquad (20)$$

Специальное приращение $\Delta u_\varepsilon(t)$ управления $u(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{m}\delta u(t, \varepsilon; \theta_i, l_i, v_i). \qquad (21)$$

Суммирование (21) игольчатых вариаций (20) понимается в смысле, например [6, 19].

Через $\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим специальное приращение траектории $x(t)$, отвечающее приращению () управления $u(t)$.

Применяя лемму Гронуолла–Беллмана (см., например [1]) по схеме аналогичной схеме из [1], доказывается справедливость оценки

$$\|\Delta x_\varepsilon(t)\| \le L\varepsilon, t \in [t_0, t_1], \qquad (22)$$

где $L = const > 0$ некоторая постоянная.

Принимая во внимание (22), получим, что

$$\eta(\Delta u_\varepsilon) = o(\varepsilon^2).$$

Поэтому, из (17), в силу предположения об оптимальности особого управления $u(t)$, следует, что

$$S(u+\Delta u_\varepsilon)-S(u)=$$
$$=-\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_i l_j \Delta_{v_i} f'[\theta_i] K(\theta_i,\theta_j)\Delta_{v_j} f[\theta_j]+\right.$$
$$+\sum_{i=1}^{m} l_i \Delta_{v_i} H_x'[\theta_i] l_i \Delta_{v_i} f[\theta_j]+$$
$$+2\sum_{j=1}^{m} l_i F(\theta_i,\theta_j)\Delta_{v_j} f[\theta_j]+$$
$$\left.+2\sum_{j=1}^{m} l_i \Delta_{v_i} H_y'[\theta_i]\left(\sum_{j=1}^{m} l_i F(h(\theta_i),\theta_j)\Delta_{v_j} f[\theta_j]\right)\right\}+$$
$$+o(\varepsilon^2)\geq 0. \qquad (23)$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_i l_j \Delta_{v_i} f'[\theta_i] K(\theta_i,\theta_j)\Delta_{v_j} f[\theta_j]+$$
$$+\sum_{i=1}^{m} l_i \Delta_{v_i} H_x'[\theta_i] l_i \Delta_{v_i} f[\theta_j]+$$
$$+2\sum_{j=1}^{m} l_i F(\theta_i,\theta_j)\Delta_{v_j} f[\theta_j]+$$
$$+2\sum_{j=1}^{m} l_i \Delta_{v_i} H_y'[\theta_i]\left(\sum_{j=1}^{m} l_i F(h(\theta_i),\theta_j)\Delta_{v_j} f[\theta_j]\right)\leq 0, \qquad (24)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. Для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(t)$ необходимо, чтобы для любого натурального числа m неравенство (24) выполнялось для всех:

$$l_i \geq 0, v_i \in U, \theta_i \in [t_0,t_1),$$
$$i=\overline{1,m}, (t_0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_m < t_1).$$

Как видно, неравенство (23) представляет собой последовательность необходимых условий оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений. В силу произвольности m полученное необходимое условие оптимальности, носящее квадратичный характер, позволяет существенно сузить множество особых управлений, подозреваемых на оптимальность (19). Близкие результаты в случае обыкновенного дифференциального уравнения с терминальным критерием качества другими способами получены в работах [6, 7, 18] и др.

Из неравенства (24), в частности, следуют более простые и конструктивные, с точки зрения проверки, условия оптимальности. Но они оказываются менее информативными, чем (24).

Приведем некоторые из них.

Следствие 1. Вдоль особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, оптимального процесса $(u(t),x(t))$ неравенство

$$A(\theta,v)\equiv$$
$$\equiv \Delta_v f'[\theta]K(\theta,\theta)+$$
$$+\Delta_v H_x'[\theta]\Delta_v f[\theta]\leq 0 \qquad (24)$$

выполняется для всех $v\in U$ и $\theta\in[t_0,t_1]$.

Следствие 2. Если $u(t)$ особое, в смысле (19) оптимальное управление, то вдоль процесса $(u(t),x(t))$ выполняются следующие соотношения:

$$A(\theta_1,v_1)\leq 0 \;,\; A(\theta_2,v_2)\leq 0, \quad (25)$$
$$\Delta_{v_2} H_y'[\theta_2] F(h(\theta_2),\theta_1)\Delta_{v_1} f[\theta_1]+$$
$$+\Delta_{v_2} f[\theta_2] K(\theta_2,\theta_1)\Delta_{v_1} f[\theta_1]\leq$$
$$\leq\sqrt{A(\theta_1,v_1)A(\theta_2,v_2)},$$
$$\forall v_1,v_2\in U,\theta_1,\theta_2\in[t_0,t_1],(\theta_1<\theta_2). \; (26)$$

Отметим, что условия оптимальности типа (25), (26) в классе кусочно-непрерывных управлений, в случае терминального критерия качества разными способами получены в работах [2, 4] и др.

Критерий оптимальности (23) остается в силе также при вырождении условий оптимальности (25)–(26).

В заключение приведем один простой **пример:**

$$\dot{x}_1(t)=u(t),\; t\in T=[0,2],$$
$$\dot{x}_2(t)=x_1^2(t-1)-u^2(t),$$
$$x_i(t)=0, t\in[-1,0], i=1,2,$$
$$|u(t)|\leq 1, t\in[0,2],$$
$$S(u)=x_1^2(2)+x_1(2)x_2(2)\to min.$$

Нетрудно видеть, что допустимое управление $u(t)=0$ является особым, в смысле принципа максимума Понтрягина.

Ему соответствует решение $x_i(t) = 0, i = 1{,}2$ системы уравнений.

При $m = 1$ условие (25) вырождается

$$2v^2(1 - v) \le 0, \forall |v| \le 1.$$

А при $m = 2, l_1 - l_2 = 1$ условие (26) имеет вид

$$-2(v_1 + v_2)^2 - (v_1 + v_2)(v_1^2 + v_2^2) \le 0$$

и нарушается, например при $v_1 = 1, v_2 = -\frac{1}{2}$.

Следовательно, особое управление $u(t) = 0$ неоптимальное.

Список литературы

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: Либроком, 2011. 272 с.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф.М. Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Либроком, 2011. 256 с.
3. *Габасов Р.* К теории оптимальных процессов в дискретных системах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. Т. 8. С. 780–796.
4. *Срочко В.А*. Исследование второй вариации на особых управлениях // Дифференциальные уравнения. 1974. № 6.С. 1050–1066.
5. *Розоноэр Л.И.* Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем. I, II, III // Автоматика и телемеханика, 1959. № 10. С. 1441–1458.
6. *Гороховик С.Я.* Необходимые условия оптимальности в задаче с подвижным правым концом траектории // Дифференциальные уравнения. 1975. № 10. С .765–773.
7. *Гороховик В.В.* Необходимые условия оптимальности высокого порядка для задачи управления с терминальными ограничениями // ИМ АН БССР. Минск, 1982. №1(126). 50 с. (препринт).
8. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б.* Необходимые условия оптимальности второго порядка (обзор) // ИМ АН БССР. Минск, 1982. № 30(155) 48 с. (препринт).
9. *Мансимов К.Б.* Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления: автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. Баку, 1994. 42 с.
10. *Гасанов К.К., Марданов М.Д., Юсифов Б.М.* Об условиях оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием // Доклады АН Азербайджанской ССР. 1979. №12. С. 17–22.
11. *Мордухович Б.Ш.* Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. 360 с.
12. *Меликов Т.К., Марданов М.Д.* К необходимым условиям оптимальности в системах с запаздыванием // Известия АН Азербайджанской ССР. Сер. физ. техн. и мат. наук. 1979. № 6. С. 119–125.
13. *Срочко В.А.* К оптимальности особых управлений в системах с последействием // Дифференциальные уравнения. 1976. № 12. С. 1275–1278.
14. *Срочко В.А.* Техника вывода условий оптимальности в непрерывных задачах управления со свободным правым концом траектории: сб. Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск, 1976. Вып. 4. С. 145–156.
15. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во БГУ. 1973. 256 с.
16. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005. 429 с.
17. *Федоренко Р.П.* Приближенные методы решения задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 428 с.
18. *Срочко В.А.* Многоточечные условия оптимальности для особых управлений: сб. Численные методы анализа (прикладная математика). Иркутск, 1976. С. 43–50.
19. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

References

1. *Gabasov R., Kirillova F.M.* Princip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya. M.: Librokom, 2011. 272 s.
2. *Gabasov R., Kirillova F.M. Gabasov R., Kirillova F.M.* Osobye optimal'nye upravleniya. M.: Librokom, 2011. 256 s.
3. *Gabasov R.K* teorii optimal'nyh processov v diskretnyh sistemah // ZHurnal Vychis. matematiki. i mat. fiziki. 1968. T. 8. S. 780–796.
4. *Srochko V.A.* Issledovanie vtoroj variacii na osobyh upravleniyah // Differenc. uravneniya. 1974. № 6. S. 1050–1066.
5. *Rozonoer L.I.* Princip maksimuma L.S. Pontryagina v teorii optimal'nyh sistem, I, II, III. //Avtomatika i telemekhanika, 1959. №10. S. 1441–1458.

6. *Gorohovik S.YA.* Neobhodimye usloviya optimal'nosti v zadache s podvizhnym pravym koncom traektorii // Differenc. uravneniya. 1975. № 10. S. 765–773.
7. *Gorohovik V.V.* Neobhodimye usloviya optimal'nosti vysokogo poryadka dlya zadachi upravleniya s terminal'nymi ogranicheniyami // IM AN BSSSR. Minsk, 1982. № 1(126). 50 s. (preprint).
8. *Gabasov R., Kirillova F.M., Mansimov K.B.* Neobhodimye usloviya optimal'nosti vtorogo poryadka (obzor) // IM AN BSSR. Minsk, 1982. № 30(155). 48 s. (preprint).
9. *Mansimov K.B.* Neobhodimye usloviya optimal'nosti osobyh processov v zadachah optimal'nogo upravleniya: avtoref. diss. d-ra fiz.-mat. nauk. Baku, 1994. 42 s.
10. *Gasanov K.K., Mardanov M.D., YUsifov B.M.* Ob usloviyah optimal'nosti vtorogo poryadka v sistemah s zapazdyvaniem // Dokladi AN Azerb. SSR, 1979. № 12. S. 17–22.
11. *Morduhovich B.SH.* Metody approksimacij v zada-chah optimizacii i upravleniya. M.: Nauka, 1988. 360 s.
12. *Melikov T.K., Mardanov M.D.* K neobhodimym usloviyam optimal'nosti v sistemah s zapazdyvaniem // Izvestiya AN Azerb SSR, Ser. fiz. tekhn. i mat. nauk, 1979. № 6. S. 119–125.
13. *Srochko V.A.* K optimal'nosti osobyh upravlenij v sistemah s posledejstviem // Differenc. uravneniya. 1976. № 12. S. 1275–1278.
14. *Srochko V.A.* Tekhnika vyvoda uslovij optimal'nosti v nepreryvnyh zadachah upravleniya so svobodnym pravym koncom traektorii: sb. Differenc. i integral'nye uravneniya // Irkutsk, 1976. Vol. 4. S. 145–156.
15. *Gabasov R., Kirillova F.M.* Optimizaciya linejnyh sistem. Minsk: Izd-vo BGU. 1973. 256 s.
16. *Alekseev V.M., Tihomirov V.M., Fomin S.V.* Optimal'noe upravlenie. M.: Fizmatlit, 2005. 429 s.
17. *Fedorenko R.P.* Priblizhennye metody resheniya zadach optimal'nogo upravleniya. M.: Nauka, 1978. 428 s.
18. *Srochko V.A.* Mnogotochechnye usloviya optimal'nosti dlya osobyh upravlenij: sb. CHislennye metody analiza (prikladnaya matematika). Irkutsk, 1976. S. 43–50.
19. *Pontryagin L.S., Boltyanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* Matematicheskaya teoriya optimal'nyh processov. M.: Nauka, 1969. 384 s.

Просьба ссылаться на эту статью:
Мансимов К.Б. К необходимым условиям оптимальности в системах с запаздыванием // Вестник ПГУ. Математика. Механика. Информатика. 2021. № 4(55). С. 5–13. DOI: 10.17072/1993-0550-2021-4-5-13.

Please cite this article as:
Mansimov K.B. To the necessary optimality conditions in systems with delay // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2021. № 4(55). P. 5–13. DOI: 10.17072/1993-0550-2021-4-5-13.