ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2021 Математика. Механика. Информатика Вып. 4(55)

УДК 517.956

К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной точкой и одной сингулярной линией

Б. М. Шоймкулов
Таджикский национальный университет; Душанбе, Таджикистан
boitura@mail.ru; ORCID 0000-0003-4995-5716, AuthorID 827392

Рассматривается переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, ко:гда коэффициенты и правые части имеют одну сингулярную точку и одну сингулярную линию. Получению многообразия решений и исследованию краевых задач для линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа второго порядка, некоторых линейных переопределенных систем первого и второго порядка с одной и с двумя сверхсингулярными линиями и сверхсингулярными точками посвящена монография академика НАН РТ Н. Раджабова "Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами" 1992 г [6, с. 126]. Используя полученные результаты монографии Н. Раджабова, найдено многообразие решений переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной точкой и одной сингулярной линией в явном виде через три произвольных постоянных.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения; системы дифференциальных уравнений; частные производные; переопределенная; сингулярные; точка; линия*

Поступила в редакцию 30.10.2021, принята к опубликованию 30.10.2021

Of one over determined system differential equation at private derivative second order with one singular point and one singular line

B. M. Shoimkulov
Tajik State University; Dushanbe, Tajikistan
boitura@mail.ru; ORCID 0000-0003-4995-5716, AuthorID 827392

In this paper, a over determined system of second-order partial differential equations with one singular point and one singular line is investigated. A compatibility condition is found for over determined systems of second-order partial differential equations with one singular point and one singular line. If the compatibility condition is met, integral representations of the variety of solutions are found explicitly in terms of three arbitrary constants, when the singular line is in the boundaries of the domain for which initial data problems (Cauchy-type Problems) can be set. In this paper considers a redefined system of second-order partial differential equations, when the coefficients and right parts have one singular point and one singular line. Obtaining a variety of solutions and studying boundary value problems for linear differential equations of the hyperbolic type of the second order, some linear redefined systems of the first and second order with one and two supersingular lines and supersingular points is devoted to the monograph of academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan N. Rajabov – 1992 "Introduction to the theory of partial differential equations with supersingular coefficients" [6, p. 126]. Using the obtained results of The monograph of N. Rajabov, a variety of solutions of redefined systems of partial differential equations of the second order with one singular point and one singular line in an explicit form, through three arbitrary constants, was found.

Keywords*: differential equations; system differential equations; at private derivative; over determined; singular; point; line*

Received 27.09.2021, accepted 30.10.2021

DOI: 10.17072/1993-0550-2021-4-14-18

Через D обозначим прямоугольник $D=\{(x,y):0<x<a_0, 0<y<b_0\}$.

Соответственно обозначим $\Gamma_1=\{0<x<a_0, y=0\}$, $\Gamma_2=\{x=0, 0<y<b_0\}$.

В области D рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{xa_1(x,y)}{r}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{f_1(x,y)}{r} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{ya_2(x,y)}{r}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{f_2(x,y)}{r}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{a_3(x,y)}{y-x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{f_3(x,y)}{y-x} \end{cases} \quad (1)$$

где $a_j(x,y), f_j(x,y) (1\le j\le 3)$ – заданные функции класса, $C^1(D)\cap C(\overline{D})$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $u(x,y)\in C^2(D)$ – искомая функция.

Пусть в системе (1) коэффициенты и правые части удовлетворяют условиям совместности:

$$\begin{aligned} &a_1(x,y),\ f_1(x,y)\in C^1_y(\overline{D}),\\ &a_2(x,y),\ f_2(x,y)\in C^1(\overline{D}),\\ &a_3(x,y),\ f_3(x,y)\in C^1_x(\overline{D}), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{ya_2(x,y)}{r}]=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{xa_1(x,y)}{r}], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &r^2\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,y)}{r}]+ya_2(x,y)f_1(x,y)=\\ &=r^2\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_1(x,y)}{r}]+xa_1(x,y)f_2(x,y) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}[\frac{a_3(x,y)}{y-x}]+\frac{xa_1(x,y)a_3(x,y)}{(y-x)r}=\\ &=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{ya_2(x,y)}{r}]+(\frac{ya_2(x,y)}{r})^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y)}{y-x}]+\frac{a_3(x,y)f_1(x,y)}{(y-x)r}=\\ &=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_2(x,y)}{r}]+\frac{ya_2(x,y)f_2(x,y)}{r^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда, вводя новую функцию $\frac{\partial u}{\partial x}=W(x,y)$ из первых двух уравнений системы (1), получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x}=\dfrac{xa_1(x,y)}{r}W+\dfrac{f_1(x,y)}{r} \\ \dfrac{\partial W}{\partial y}=\dfrac{ya_2(x,y)}{r}W+\dfrac{f_2(x,y)}{r} \end{cases}. \quad (7)$$

Пусть функции $a_1(x,y), f_1(x,y)$ в окрестности сингулярной точки $r=0$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &|a_1(x,y)-a_1(0,0)|\le H_1 r^{\gamma_1},\\ &H_1=const>0, \gamma_1>0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$f_1(x,y)=o(r^{\gamma_2}), \gamma_2>0. \quad (9)$$

Тогда общее решение системы (7) имеет вид

$$\begin{aligned} W(x,y)=&\exp(\omega_1(x,y)+a_1(0,0)\sqrt{x^2+y^2})\cdot\\ &\cdot[\exp(\omega_2(0,y)-ya_1(0,0))(c_1+\\ &+\int_0^y\frac{f_2(0,\tau)}{\tau}\exp(-\omega_2(0,\tau))d\tau)+\\ &+\int_0^x\frac{f_1(t,0)}{\sqrt{t^2+y^2}}\exp(-\omega_1(t,y)-\\ &-a_1(0,0)\sqrt{t^2+y^2})dt], \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\omega_1(x,y)=\int_0^x\frac{t(a_1(t,y)-a_1(0,0))}{\sqrt{t^2+y^2}}dt,\quad \omega_2(0,y)=\int_0^y a_2(0,\tau)d\tau,$$

c_1 – произвольная постоянная.

Далее, учитывая $\frac{\partial u}{\partial x}=W(x,y)$ для нахождения $u(x,y)$, имеем

$$u(x,y)=\int_0^x W(t,y)dt+\varphi(y), \quad (11)$$

где $\varphi(y)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция переменного y. Дважды дифференцируя (11) по переменному y, подставляя в третье уравнение системы (1), получим условие совместности вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\{(\frac{ya_2(x,y)}{r}-\frac{\partial\omega_1(x,y)}{\partial y}-\frac{ya_1(0,0)}{r})(\varphi(y)+$$
$$+\int_0^y\frac{f_2(t,y)}{\sqrt{t^2+y^2}}\exp(-\omega_1(t,y)-a_1(0,0)\sqrt{t^2+y^2})dt)+ \quad (12)$$
$$+\frac{f_2(x,y)}{r}\exp(-\omega_1(x,y)-a_1(0,0)\sqrt{x^2+y^2}\}$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{f_1(x,y)}{r}\exp(-\omega_1(x,y)-a_1(0,0)\sqrt{x^2+y^2}).$$

Используя условие (12) учитывая (10) для нахождение произвольной функции $\varphi(y)$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\varphi(y)}{dy^2}=\frac{a_3(0,y)}{y}\exp(\omega_2(0,y))[c_1+ \quad (13)$$
$$+\int_0^y\frac{f_2(0,\tau)}{\tau}\exp(-\omega_2(0,\tau)d\tau]+\frac{f_3(0,y)}{y}$$

Дважды интегрируя (13), имеем

$$\varphi(y)=c_1\int_0^y\frac{(y-\tau)(a_3(0,\tau)e^{\omega_2(0,\tau)}-a_3(0,0))}{\tau}d\tau+$$
$$+\int_0^y\frac{(y-\tau)^2a_3(0,\tau)f_2(0,\tau)}{2\tau^2}e^{\omega_2(0,y)-\omega_2(0,\tau)}d\tau+ \quad (14)$$
$$+\int_0^y\frac{(y-\tau)(f_3(0,\tau)-f_3(0,0))}{\tau}d\tau+(c_1a_3(0,0)+$$
$$+f_3(0,0))(y\ln y-y)+c_2y+c_3.$$

Подставляя значение произвольной функции $\varphi(y)$ из (14) в (11) учитывая (10), получим

$$u(x,y)=\int_0^x\frac{f_1(t_1,y)}{\sqrt{t_1^2+y^2}}\exp(-\omega_1(t_1,y)-$$
$$-a_1(0,0)\sqrt{t_1^2+y^2})W(t_1,y)dt_1+$$
$$+c_1[\int_0^x\exp(\omega_1(t,y)+a_1(0,0)\sqrt{t^2+y^2}+ \quad (15)$$
$$+\omega_2(0,y)-ya_1(0,0))dt+$$
$$+\int_0^y\frac{(y-\tau)(a_3(0,\tau)\exp(\omega_2(0,\tau))-a_3(0,0))}{\tau}d\tau]+$$
$$+\int_0^y K(x,y,\tau)f_2(0,\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^y\frac{(y-\tau)(f_3(0,\tau)-f_3(0,0))}{\tau}d\tau+(c_1a_3(0,0)+$$
$$+f_3(0,0))(y\ln y-y)+c_2y+c_3,$$

где

$$W(t_1,y)=\int_{t_1}^x\exp(\omega_1(t_1,y)+a_1(0,0)\sqrt{t_1^2+y^2})dt_1,$$
$$K(x,y,\tau)=[\frac{1}{\tau}\int_0^x\exp(\omega_1(t,y)+$$
$$+a_1(0,0)(\sqrt{t^2+y^2}-y)dt+$$
$$+\frac{(y-\tau)^2a_3(0,\tau)}{2\tau^2}]\exp(\omega_2(0,y)-\omega_2(0,\tau)).$$

Таким образом, доказано:

Теорема. *Пусть коэффициенты и правые части системы (1), удовлетворяют условиям (2), (3), (4), (5), (6), (8), (9), (12) в области* D *. Кроме того, функции* $a_3(0,y)$, $f_2(0,y)$, $f_3(0,y)$ в окрестности точек контура Γ_2 удовлетворяют условиям

$$|a_3(0,y)\exp(\omega_2(0,y))-a_3(0,0)|\le H_2y^{\gamma_3},$$
$$H_2=const>0,\gamma_3>0,$$
$$f_2(0,y)=o(y^{\gamma_4}),\gamma_4>1,$$
$$f_3(0,y)=o[y^{\gamma_5}],\ \gamma_5>0.$$

Тогда любое решение системы (1) из класса $C^2(D)$ *представимо в виде (15), где* c_1,c_2,c_3 *– произвольные постоянные числа.*

Замечание. Решение вида (15) в окрестности сингулярной точки $r=0$ и сингулярной линии $y=x$ при выполнении всех условий теоремы ограниченно.

Список литературы

1. *Wilczynski E.J.* Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces [Текст] / E.J. Wilczynski. Leipzig:B.G. Teubner, 1906. 324 p.
2. *Appel P.* Fonctons hypergeometriges of hyperspheriges Polynomes d'Hermite [Текст] / P. Appel, M.J. Kampe de Feriet. Paris: Gauthier-Villars. 1926. 434 p.
3. *Архутик Г.М.* Регулярная особая точка линейных уравнений в полных дифференциалах высших порядков // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1979. № 3. С. 46–54.
4. *Михайлов Л.Г.* Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. Душанбе: Дониш, 1986. 116 с.
5. *Begehr H.* Transformations, transmutations and kernel functions [Текст] / H. Begehr, R.P. Gilbert. Vol. 2. Harlow: Longman, 1993. 268 p.
6. *Раджабов Н.* Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами: учеб. пособие по спецкурсу. Душанбе, 1992. 236 с.
7. *Раджабов Н.* Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями // Душанбе: изд-во ТГУ. Ч. № I, 1980. 126 с.; ч. № II, 1981. 170 с.; ч. № III, 1982. 170 с.

8. *Зайцев М.Л., Аккерман В.Б.* Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики // Вестник ВГУ. Серия: физика. Математика. 2015. № 2. 527 с.
9. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
10. *Пиров Р.* Исследование некоторых нелинейных систем уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией на плоскости // Крайові задачі для диференціалних рівнянь. Чернівці: Прут, 2006. Вып. 14. С. 313–320.
11. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
12. *Бровко Г.Л.* Необходимые и достаточные условия однородно-простой деформации // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. С. 701–710.
13. *Ленская С.Э.* О неоднородно-простых процессах // Вестник Московского университета. Сер. Математика, механика. 1988. №1. С. 100–103.
14. *Пиров Р.* Об одной переопределенной системе уравнений в частных производных второго порядка. Душанбе, 1989. 15 с. Деп. в Тадж. НИИНТИ 19.06.89. № 22(622).
15. *Шоймкулов Б.М., Рузметов Э.* К теории некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками на плоскости // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения: сб. науч. статей. ТГПУ. Душанбе, 1998. Вып. 6. С. 96–106.
16. *Шоймкулов Б.М., Раджабов Н.* Линейная переопределенная система второго порядка с одной сингулярной точкой // Вестник национального университета (серия естественных наук). Душанбе: ТГНУ "Сино". 2005. № 3(26). С. 3–10.
17. *Шоймкулов Б.М., Раджабов Н., Комилов А.О.* Интегральные представления многообразия решений для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с тремя сверхсингулярными областями // Вестник Таджикского национального университета (науч. журн.), серия естественных наук. Душанбе. 2017. № ½. С. 3–7.
18. *Шоймкулов Б.М.* К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией и двумя сверхсингулярными линиями // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. Душанбе. 2018. № 3. С. 32–43.
19. *Шоймкулов Б.М.* Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сверхсингулярной и одной сингулярной плоскостью в трехмерном пространстве // Электронный инновационный вестник: междунар. период. журн. науч. тр. Бугульма. 2019. № 6. С. 4–12.
20. *Шоймкулов Б.М.* Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и двумя сверхсингулярными точками // Матер. междунар. науч. конф. "Современные проблемы естественных и гуманитарных наук и их роль в укреплении научных связей между странами", посвящ. 10-летию Филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе (10–11 октября). Душанбе, 2019. С. 79–82.
21. *Шоймкулов Б.М.* Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и одной сверхсингулярной точкой // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. № 3 (50). С. 17–23.

References

1. *Wilczynski E.J.* Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces [Tekst] / E.J. Wilczynski. Leipzig:B.G. Teubner, 1906. 324 p.
2. *Appel P.* Fonctons hypergeometriges of hyperspheriges Polynomes d’Hermite [Tekst] / P. Appel, M.J. Kampe de Feriet. Paris: Gauthier-Villars. 1926. 434 p.
3. *Arhutik G.M.* Regulyarnaya osobaya tochka linejnyh uravnenij v polnyh differencialah vysshih poryadkov // Izv.AN BSSR. Ser. fiz.-mat. nauk. 1979. № 3. S. 46–54.
4. *Mihajlov L.G.* Nekotorye pereopredelennye sistemy uravnenij v chastnyh proizvodnyh s dvumya neizvestnymi funkciyami. Dushanbe: Donish, 1986. 116 s.
5. *Begehr H.* Transformations, transmutations and kernel functions [Tekst] / H. Begehr, R.P. Gilbert. Vol. 2. Harlow: Longman, 1993. 268 p.
6. *Radzhabov N.* Vvedenie v teoriyu differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh so sverhsingulyarnymi koefficientami: ucheb. posobie po speckursu. Dushanbe, 1992. 236 s.

7. *Radzhabov N.* Integral'nye predstavleniya i granichnye zadachi dlya nekotoryh differencial'nyh uravnenij s singulyarnoj liniej ili singulyarnymi poverhnostyami // Dushanbe, izd. TGU. Ch. № I, 1980. 126 s.; ch. № II, 1981. 170 s.; ch. № III,1982. 170 s.
8. *Zajcev M.L., Akkerman V.B.* Gipoteza ob uproshchenii pereopredelennyh sistem differencial'nyh uravnenij i ee primenenie k uravneniyam gidrodinamiki // Vestnik VGU. Seriya: fizika. Matematika. 2015. №. 2. 527 s.
9. *Kurant R.* Uravneniya s chastnymi proizvodnymi / R.Kurant. M.: Mir, 1964. 830 s.
10. *Pirov R.* Issledovanie nekotoryh nelinejnyh sistem uravnenij v chastnyh proizvodnyh vtorogo poryadka s odnoj neizvestnoj funkciej na ploskosti // Krajovi zadachi dlya diferencialnih rivnyan'. CHernivci: Prut, 2006. Vyp. 14. S. 313–320.
11. *Hartman F.* Obyknovennye differencial'nye uravneniya. M.: Mir, 1970. 720 s.
12. *Brovko G.L.* Neobhodimye i dostatochnye usloviya odnorodno-prostoj deformacii // Prikl. matem. i mekhanika. 1978. T. 42. S. 701–710.
13. *Lenskaya S.E.* O neodnorodno-prostyh processah // Vestn. Mosk. un-ta. Ser. Matem., mekhanika. 1988. № 1. S. 100–103.
14. *Pirov R.* Ob odnoj pereopredelennoj sisteme uravnenij v chastnyh proizvodnyh vtorogo poryadka. Dushanbe, 1989. 15 s. Dep. v Tadzh. NIINTI 19.06.89. № 22(622).
15. *SHojmkulov B.M., Ruzmetov E.* K teorii nekotoryh pereopredelennyh sistem uravnenij v chastnyh proizvodnyh vtorogo poryadka s singulyarnymi tochkami na ploskosti // Differencial'nye i integral'nye uravneniya i ih prilozheniya (sbornik nauchnyh statej), TGPU, vyp.6. Dushanbe, 1998. S. 96–106.
16. *SHojmkulov B.M., Radzhabov N.* Linejnaya pereopredelennaya sistema vtorogo poryadka s odnoj singulyarnoj tochkoj // Vestnik Nacional'nogo Universiteta (seriya estestvennyh nauk), № 3(26). Dushanbe: TGNU "Sino". 2005. Вып. 6. S. 3–10.
17. *SHojmkulov B.M., Radzhabov N., Komilov A.O.* Integral'nye predstavleniya mnogoobraziya reshenij dlya odnogo klassa differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh tret'ego poryadka s tremya sverhsingulyarnymi oblastyami // Vestnik Tadzhikskogo nacional'nogo universiteta, № 1/2, (nauchnyj zhurnal), seriya estestvennyh nauk, Dushanbe. 2017. S. 3–7.
18. *SHojmkulov B.M.* K teorii pereopredelennyh sistem differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh vtorogo poryadka s odnoj singulyarnoj liniej i dvumya sverh singulyarnymi liniyami // Vestnik Tadzhikskogo nacional'nogo universiteta. Seriya estestvennyh nauk, № 3. Dushanbe. 2018. S. 32–43.
19. *SHojmkulov B.M.* Pereopredelennaya sistema differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh pervogo poryadka s odnoj sverh - singulyarnoj i odnoj singulyarnoj ploskost'yu v trekhmernom prostranstve // Elektronnyj innovacionnyj vestnik. Mezhdunarodnyj periodicheskij zhurnal nauchnyh trudov, № 6. Bugul'ma. 2019. S. 4–12.
20. *SHojmkulov B.M.* Pereopredelennaya sistema differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh pervogo poryadka s odnoj singulyarnoj i dvumya sverhsingulyarnymi tochkami // Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii "Sovremennye problemy estestvennyh i gumanitarnyh nauk i ih rol' v ukreplenii nauchnyh svyazej mezhdu stranami", posvyash. 10-letiyu Filiala MGU imeni M.V. Lomonosova v g. Dushanbe (10–11 oktyabrya), Dushanbe. 2019. S. 79–82.
21. *SHojmkulov B.M.* Pereopredelennaya Sistema Differencial'nyh Uravnenij V CHastnyh Proizvodnyh Pervogo Poryadka S Odnoj Singulyarnoj I Odnoj Sverhsingulyarnoj Tochkoj // Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika. 2020. №3(50). S. 17–23.

Просьба ссылаться на эту статью:
Шоймкулов Б.М. К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной точкой и одной сингулярной линией // Вестник ПГУ. Математика. Механика. Информатика. 2021. № 4(55). С. 14–18. DOI: 10.17072/1993-0550-2021-4-14-18.

Please cite this article as:
Shoimkulov B.M. Of one over determined system differential equation at private derivative second order with one singular point and one singular line // Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2021. № 4(55). P. 14–18. DOI: 10.17072/1993-0550-2021-4-14-18.