

УДК 519.7

Оптимальное управление реактивным снарядом по критерию "минимум силы"

С. В. Лутманов

Пермский национальный исследовательский государственный университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
mru@psu.ru; 8(342)239-63-75

Решается задача оптимального управления реактивным снарядом по его доставке из заданного начального положения в заданное конечное положение с учетом силы сопротивления воздуха. Движение снаряда описывается векторным дифференциальным уравнением И.В. Мещерского. Критерий качества управления взят в форме "минимум силы" [4], минимизация которого обеспечивает минимальные перегрузки для снаряда. Рассмотрены три вида нормы вектора управляющей силы. Для каждого из них получено оптимальное управление, решающее поставленную задачу. Проведен анализ результатов численного эксперимента, подтверждающий общие теоретические положения.

Ключевые слова: математическое моделирование; оптимизация; управление; минимизация функционала; уравнение И.В. Мещерского; программное управление; критерий качества.

DOI: 10.17072/1993-0550-2021-3-42-51

1. Постановка задачи

Задача наведения на целевое множество рассматривалась и решалась многими авторами, например [2], [3], [5], [9], [10], [11], [16]. При этом управляемое тело могло испытывать сопротивление среды [12], [14]. Часто задача наведения дополняется требованием оптимальности управления по тому или иному критерию качества [1], [12], [13], [14], [15], [16]. В настоящей работе исследования опираются на подход, развитый в монографии [4], состоящий в сведении задачи теории оптимального управления к функциональной проблеме моментов. В работе используются алгоритмы построения оптимальных управлений, представленные в учебном пособии [6].

В работе [7] автором была рассмотрена задача оптимального управления реактивным снарядом по его доставке из заданного начального положения в заданное конечное положение.

Полет реактивного снаряда происходит в однородном поле тяжести (см. рис. 1) в верхних слоях атмосферы.

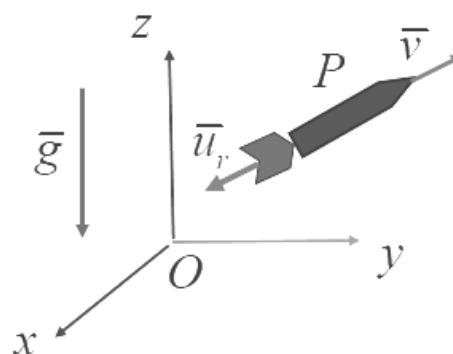


Рис. 1

В процессе движения снаряд испытывает сопротивление среды, являющееся линейной функцией координат его вектора скорости. Динамика полета снаряда описывается векторным дифференциальным уравнением И.В. Мещерского [8]:

$$M \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F}^{(c)} + \frac{dM}{dt} \bar{u}_r + M \bar{g}, \quad (1.1)$$

где

t – текущее время;
 M – масса снаряда;

$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – радиус-вектор снаряда;

$\bar{F}^{(c)} = \begin{pmatrix} F_x^{(c)} \\ F_y^{(c)} \\ F_z^{(c)} \end{pmatrix}$ – вектор силы сопротивления,

действующая на снаряд;

$\bar{u}_r = \begin{pmatrix} u_{rx} \\ u_{ry} \\ u_{rz} \end{pmatrix}$ – вектор относительной скорости

истечения газов;

$\bar{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ – вектор ускорения силы тяжести.

После проецирования векторного уравнения (1.1) на оси координат $Oxyz$ и нормализации дифференциальных уравнений было получено

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4, \\ \dot{x}_2 &= x_5, \\ \dot{x}_3 &= x_6, \\ \dot{x}_4 &= -\frac{d_{11}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_4 - \frac{d_{12}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_5 - \\ & - \frac{d_{13}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_6 + u_1, \\ \dot{x}_5 &= -\frac{d_{21}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_4 - \frac{d_{22}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_5 - \\ & - \frac{d_{23}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_6 + u_2, \\ \dot{x}_6 &= -\frac{d_{31}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_4 - \frac{d_{32}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_5 - \\ & - \frac{d_{33}}{m_0 e^{-\alpha t}} x_6 - g + u_3. \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_6 \end{pmatrix} \in R^6$ – фазовый вектор объекта;

$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$ – матрица размера

3×3 коэффициентов сопротивления;

α – коэффициент, характеризующий закон сгорания топлива;

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ – вектор управляющих воз-

действий.

Управление снарядом происходит на промежутке времени $[t_0, T]$. Начальное по-

ложение $x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \dots \\ x_{60} \end{pmatrix} \in R^6$ и конечное положе-

ние $x_T = \begin{pmatrix} x_T \\ \dots \\ x_T \end{pmatrix} \in R^6$ снаряда считаются задан-

ными. Перевод снаряда из начального положения в конечное производится с помощью программного управления $u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$, где $\Pi[t_0, T]$ – множество интегрируемых на промежутке $[t_0, T]$ 3-мерных вектор-функций. При этом искомое управление $u^0(\cdot)$ должно выделяться среди всех управлений, осуществляющих указанный перевод, тем, что оно минимизирует некоторый критерий качества I , определенный на множестве программных управлений $\Pi[t_0, T]$.

В работе [5] оптимизация производилась по критерию

$$I[u(\cdot)] = \left[\int_{t_0}^T \langle u(\tau), u(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\int_{t_0}^T (u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau)) d\tau} \rightarrow \min,$$

который в литературе [4] носит название "минимум энергии".

В настоящей работе оптимизация производится по критерию "минимум силы" [4].

2. Критерий качества "минимум силы"

Физический смысл критерия "минимум силы" состоит в минимизации максимальной величины управляющей силы за все время процесса управления. В результате достигается минимизация максимальных перегрузок снаряда во время полета. В статье приводятся три варианта трактовки понятия "величина

$$\text{управляющей силы } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}."$$

В первом варианте это евклидова норма вектора $u \in R^3$. Тогда

$$\begin{aligned} I^{\|\cdot\|_1} [u(\cdot)] &= \max_{t \in [t_0, T]} \|u(\tau)\|_1 = \\ &= \max_{t \in [t_0, T]} \sqrt{(u_1(t))^2 + (u_2(t))^2 + (u_3(t))^2}. \end{aligned}$$

Во втором варианте это сумма модулей компонентов проекций вектора управляющей силы. Тогда

$$\begin{aligned} I^{\|\cdot\|_2} [u(\cdot)] &= \max_{t \in [t_0, T]} \|u(\tau)\|_2 = \\ &= \max_{t \in [t_0, T]} (|u_1(t)| + |u_2(t)| + |u_3(t)|). \end{aligned}$$

В третьем варианте это максимальный модуль из всех компонентов проекций вектора управляющей силы. Тогда

$$\begin{aligned} I^{\|\cdot\|_3} [u(\cdot)] &= \max_{t \in [t_0, T]} \|u(\tau)\|_3 = \\ &= \max_{t \in [t_0, T]} \max \{|u_1(t)|, |u_2(t)|, |u_3(t)|\}. \end{aligned}$$

Замечание 1. Во всех рассмотренных вариантах критерий "минимум силы" удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) $I^{\|\cdot\|} [u(\cdot)] \geq 0, u(\cdot) \in \Pi[t_0, T],$
- 2) $I^{\|\cdot\|} [u^{(1)}(\cdot) + u^{(2)}(\cdot)] \leq I^{\|\cdot\|} [u^{(1)}(\cdot)] + I^{\|\cdot\|} [u^{(2)}(\cdot)], u^{(1)}(\cdot), u^{(2)}(\cdot) \in \Pi[t_0, T],$
- 3) $I_{сил} I^{\|\cdot\|} [\lambda u(\cdot)] = |\lambda| I^{\|\cdot\|} [u(\cdot)],$
 $u(\cdot) \in \Pi[t_0, T], \lambda \in R^1$

Из замечания 1 следует, что критерий "минимум силы" можно трактовать как норму на линейном пространстве программных

управлений $\Pi[t_0, T]$. Поставим задачу оптимального управления снарядом о его переводе из начального положения в конечное по критерию "минимум силы".

Задача 1. Определить программное управление $u^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$, для которого движение $x(\cdot, t_0, x_0, u^0(\cdot))$ динамического объекта (1.2), порожденное этим управлением, удовлетворяет равенству

$$x(T, t_0, x_0, u^0(\cdot)) = x_T, \quad (2.1)$$

и среди других управлений $u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$, удовлетворяющих условию (2.1), выделяется тем, что минимизирует величину $I^{\|\cdot\|} [u(\cdot)]$.

3. Алгоритм решения задачи 1

Следуя монографии [4], изложим алгоритм решения задачи 1, состоящий из трех этапов. Предварительно вычисляются

$$\begin{aligned} X[t, \tau] &= \begin{pmatrix} x_{11}[t, \tau] & \cdots & x_{16}[t, \tau] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{61}[t, \tau] & \cdots & x_{66}[t, \tau] \end{pmatrix}, \\ & t, \tau \in [t_0, T] - \end{aligned}$$

фундаментальная матрица Коши размера 6×6 для однородной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4, \\ \dot{x}_2 &= x_5, \\ \dot{x}_3 &= x_6, \\ \dot{x}_4 &= -\frac{d_{11}}{m_0 e^{-at}} x_4 - \frac{d_{12}}{m_0 e^{-at}} x_5 - \frac{d_{13}}{m_0 e^{-at}} x_6, \\ \dot{x}_5 &= -\frac{d_{21}}{m_0 e^{-at}} x_4 - \frac{d_{22}}{m_0 e^{-at}} x_5 - \frac{d_{23}}{m_0 e^{-at}} x_6, \\ \dot{x}_6 &= -\frac{d_{31}}{m_0 e^{-at}} x_4 - \frac{d_{32}}{m_0 e^{-at}} x_5 - \frac{d_{33}}{m_0 e^{-at}} x_6, \end{aligned}$$

$$H(t) = X[T, t] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & h_{13}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{61}(t) & h_{62}(t) & h_{63}(t) \end{pmatrix}, t \in [t_0, T] -$$

матрица перехода размера 6×3 ,

$$c = x_T - X[T, t_0]x_0 -$$

$$- \int_{t_0}^T X[T, \tau] \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ -g \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_6 \end{pmatrix} -$$

шестимерный вектор констант, зависящий от начального и конечного положения снаряда.

На первом этапе посредством формулы

$$\|h(\cdot)\| = \max_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]} \int_{t_0}^T \langle h(t), u(t) \rangle d\tau, \quad (3.1)$$

$$I^{\|} [u(\cdot)] \leq 1$$

вводится норма на линейном пространстве $\Omega[t_0, T]$ 3-мерных вектор-функций

$$h(\cdot) = \begin{pmatrix} h_1(\cdot) \\ h_2(\cdot) \\ h_3(\cdot) \end{pmatrix}. \text{ В силу замечания 1 формула}$$

(3.1) действительно определяет норму на пространстве $\Omega[t_0, T]$. При этом естественная норма в сопряженном пространстве $\Omega^*[t_0, T]$ линейных функционалов, определенных на $\Omega[t_0, T]$, будет совпадать с $I^{\|} [\cdot]$ [4].

В дальнейшем пространство $\Omega[t_0, T]$, с введенной на нем нормой по формуле (3.1), будем называть основным.

На втором этапе вводится обозначение

$$h^{[i]}(\cdot) = \begin{pmatrix} h_{i1}(\cdot) \\ h_{i2}(\cdot) \\ h_{i3}(\cdot) \end{pmatrix} \in \Omega[t_0, T], i \in \{1, \dots, 6\}$$

для 3-мерной вектор-функции, компоненты которой совпадают с компонентами соответствующей строки матрицы перехода.

В основном пространстве $\Omega[t_0, T]$ строится гиперплоскость

$$Q = \left\{ h(\cdot) = \sum_{i=1}^6 l_i h^{[i]}(\cdot) \mid \sum_{i=1}^6 l_i c_i = 1 \right\}$$

и определяется элемент $h^0(\cdot) \in Q$ из условия

$$\|h^0(\cdot)\| = \min_{h(\cdot) \in Q} \|h(\cdot)\|,$$

в котором норма $\|\cdot\|$ определяется по формуле (3.1). Очевидно, что

$$h^0(\cdot) = \sum_{i=1}^6 l_i^0 h^{[i]}(\cdot),$$

где набор чисел l_1^0, \dots, l_6^0 является решением задачи математического программирования

$$\left\| \sum_{i=1}^6 l_i h^{[i]}(\cdot) \right\| \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^6 l_i c_i = 1$$

В дальнейшем элемент $h^0(\cdot) \in Q$ будем называть "минимальным", а его норму обозначать символом

$$\rho^0 = \|h^0(\cdot)\|.$$

На третьем этапе, в соответствии с принципом максимина Н.Н. Красовского [4], оптимальное программное управление $u^0(\cdot)$ определяется из условия максимизации линейного функционала

$$\varphi_u [h(\cdot)] = \int_{t_0}^T \langle h(t), u(t) \rangle dt \quad h(\cdot) \in \Omega[t_0, T]$$

на "минимальном" элементе $h^0(\cdot) \in Q$ в предположении, что $I^{\|} [u(\cdot)] = \frac{1}{\rho^0}$.

Для проведения численных экспериментов, иллюстрирующих реализацию приведенного алгоритма решения задачи 1, принимается

$$m_0 = 100 \text{ кг}, t_0 = 0, T = 10 \text{ сек},$$

$$\alpha = \frac{\ln 2}{10} = 0.069314,$$

$$D = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \\ x_{50} \\ x_{60} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \text{ м} \\ 0 \text{ м} \\ 0 \text{ м} \\ 0 \text{ м} \\ 0 \text{ м} \\ 0 \text{ м} \end{pmatrix}, \quad x(T) = x_T = \begin{pmatrix} 1000 \text{ м} \\ 1000 \text{ м} \\ 100 \text{ м} \\ 0 \frac{\text{м}}{\text{сек}} \\ 0 \frac{\text{м}}{\text{сек}} \\ 0 \frac{\text{м}}{\text{сек}} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим последовательно все три случая трактовки понятия "величина управляющей силы u "

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

4. Эвклидова норма вектора $u \in R^3$ управляющей силы

Задача (3.1) здесь принимает вид

$$\int_{t_0}^T \langle u(t), h(t) \rangle d\tau \rightarrow \max, \quad (4.1)$$

$$I^{\text{нл}} [u(\cdot)] = \max_{t \in [t_0, T]} \sqrt{\langle u(t), u(t) \rangle} \leq 1$$

Максимум интеграла в (4.1) достигается, когда подынтегральная функция принимает максимальное значение всюду на промежутке $[t_0, T]$. Максимальное значение этой функции можно получить, решив следующую задачу математического программирования:

$$\langle u(t), h(t) \rangle \rightarrow \max, \quad \langle u(t), u(t) \rangle = 1, \quad (4.2)$$

$$t \in [t_0, T]$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$L(u, \lambda) = \langle u, h \rangle + \lambda (\langle u, u \rangle - 1), \quad u, h \in R^3.$$

Выпишем условия оптимальности в задаче математического программирования (4.2):

$$\frac{\partial}{\partial u} L(u, \lambda) = 0, \quad \langle u, u \rangle = 1, \quad \lambda \leq 0 \Rightarrow$$

$$h + 2\lambda u = 0 \Rightarrow u^0 = -\frac{h}{2\lambda},$$

$$\langle u^0, u^0 \rangle = 1 \Rightarrow \left\langle -\frac{h}{2\lambda}, -\frac{h}{2\lambda} \right\rangle = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} \langle h, h \rangle = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{\langle h, h \rangle}{4} \Rightarrow$$

$$\lambda \leq 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{\sqrt{\langle h, h \rangle}}{2} \Rightarrow u^0 = \frac{h}{\sqrt{\langle h, h \rangle}},$$

$$\langle u^0, h \rangle = \left\langle \frac{h}{\sqrt{\langle h, h \rangle}}, h \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\langle h, h \rangle}} \langle h, h \rangle = \langle h, h \rangle.$$

Таким образом, максимальным значением целевой функции в (4.2) служит величи-

на $\sqrt{\langle h, h \rangle}$. Тогда норма на пространстве $\Omega[t_0, T]$ определяется формулой

$$\|h(\cdot)\| = \int_{t_0}^T \sqrt{\langle h(t), h(t) \rangle} dt, \quad (4.3)$$

$$h(\cdot) \in \Omega[t_0, T].$$

Задача математического программирования по определению "минимального" элемента $h^0(\cdot) \in Q$ в силу (4.3) здесь имеет вид

$$\int_{t_0}^T \sqrt{\left\langle \sum_{i=1}^6 l_i h^{[i]}(\tau), \sum_{i=1}^6 l_i h^{[i]}(\tau) \right\rangle} d\tau \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^6 l_i c_i = 1.$$

Пусть вектор $l^0 = \begin{pmatrix} l_1^0 \\ \dots \\ l_6^0 \end{pmatrix}$ – решение этой

задачи.

Тогда "минимальный" элемент и его норма вычисляются по формулам

$$h^0(\cdot) = \sum_{i=1}^6 l_i^0 h^{[i]}(\cdot), \quad \rho^0 = \int_{t_0}^T \langle h^0(t), h^0(t) \rangle dt$$

соответственно.

Непосредственное построение оптимального управления $u^0(\cdot)$ сводится к следующей задаче на максимум:

$$\int_{t_0}^T \langle u(t), h^0(t) \rangle dt \rightarrow \max,$$

$$\max_{t \in [t_0, T]} \sqrt{\langle u(t), u(t) \rangle} = \frac{1}{\rho^0}.$$

Ее решение, как и выше, сводится к максимизации в каждый момент $t \in [t_0, T]$ подынтегральной функции $\langle u(t), h^0(t) \rangle$ при ограничении

$$\langle u(t), u(t) \rangle = \frac{1}{(\rho^0)^2}.$$

Тогда

$$u^0(\tau) = \frac{1}{\rho^0} \cdot \frac{h^0(\tau)}{\sqrt{\langle h^0(\tau), h^0(\tau) \rangle}},$$

$$\tau \in [t_0, T]$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (u^0(\tau))^2 &= \langle u^0(\tau), u^0(\tau) \rangle = \\ &= \frac{1}{(\rho^0)^2} \frac{\langle h^0(\tau), h^0(\tau) \rangle}{\left(\sqrt{\langle h^0(\tau), h^0(\tau) \rangle}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{(\rho^0)^2} = const, \quad \tau \in [t_0, T]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Равенство (4.4) означает, что вектор оптимальных управляющих параметров постоянен по длине.

Ниже на рис. 2–4 приводятся графики изменения координат вектора управляющих параметров, а на рис. 5 – его евклидовой нормы

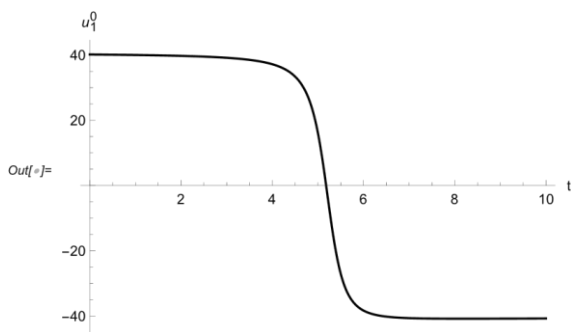


Рис. 2

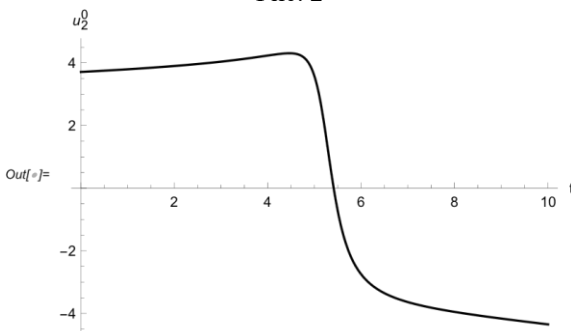


Рис. 3

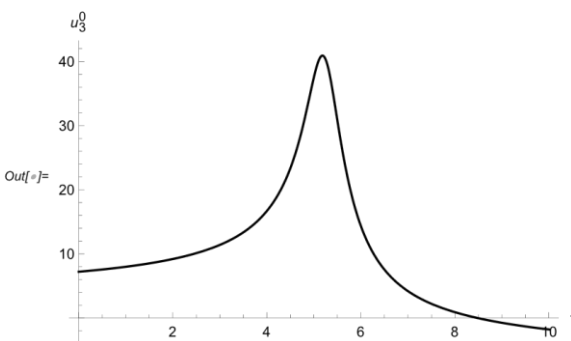


Рис. 4

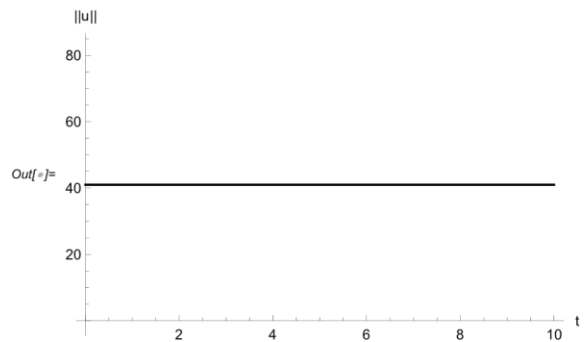


Рис. 5

Из приведенных графиков видно, что компоненты оптимального вектора управляющих параметров меняются в течение времени непрерывно. Переключения отсутствуют. При этом, как это и должно следовать из (4.4), евклидова норма вектора управляющих параметров действительно остается постоянной.

5. Сумма абсолютных величин компонент вектора $u \in R^3$ управляющей силы

Задача (3.1) здесь принимает вид

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^T \langle u(t), h(t) \rangle dt = \\ &= \int_{t_0}^T \left\langle \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt = \\ &= \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^3 u_i(t) h_i(t) dt \rightarrow \max, \end{aligned}$$

$$I^{\|h\|} [u(\cdot)] = \max_{t \in [t_0, T]} \sum_{i=1}^3 |u_i(t)| \leq 1. \quad (5.1)$$

Максимум интеграла в (5.1) достигается, когда для всех $t \in [t_0, T]$ выполнено равенство.

$$u_i(t) = \begin{cases} \text{sign}[h_i(t)], & i = i^*, \\ 0 & i \neq i^* \end{cases}$$

$$|h_{i^*}(t)| = \max_{i \in \{1,2,3\}} |h_i(t)|.$$

Тогда

$$\|h(\cdot)\| = \int_{t_0}^T \max \{|h_1(t)|, |h_2(t)|, |h_3(t)|\} dt, \quad (5.2)$$

$$h(\cdot) \in \Omega[t_0, T].$$

Задача математического программирования по определению "минимального" элемента $h^0(\cdot) \in Q$ в силу (5.2) здесь имеет вид

$$\int_{t_0}^{T_1} \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^6 l_i h_{i1}(t) \right|, \left| \sum_{i=1}^6 l_i h_{i2}(t) \right|, \left| \sum_{i=1}^6 l_i h_{i3}(t) \right| \right\} dt \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^6 l_i c_i = 1.$$

Пусть вектор $l^0 = \begin{pmatrix} l_1^0 \\ \dots \\ l_6^0 \end{pmatrix}$ — решение этой задачи.

Тогда "минимальный" элемент и его норма вычисляются по формулам

$$h^0(\cdot) = \sum_{i=1}^6 l_i^0 h^{[i]}(\cdot), \quad \rho^0 = \int_{t_0}^T \langle h^0(t), h^0(t) \rangle dt$$

соответственно.

Непосредственное построение оптимального управления $u^0(\cdot)$ сводится к следующей задаче на максимум:

$$\int_{t_0}^T \langle u(t), h^0(t) \rangle dt = \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^3 u_i(t) h_i^0(t) dt \rightarrow \max,$$

$$\int_{t_0}^{T_1} \max \{ |u_1(t)|, |u_2(t)|, |u_3(t)| \} dt = \frac{1}{\rho^0}.$$

Тогда

$$u_i^0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\rho^0} \text{sign}[h_i(t)], & i = i^*, \\ 0 & i \neq i^*, \end{cases}$$

$$i^* : |h_{i^*}(t)| = \max_{i \in \{1,2,3\}} |h_i(t)|, \quad i \in \{1,2,3\}. \quad (5.2)$$

Ниже на рис. 6–8 приводятся графики изменения координат вектора управляющих параметров, а на рис. 9 – его евклидовой нормы

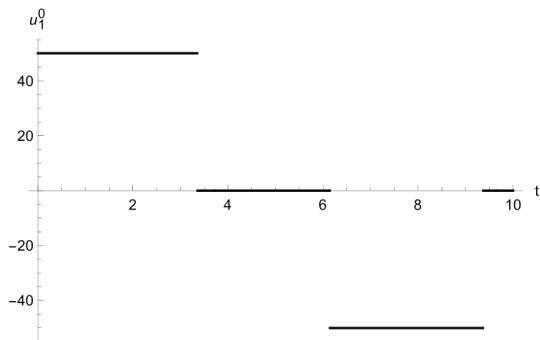


Рис. 6

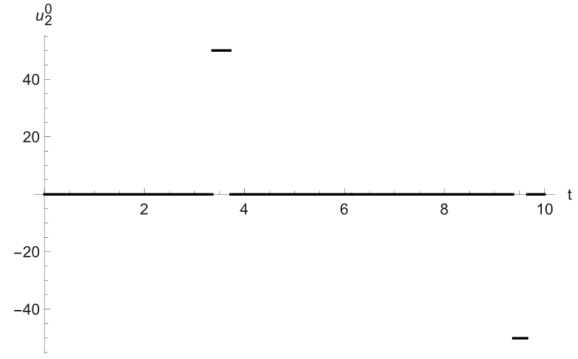


Рис. 7

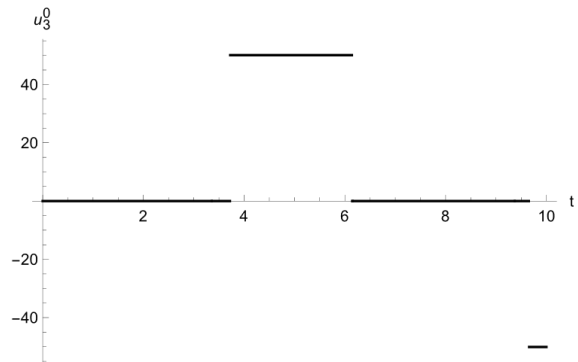


Рис. 8

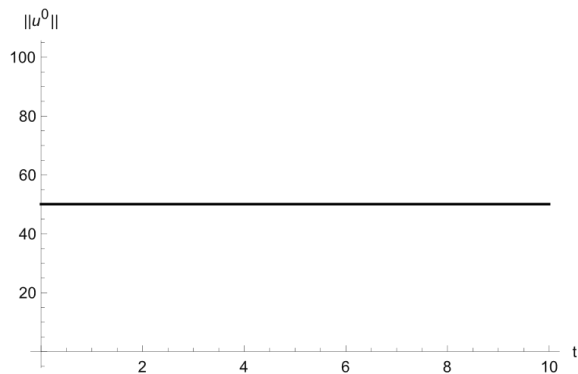


Рис. 9

Из приведенных графиков видно, что компоненты оптимального вектора управляющих параметров кусочно-постоянны.

При этом в те моменты времени, в которые одна из компонент отлична от нуля, остальные, как это и должно следовать из (5.2), обращаются в ноль.

Заметим, что евклидова норма вектора управляющих параметров остается постоянной в течение всего процесса управления.

6. Максимальный модуль компонент проекций вектора $u \in R^3$ управляющей силы

Задача (3.1) здесь принимает вид

$$\int_{t_0}^T \langle u(t), h(t) \rangle dt = \int_{t_0}^T \left\langle \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt =$$

$$= \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^3 u_i(t) h_i(t) dt \rightarrow \max,$$

$$I^{\| \cdot \|_3} [u(\cdot)] =$$

$$= \max_{t \in [t_0, T]} \{ |u_1(t)|, |u_2(t)|, |u_3(t)| \} \leq 1. \quad (6.1)$$

Максимум интеграла в (6.1) достигается, когда для всех $t \in [t_0, T]$ выполнено равенство

$$u_i(t) = \text{sign}[h_i(t)], i \in \{1, 2, 3\}.$$

Тогда $\|h(\cdot)\| =$

$$= \int_{t_0}^{T_1} (|h_1(\tau)| + |h_2(\tau)| + |h_3(\tau)|) d\tau. \quad (6.2)$$

Задача математического программирования по определению "минимального" элемента $h^0(\cdot) \in Q$ в силу (6.2) здесь имеет вид

$$\int_{t_0}^{T_1} \left(\left| \sum_{i=1}^6 l_i h_{i1}(t) \right| + \left| \sum_{i=1}^6 l_i h_{i2}(t) \right| + \left| \sum_{i=1}^6 l_i h_{i3}(t) \right| \right) dt \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^6 l_i c_i = 1.$$

Пусть вектор $l^0 = \begin{pmatrix} l_1^0 \\ \dots \\ l_6^0 \end{pmatrix}$ – решение этой

задачи. Тогда "минимальный" элемент и его норма вычисляются по формулам

$$h^0(\cdot) = \sum_{i=1}^6 l_i^0 h^{[i]}(\cdot), \quad \rho^0 = \int_{t_0}^T \langle h^0(t), h^0(t) \rangle dt$$

соответственно.

Непосредственное построение оптимального управления $u^0(\cdot)$ сводится к следующей задаче на максимум:

$$\int_{t_0}^T \langle u(t), h^0(t) \rangle dt = \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^3 u_i(t) h_i^0(t) dt \rightarrow \max,$$

$$\max_{t \in [t_0, T]} (|u_1(t)| + |u_2(t)| + |u_3(t)|) = \frac{1}{\rho^0}.$$

Тогда

$$u_i^0(t) = \frac{1}{\rho^0} \text{sign}[h_i^0(t)], \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Ниже на рис. 10–12 приводятся графики изменения координат вектора управляющих параметров, а на рис. 13 – его евклидовой нормы

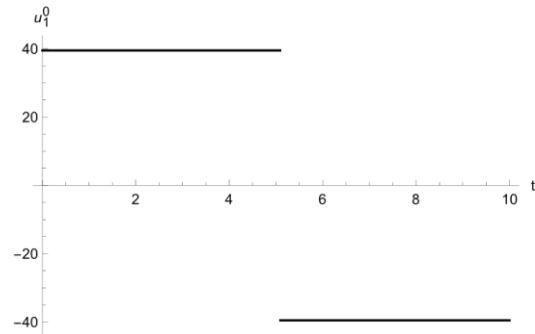


Рис. 10

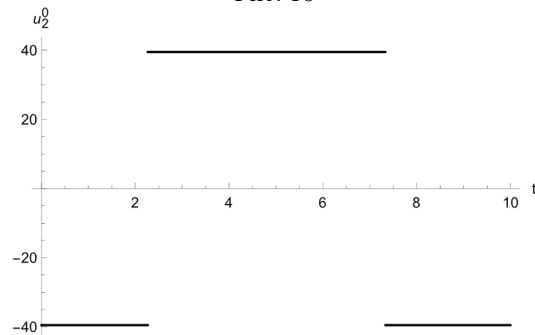


Рис. 11

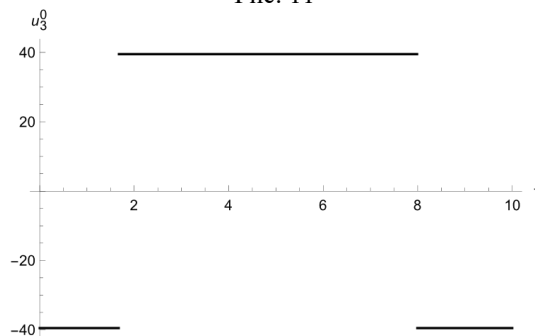


Рис. 12

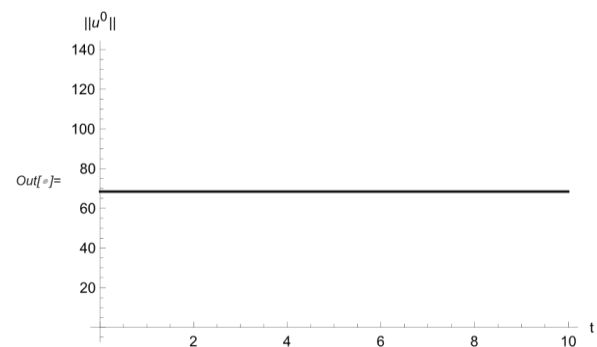


Рис. 13

Из приведенных графиков видно, что компоненты оптимального вектора управляющих параметров кусочно-постоянны. При этом евклидова норма вектора управляющих параметров остается постоянной в течение всего процесса управления.

6. Сравнительный анализ результатов управления для различных траектовок максимальной величины управляющей силы

В таблице приведены значения критериев качества управления на оптимальном управлении, построенном в зависимости от выбора нормы вектора управляющих параметров. Величины диагональных элементов, как это и следовало ожидать, оказались наименьшими в соответствующих строках таблицы.

	$\ u\ _1^0$ длина вектора	$\ u\ _2^0$ сумма модулей компонент	$\ u\ _3^0$ максимальный модуль ком- поненты
$I^{\ \cdot \ _1}$ длина вектора	40.986	50.093	68.434
$I^{\ \cdot \ _2}$ сумма модулей компонент	61.878	50.093	118.532
$I^{\ \cdot \ _3}$ максимальный модуль компоненты	40.7882	50.093	39.511
Δ промах, отнесенный к длине полета для оптималь- ного управле- ния	0.0002	0.0317	0.0043

В силу погрешностей вычислений привести фазовый вектор линейного объекта точно в начало координат в численном эксперименте не удастся. Из таблицы видно, что промах этого вектора по конечной цели, вычисленный по формуле

$$\Delta = \frac{\|x_T - x^0(T)\|}{\|x_0 - x^0(T)\|},$$

по каждому из видов нормы $\|x^0(T_1)\|_1, \|x^0(T_1)\|_2, \|x^0(T_1)\|_3$ оказался

наименьшим в случае оптимального управления $\|u^0(\cdot)\|_1$. Видимо это объясняется отсутствием переключений у компонент вектора управляющих параметров в процессе управления.

Список литературы

1. Болотник Н.Н., Фигурин Т.Ю., Черноусько Ф.Л. Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, № 1. С. 3–22.
2. Волкова Л.Ю., Яцун С.Ф. Моделирование плоского управляемого движения трехмассовой вибрационной системы // Известия российской академии наук. Теория и системы управления, 2012. № 6. С. 122–122.
3. Кириллов С.Н., Токарь А.Д. Эффективный алгоритм наведения объекта управления на маневрирующие воздушные цели // Вестник РГРТУ. Рязань, 2008. Вып. 24. С. 33–38.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
5. Князьков Д.Ю., Фигурин Т.Ю. О периодических режимах движения системы двух взаимодействующих тел // Тр. 61-й Всерос. науч. конф. МФТИ. М.: МФТИ, 2018. С. 20–22.
6. Лутманов С.В. Вариационное исчисление и теория оптимального управления в примерах и упражнениях: учеб. пособие / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2010. 200 с.
7. Лутманов С.В., Городилов А.Д. Задача наведения на цель реактивного снаряда в однородном поле тяжести с учетом сопротивления воздуха: межвуз. сб. науч. тр. // Проблемы механики и управления. Пермь, 2020. Вып. 52. С. 11–29.
8. Маркеев А.П. Теоретическая механика. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 414 с.
9. Меркулов В.И. Алгоритмы наведения ракет при полуактивном синтезировании аппаратуры антенны // Радиотехника. 2002. № 1. 192 с.
10. Меркулов В.И., Канащенков А.И. Синтез и анализ алгоритма траекторного управления летательных аппаратов, наводимых на интенсивно маневрирующие воздушные цели // Радиотехника. 2005. № 9. С. 18–25.

11. Меркулов В.И. Траекторное управление наблюдением и показатели эффективности бортовых радиолокационных систем // Радиотехника. 2010. № 7. С. 15–25.
12. Подосинникова А.А. Оптимальное управление движением двухмассовой системы в среде с кусочно-линейным сопротивлением // Известия российской академии наук. Теория и системы управления. 2012. № 6. С. 112–112.
13. Фигурин Т.Ю. Оптимальное управление движением системы двух тел по прямой // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2007. № 2. С. 65–71.
14. Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, № 2. С. 116–125.
15. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация прямолинейного движения двухмассовой системы // ПММ. 2011. Т. 75, вып. 5. С. 707–717.
16. Чижов А.А., Авласенок А.В. Оптимизация самонаведения управляемой ракеты на групповую радиолокационную цель // Радиоэлектроника. 2003. № 3. С. 3–11.

Optimal control of a rocket projectile according to the "minimum force" criterion

S. V. Lutmanov

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
svlut@yandex.ru; 8(342) 2396375

The article solves the problem of optimal control of a rocket projectile by its delivery from a given initial position to a given final position, taking into account the air resistance force. The motion of the projectile is described by the vector differential equation of I.V. Meshchersky. The control quality criterion is taken in the form of "minimum force", the minimization of which ensures minimal overloads for the projectile. Three types of the norm of the control force vector are considered. For each of them, an optimal control is obtained that solves the task. The analysis of the results of the numerical experiment is carried out, confirming the general theoretical provisions.

Keywords: *mathematical modeling; optimization; control; functional minimization; I.V. Meshchersky equation; software control; quality criterion.*