МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

Аппарат производных чисел и возможности применения

Г. Г. Иванов, Г. В. Алфёров, В. С. Королёв
Санкт-Петербургский государственный университет
Россия, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский просп., 35
alferovgv@gmail.com, (812) 428-43-56

Развивается аппарат производных чисел, использование которого позволяет исследовать поведение функций нескольких переменных, не требуя их дифференцируемости. Кроме того, применение этого аппарата к задаче интегрируемости поля плоскостей касательных к дифференциальному многообразию позволяет обобщить теорему Фробениуса, расширить ее область применения за счет ослабления ограничений на степень гладкости рассматриваемых дифференциальных многообразий. Предлагаются условия и критерии использования аппарата частных и внешних производных чисел.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения; производные числа; негладкий анализ; поле гиперплоскостей; дифференциальные многообразия*.

DOI: 10.17072/1993-0550-2021-3-5-18

Введение

В работе развиваются основанные на идеях функционального анализа методы исследования дифференциальных уравнений [1–8].

С того момента, как В.Ф. Демьянов [1–2] ввел в математический анализ в качестве элементарной функции функцию минимакса, негладкий анализ получил мощный импульс к развитию. И.П. Натансон, исследуя поведение недостаточно гладких функций, в своей монографии по теории функций вещественной переменной [3] ввел понятие производного числа. Он кратко показал, как аппарат производных чисел можно использовать в исследовании поведения функций вещественной переменной. Мы, используя этот подход, развили аппарат производных чисел [4–8], получили с его помощью обобщение целого ряда классических теорем [9–17], а также показали, как эту теорию можно применить, например, к задаче оценки числа периодических решений дифференциальных уравнений первого порядка [18–19]. При исследовании этой проблемы мы получили целый ряд совершенно новых результатов по оценке числа периодических и почти периодических решений [20–21], приведя условия, при которых можно оценить верхнюю или нижнюю границу этого числа [18–23]. Кроме того, дали критерий интегрируемости функции одной переменной, причем предложенный процесс интегрирования обобщает не только интеграл Лебега, но и интегралы Перрона и Хинчина [13].

Продолжая свои исследования, мы занялись анализом функций нескольких переменных. Настоящей работой мы открываем серию статей, посвященных этой теме. В предлагаемой работе мы вводим новое понятие, а именно: понятие частного производного числа и показываем, как с помощью аппарата частных производных чисел можно получать новые теоремы, обобщающие результаты классического анализа за счет ослабления ограничений на степень гладкости исследуемых функций.

Занимаясь развитием аппарата производных чисел для исследования функций нескольких переменных, вводим понятия частных и внешних производных чисел. Мы покажем, как этот аппарат можно использовать в задаче интегрируемости поля плоскостей касательных к дифференциальному многообразию.

Развитие этого метода позволяет обобщить ряд теорем математического анализа, а также получить новые результаты. В частности, мы обобщим теорему Фробениуса, расширив ее область применения за счет ослабления ограничений на степень гладкости исследуемых функций и рассматриваемых многообразий при изучении вопроса об интегрируемости полей гиперплоскостей, касательных к дифференциальному многообразию.

1. Частные и внешние производные числа

Рассмотрены понятия частных и внешних производных чисел с целью показать, как предлагаемый аппарат может быть использован в задаче устойчивости решений для получения необходимых и достаточных условий для решений систем дифференциальных уравнений.

Дадим определение частных производных чисел и покажем, как это позволяет изучать поведение функции нескольких переменных, не требуя ее дифференцируемости, а используя только информацию о частных производных числах.

Пусть функция f задана в некоторой открытой области пространства R^n, и пусть $x = (x_1,\dots,x_n)^T$ – произвольная точка этой области, а $\Delta x = (\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)^T$ – произвольное приращение аргументов функции f.

Положим

$$\psi_i[f](x;\Delta x) = \frac{\omega_i}{2^{n-1}\Delta x_i}, \qquad i = 1,2,\dots,n.$$

$$\omega_i = \sum_{\mu\in\nu_i}[f(x_1+\mu_1\Delta x_1,\dots,x_n+\mu_n\Delta x_n) -$$
$$- f(x_1+\mu_1\Delta x_1,\dots,x_{i-1}+\mu_{i-1}\Delta x_{i-1},x_i,x_{i+1}+$$
$$+\mu_{i+1}\Delta x_{i+1}\dots,x_n+\mu_n\Delta x_n)],$$

где $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_n)$, а через ν_i, $i = 1,\dots,n$, обозначено множество n-мерных векторов, состоящих из нулей и единиц и имеющих единицу на i-ом месте, т. е. $\mu_i = 1$.

Отметим, что множество ν_i, $i = 1,\dots,n$, имеет ровно 2^{n-1} векторов.

Число λ *называется частным производным числом функции* f *в точке* x *по переменной* x_i, если существует последовательность $\{\Delta x^k\}$ такая, что для любого $j\in(1,\dots,n)$, $\Delta x_j^k \to 0$ при $k\to\infty$, $\Delta x_i^k \ne 0$, и $\lim\limits_{k\to\infty}\psi_i[f](x;\Delta x^k) = \lambda.$

То обстоятельство, что λ есть частное производное число функции f в точке x по переменной x_i, мы будем записывать так:

$$\lambda = \lambda_{x_i}[f](x).$$

Положим

$$\psi_i^{\alpha_i}[f](x;\Delta x) = \frac{\omega_i}{2^{n-1}\Delta x_i^{\alpha_i}}, \qquad i = 1,\dots,n.$$

Число λ^{α_i} называется *частным производным числом Гёльдера функции* f *в точке* x *по переменной* x_i *с показателем* α_i, если существует последовательность $\{\Delta x^k\}$ такая, что для любого $j\in(1,\dots,n)$, $\Delta x_j^k \to 0$ при $k\to\infty$, $\Delta x_i^k \ne 0$, и для любого $\varepsilon\in(0,\alpha_i)$ будет

$$\lim_{k\to\infty}\psi_i^{\alpha_i-\varepsilon}[f](x;\Delta x^k) = 0,$$
$$\lim_{k\to\infty}\psi_i^{\alpha_i+\varepsilon}[f](x;\Delta x^k) = \infty,$$
$$\lim_{k\to\infty}\psi_i^{\alpha_i}[f](x;\Delta x^k) = \lambda^{\alpha_i}.$$

То обстоятельство, что λ^{α_i} есть частное производное число Гёльдера функции f в точке x по переменной x_i с показателем α_i, будем записывать так: $\lambda^{\alpha_i} = \lambda^{\alpha_i}_{Hx_i}[f](x).$

Справедливы некоторые утверждения, которые почти очевидны.

Лемма 1. Если функция f задана в некоторой области U открытой в R^n, то в каждой точке этой области существуют частные производные числа Гёльдера по любой из переменных x_i, $i = 1, 2,.., n$.

Доказательство. В каждой точке области U существуют частные производные числа по любой из переменных x_i, $i = 1, 2,.., n$.

Пусть $x_0 \in U$ и $\{\Delta x^k\}$ такая, стремящаяся к нулю последовательность, что $x_0 + \Delta x^k \in U$. Если последовательность $\{\psi_i[f](x_0;\Delta x^k)\}$ ограничена, тогда, по теореме Больцано–Вейерштрасса, из нее выделяется подпоследовательность $\{\psi_i(x_0;\Delta x^{k_j})\}$, имеющая некоторый предел λ_i, который и будет частным производным числом функции f в точке x_0 по переменной x_i, $\lambda_i = \lambda_{x_i}[f](x_0)$. Если же последовательность $\{\psi_i[f](x_0;\Delta x^k)\}$ не ограничена, например, сверху, то из нее выделяется подпоследовательность $\{\psi_i[f](x_0;\Delta x^{k_j})\}$, стремящаяся к $+\infty$.

Если $\lambda_{x_i}[f](x_0) < \infty$, то это производное число также является и частным производным числом Гёльдера с показателем равным единице.

Лемма 2. Если для некоторого $i \in (1,\dots,n)$ все частные производные числа Гёльдера функции f по переменной x_i в точке x имеют показатели $\alpha \ge \alpha_0$ и каждое из частных производных чисел Гёльдера $\lambda^{\alpha_0}_{Hx_i}[f](x)$ конечно, то множество частных производных чисел Гёльдера функции f по переменной x_i в точке x равномерно ограничено.

Если для некоторого $i \in (1,\dots,n)$ все частные производные числа Гёльдера функции f по переменной x_i в точке x имеют показатели $\alpha > \alpha_0$, и существует последовательность $\{\lambda^{\alpha_j}_{Hjx_i}[f](x)$ такая, что каждое частное производное число Гёльдера, принадлежащее этой последовательности, ограничено, и $\alpha_j \to \alpha_0$ при $j \to \infty$, то эта последовательность равномерно ограничена.

Доказательство. Пусть все частные производные числа Гёльдера функции f по переменной x_i в точке x имеют показатели $\alpha \ge \alpha_0$, и каждое из частных производных чисел Гёльдера, имеющее показатель α_0, ограничено. Пусть, вопреки утверждению теоремы, существует последовательность $\{\lambda^{\alpha_0}_{Hjx_i}[f](x)\}$ такая, что $\lambda^{\alpha_0}_{Hjx_i}[f](x) \to \infty$ при $j \to \infty$. Тогда для каждого j существует стремящаяся к нулю последовательность $\{\Delta x^{ij}\}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \psi_i^{\alpha_0}[f](x;\Delta x^{kj}) = \lambda^{\alpha_0}_{Hjx_i}[f](x) = \lambda_i^j.$$

Выберем произвольную стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_j\}$. Поскольку для любого j последовательность $\{\psi_i^{\alpha_0}[f](x;\Delta x^{kj})\}$ сходится к λ_i^j, то существует последовательность $\{k_j\}$, $k_j \to \infty$ при $j \to \infty$, такая, что для каждого j будет выполняться неравенство

$$|\psi_i^{\alpha_0}[f](x;\Delta x^{k_j j}) - \lambda_i^j| < \varepsilon_j.$$

Из этого неравенства, учитывая условия, которым удовлетворяют последовательности $\{\lambda_i^j\}$ и $\{\varepsilon_j\}$, сразу получаем, что

$$\lim_{j\to\infty} \psi_i^{\alpha_0}[f](x;\Delta x^{k_j j}) = \infty.$$

Поскольку последовательность $\{\Delta x^{k_j j}\}$ можно выбрать сходящейся к нулю, то из последнего соотношения следует, что на этой последовательности реализуется бесконечное частное производное число Гёльдера с показателем α_0 либо частное производное число Гёльдера с показателем меньшим α_0.

В каждом из этих случаев мы приходим к противоречию, откуда и следует справедливость ее первого утверждения.

Повторяя приведенные выше рассуждения, в которых везде α_0 заменим на α_j, придем к соотношению

$$\lim_{j\to\infty} \psi_i^{\alpha_j}[f](x;\Delta x^{k_j j}) = \infty.$$

Это соотношение, очевидно, показывает, что на последовательности $\{\Delta x^{k_j j}\}$ реализуется частное производное число Гёльдера с показателем, не превосходящим α_0. Но по условию теоремы функция f в точке x не имеет частных производных чисел Гёльдера, показатели которых не превос-ходили бы α_0. Полученное противоречие доказывает справедливость второго утверждения.

Замечание. Если для некоторого $i \in (1,\ldots,n)$ все частные производные числа функции f по переменной x_i в точке x ограничены, то они и равномерно ограничены в этой точке.

Лемма 3. Для того чтобы функция f была непрерывна в точке x, необходимо и достаточно, чтобы все частные производные числа Гёльдера с показателем $\alpha = 0$, если такие существуют, были равны нулю в точке x.

Доказательство. Пусть функция f непрерывна в точке x, и пусть для некоторого $i \in (1,\ldots,n)$ на сходящейся к нулю последовательности $\{\Delta x^k\}$ реализуется частное производное число Гёльдера по переменной x_i с показателем ноль.

Тогда из определения частного производного числа Гёльдера и из непрерывности функции f в точке x следует

$$\lambda^0_{Hx_i}[f](x) = = \lim_{k\to\infty} \psi_i^0[f](x;\Delta x^k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\omega_i[f](x;\Delta x^k)}{2^{n-1}} = 0.$$

Это доказывает справедливость утверждения.

Замечание. Положим

$$\phi_i[f](x;\Delta x) = \phi_i[f](x_1,\ldots,x_n;\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n) = = \Delta x_i^{-1}[f(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_n+\Delta x_n) - - f(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_{i-1}+\Delta x_{i-1},x_i,x_{i+1}+ + \Delta x_{i+1},\ldots,x_n+\Delta x_n)], \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Лемма 4. Для того чтобы функция f была дифференцируема в точке x, необходимо и достаточно, чтобы при всех $i \in (1,\ldots,n)$ функции $\phi_i[f](x;\Delta x)$ были непрерывны в точке $(x,0)$.

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема в точке x.

Покажем, что в точке $(x,0)$ непрерывны функции $\phi_i[f](x;\Delta x)$ при всех $i \in (1,\ldots,n)$.

Предположим, что наше утверждение неверно, и среди функций ϕ_i существует хотя бы одна, например ϕ_1, терпящая разрыв в точке $(x,0)$.

Тогда представим разность $f(x+\Delta x) - f(x)$ в двух формах:

$$\begin{aligned} & f(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_n+\Delta x_n) - f(x_1,\ldots,x_n) = \\ & = [f(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_n+\Delta x_n) - \\ & - f(x_1,x_2+\Delta x_2,\ldots,x_n+\Delta x_n)] + \\ & + [f(x_1,x_2+\Delta x_2,\ldots,x_n+\Delta x_n) - \\ & - f(x_1,x_2,x_3+\Delta x_3,\ldots,x_n+\Delta x_n)] + \ldots \\ & + [f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+\Delta x_n) - f(x_1,\ldots,x_n)] \end{aligned} \tag{1}$$

и

$$\begin{aligned} & f(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_n+\Delta x_n) - f(x_1,\ldots,x_n) = \\ & f'_{x_1}\Delta x_1 + \ldots + f'_{x_n}\Delta x_n + \alpha_1\Delta x_1 + \ldots + \alpha_n \Delta x_n, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha_i \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $i = 1,\ldots,n$. Представление (2) имеет место в силу предположенной дифференцируемости функции f в точке x.

Положим в (1) и (2) $\Delta x_1 = \ldots = \Delta x_{n-2} = 0$ и вычтем из второго равенства первое. Полученную разность можно представить в виде

$$\begin{aligned} & [f'_{x_{n-1}} + \alpha_{n-1} - (f(x_1,\ldots,x_{n-2},x_{n-1}+\Delta x_{n-1},x_n+\Delta x_n) - \\ & - f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+\Delta x_n))\Delta x_{n-1}^{-1}]\Delta x_{n-1} + \\ & + [f'_{x_n} + \alpha_n - (f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+\Delta x_n) - \\ & - f(x_1,\ldots,x_n))\Delta x_n^{-1}]\Delta x_n \equiv 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку f по предположению дифференцируема в точке x, то в этой точке она имеет частную производную по n-й координате, и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x_n \to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+\Delta x_n) - f(x_1,\ldots,x_n)}{\Delta x_n} = f'_{x_n}.$$

Таким образом, второе слагаемое в левой части (3) можно записать в виде $\beta_n \Delta x_n$, причем, как следует из приведенных выше рассуждений,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \beta_n = 0.$$

Положим

$$\begin{aligned} & \beta_{n-1} = f'_{x_{n-1}} + \alpha_{n-1} - \\ & -(f(x_1,\ldots,x_{n-2},x_{n-1}+\Delta x_{n-1},x_n+\Delta x_n) - \\ & - f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+\Delta x_n))\Delta x_{n-1}^{-1}, \end{aligned}$$

и покажем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \beta_{n-1} = 0.$$

Предположим, что это не так. Тогда найдутся стремящаяся к нулю последовательность $\{\Delta x^k\}$ и отличное от нуля число ε, такие, что

$$\lim_{k\to\infty}\beta_{n-1}(\Delta x^k)=\varepsilon.$$

Из определения β_{n-1} следует, что на последовательности $\{\Delta x^k\}$ имеет место представление

$$\frac{f(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1}+\Delta x_{n-1},x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n+\Delta x_n)}{\Delta x_{n-1}}=$$

$$=f'_{x_{n-1}}+\varepsilon+\gamma_{n-1},$$

где

$$\lim_{k\to\infty}\gamma_{n-1}(\Delta x^k)=0.$$

Подставляя полученное представление в правую часть тождества

$$f(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1}+\Delta x_{n-1},x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\dots,x_n)=$$

$$=\frac{f(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1}+\Delta x_{n-1},x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n+\Delta x_n)}{\Delta x_{n-1}}\Delta x_{n-1}+$$

$$+\frac{f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\dots,x_n)}{\Delta x_n}\Delta x_n$$

и учитывая, что

$$\frac{f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\dots,x_n)}{\Delta x_n}=f'_{x_n}+\gamma_n,$$

где

$$\lim_{\Delta x\to 0}\gamma_n=0,$$

будем иметь

$$f(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1}+\Delta x_{n-1},x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\dots,x_n)=$$
$$=(f'_{x_{n-1}}+\varepsilon+\gamma_{n-1})\Delta x_{n-1}+(f'_{x_n}+\gamma_n)\Delta x_n.$$

Таким образом, показано, что если $\beta_{n-1}\not\to 0$ при $\Delta x\to 0$, то существует стремящаяся к нулю последовательность $\{\Delta x^k\}$, для которой не имеет места представление

$$f(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1}+\Delta x_{n-1},x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\dots,x_n)=$$
$$=f'_{x_{n-1}}\Delta x_{n-1}+f'_{x_n}\Delta x_n+\alpha_{n-1}\Delta x_{n-1}+\alpha_n\Delta x_n,$$

где $\alpha_{n-1}\to 0$ и $\alpha_n\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Но в таком случае функция f не является дифференцируемой в точке x.

Полученное противоречие и доказывает справедливость утверждения, что

$$\lim_{\Delta x_{n-1}\to 0}\beta_{n-1}=0.$$

Полагая, далее, в (1) и в (2)

$$\Delta x_1=\ldots=\Delta x_{n-3}=0$$

и повторяя все рассуждения с учетом представлений, полученных для слагаемых в (3), придем к заключению, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\beta_{n-2}=0,$$

где

$$\beta_{n-2}=f'_{n-2}+\alpha_{n-2}-$$
$$-\frac{f(x_1,\dots,x_{n-3},x_{n-2}+\Delta x_{n-2},x_{n-1}+\Delta x_{n-1},x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1}+\Delta x_{n-1},x_n+\Delta x_n)}{\Delta x_{n-2}}.$$

Повторяя эти рассуждения, на $(n-1)$-ом шаге получим, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\beta_1=0,$$

где $\quad \beta_1=f'_{x_1}+\alpha_1-\phi_1[f](x;\Delta x).$

Но это невозможно, поскольку $\alpha_1\to 0$ при $\Delta x\to 0$, а $\phi_1[f](x;\Delta x)$, по предположению, терпит разрыв в точке $(x,0)$. Полученное противоречие и доказывает непрерывность функции $\phi_1[f](x;\Delta x)$ в точке $(x,0)$.

Если предположить, что в точке $(x,0)$ терпит разрыв функция ϕ_i, $i=2,,n$, то перенумеруем переменные таким образом, чтобы i-я координата стала первой, и повторим все рассуждения.

Лемма 5. Для того чтобы функция f была дифференцируема в точке x, необходимо и достаточно, чтобы при всех $i\in(1,\dots,n)$ функции $\phi_i[f](x;\Delta x)$ были непрерывны в точке $(x,0)$.

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема в точке x. Тогда, согласно лемме 4, функции $\phi_i[f](x;\Delta x)$, $i=1,2,\dots,n$, непрерывны в точке $(x,0)$, что влечет за собой непрерывность в этой точке каждого из слагаемых, входящего в сумму, определяющую $\phi_i[f](x;\Delta x)$, $i=1,2,\dots,n$. Так как слагаемых конечное число, то и сама функция ϕ_i будет непрерывна в точке $(x,0)$.

Лемма 6. Для того чтобы функция f была дифференцируема в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке по каждой переменной x_i, $i=1,2,\dots,n$, существовало только одно частное производное число.

Рассмотрим функцию $u = f(x)$, которая определена в некоторой области из R^n, причем каждая из переменных x_i, $i = 1,2,\ldots,n$, в свою очередь, является функцией от переменной t в некотором промежутке: $x_i = x_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,n.$

Пусть, кроме того, при изменении t вектор x не выходит за пределы области определения функции u. Подставив значения x_i, $i = 1, 2, , n$, в функцию u, получим сложную функцию: $u = f(x(t))$.

Лемма 7. Пусть все частные производные числа функции u в точке x ограничены, а также ограничены все производные числа функций x_i, $i = 1,2,\ldots,n$, в точке t. Тогда любое производное число λ сложной функции u в точке t представимо в виде:

$$\lambda[u](t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{x_i}[f](x)\lambda[x_i](t).$$

Лемма 8. Пусть все частные производные числа функций f в точке x и x_i, $i = 1,2,\ldots,n$, в точке (t,s) ограничены. Тогда имеют место представления:

$$\lambda_t[u](t,s) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{x_i}[f](x)\cdot\lambda_t[x_i](t,s),$$

$$\lambda_s[u](t,s) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{x_i}[f](x)\cdot\lambda_s[x_i](t,s).$$

Учитывая полученные выше утверждения, можно получить целый ряд подобных теорем для использования производных чисел при исследованиях задач устойчивости решений сложных нелинейных систем дифференциальных уравнений, описывающих процессы динамики и возможности управления.

Дадим определение внешнего производного числа и, пользуясь аппаратом внешних производных чисел, найдем условия полной интегрируемости непрерывных полей гиперплоскостей.

Пусть M – Хаусдорфово пространство со счетной базой, и пусть p – произвольная точка из M. Если у точки p существует окрестность U, гомеоморфная открытому подпространству n-мерного Евклидова пространства R^n, то M называется n-мерным топологическим многообразием.

Пусть M^n – n-мерное топологическое многообразие. Предположим, что для каждого $\kappa \in K$, где K – некоторое фиксированное множество индексов, имеется открытое множество U_κ в M^n и гомеоморфизм

$$\phi_\kappa : U_\kappa \to V_\kappa,$$

где V_κ – открытое множество в R^n. Обозначим множество пар $\{(U_\kappa, \phi_\kappa); \kappa \in K\}$ через R. Пусть $r \in R$ принимает одно из значений 0, 1, … , ∞. Множество R называется системой локальных C^r-координат на многообразии M^n, если оно удовлетворяет условиям:

1. $\{U_\kappa; \kappa \in K\}$ является открытым покрытием пространства M^n.
2. Если

$$U_\kappa \cap U_\mu \neq \varnothing, \qquad \kappa, \mu \in K,$$

то отображения

$$\phi_\mu \circ \phi_\kappa^{-1} \phi_\kappa(U_\kappa \cap U_\mu) \to \phi_\mu(U_\kappa \cap U_\mu),$$

$$\phi_\kappa \circ \phi_\mu^{-1} \phi_\mu(U_\kappa \cap U_\mu) \to \phi_\kappa(U_\kappa \cap U_\mu)$$

являются C^r-отображениями.

Если на n-мерном топологическом многообразии M^n задана система локальных C^r-координат R, то оно называется *n-мерным C^r-многообразием* и обозначается через (M^n, R) или просто через M^n.

Две кривые на C^r-многообразии M^n, $r \geq 1$, называются *эквивалентными,* если соответствующие им кривые в R^n проходят через данную точку и имеют в ней общий касательный вектор.

Класс эквивалентности C^1-кривых на многообразии M^n, проходящих через точку p, называется *касательным вектором к многообразию в данной точке*.

Множество всех касательных векторов к M^n в точке p называется *касательным пространством к M^n в точке p* и обозначается через $T_p(M^n)$.

Сопоставляя каждому касательному вектору к многообразию M^n в произвольной точке $p \in U_\kappa \subset M^n$, $(U_\kappa, \phi_\kappa) \in R$, касательный вектор к соответствующей кривой в R^n, определим взаимооднозначное соответствие:

$$\Phi_\kappa T_p(M^n) \to R^n.$$

Пусть V есть n-мерное векторное пространство над полем вещественных чисел. Всякое линейное отображение $f: V \to R$, т. е. отображение при котором

$f(av+bw) = af(v)+bf(w), \quad v,w \in V, \quad a,b \in R,$ *называется формой первой степени или 1-формой на пространстве* V.

Пусть V^* – множество всех 1-форм на V. Для любых $f, f' \in V^*$ и $a,b \in R$ определим элемент $af+bf' \in V^*$, положив

$$(af+bf')(v) = af(v)+bf'(v), \qquad v \in V.$$

Тем самым V^* становится векторным пространством над R. *Его называют двойственным пространством к* V.

Пусть $e_1,\dots,e_n$ базис пространства V. Возьмем формы $\beta_1,\dots,\beta_n \in V^*$, определенные на этом базисе равенствами

$$\beta_i(e_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1,2, \dots, n.$$

Очевидно, элементы $\beta_1,\dots,\beta_n$ представляют базис в пространстве V^*. Этот базис называется *двойственным* или *взаимным к базису* $e_1,\dots,e_n$.

Рассмотрим произведение q экземпляров пространства V на себя

$$V\times\dots\times V = \{(v_1,\dots,v_q)\, v_i \in V\},$$

и произвольное отображение

$$f: V\times\dots\times V \to R,$$

являющееся линейным на каждом сомножителе V, т. е. для любых $v_i, w_i \in V$ и $a,b \in R$

$$f(v_1,\dots,v_{i-1}, av_i+bv_i, v_{i+1},\dots,v_q) =$$
$$= af(v_1,\dots,v_{i-1}, v_i, v_{i+1},\dots,v_q) +$$
$$+ bf(v_1,\dots,v_{i-1}, w_i, v_{i+1},\dots,v_q),$$
$$i = 1,2, \dots, q.$$

Такое отображение называется *полилинейной формой степени* q *или* q*-формой на пространстве* V. Множество всех q-форм на V будем обозначать символом $T^{(q)}(V^*)$.

Для любых $f, f' \in T^{(q)}(V^*)$ и $a,b \in R$ определим элемент $af+bf' \in T^{(q)}(V^*)$ с помощью равенства

$$(af+bf')(v_1,\dots,v_q) =$$
$$= af(v_1,\dots,v_q)+bf'(v_1,\dots,v_q).$$

Тем самым множество $T^{(q)}(V^*)$ становится векторным пространством над V. Условимся, что

$$T^{(0)}(V^*) = R.$$

С помощью форм β_j, $j = 1,2,\dots,n$, определим формы

$\beta_{j_1,\dots,j_q} \in T^{(q)}(V^*)$, $1 \le j_k \le n$; $k = 1,2,\dots,q$, полагая

$$\beta_{j_1,\dots,j_q}(v_1,\dots,v_q) = \beta_{j_1}(v_1)\cdot\ldots\cdot\beta_{j_q}(v_q).$$

Очевидно, формы $\beta_{j_1,\dots,j_q}$, $1 \le j_k \le n$; $k = 1,2,\dots,q$, образуют базис пространства $T^{(q)}(V^*)$.

Пусть $f \in T^{(q)}(V^*)$ и $g \in T^{(s)}(V^*)$. Определим элемент $f \otimes g \in T^{(q+s)}(V^*)$ равенством

$(f\otimes g)(v_1,\dots,v_{q+s}) = f(v_1,\dots,v_q)\cdot g(v_{q+1},\dots,v_{q+s}).$

Форма $f \otimes g$ называется *тензорным произведением форм* f *и* g.

Пусть S_q – группа всех подстановок на q символах $1,2,\dots,q$. Если $\sigma \in S_q$, то образ символа k при σ будем обозначать через $\sigma(k)$, $k = 1,2,\dots,q$. Через ε_σ обозначим знак подстановки σ.

Для $f \in T^{(q)}(V^*)$ и $\sigma \in S_q$ определим $\sigma(f) \in T^{(q)}(V^*)$ формулой

$$\sigma(f)(v_1,\dots,v_q) = f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(q)}).$$

Если форма $f \in T^{(q)}(V^*)$ такова, что для любой подстановки $\sigma \in S_q$ имеет место равенство

$$\sigma(f) = \varepsilon_\sigma f,$$

то f называется *знакопеременной формой степени* q, или *внешней* q*-формой.*

Совокупность всех внешних q-форм является подпространством в $T^{(q)}(V^*)$. Это подпространство будем обозначать через $\overset{q}{\to\wedge} V^*$. Условимся, что

$$\overset{0}{\to\wedge} V^* = R,$$

а также

$$\overset{1}{\to}\wedge V^* = V^*.$$

Определим линейное отображение A_q пространства $T^{(q)}(V^*)$ в себя, положив

$$A_q(f) = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q}\varepsilon_\sigma \sigma(f).$$

Можно проверить, что для каждой формы $f \in T^{(q)}(V^*)$ ее образ $A_q(f)$ является внешней q-формой.

Для любых $f \in \overset{q}{\to}\wedge V^*$, $g \in \overset{s}{\to}\wedge V^*$ форму $f \wedge g \in \overset{q}{+s} \to \wedge V^*$, определяемую как

$$f \wedge g = \frac{(q+s)!}{q!s!} A_{q+s}(f \otimes g),$$

называют внешним произведением форм f и g.

2. Определение операции внешнего дифференцирования

Пусть M^n есть n-мерное C^s-многообразие, $s \ge 1$. Рассмотрим векторное пространство $\overset{q}{\to}\wedge (T_p(M^n))^*$ внешних q-форм на касательном пространстве $T_p(M^n)$ к многообразию M^n в произвольной фиксированной точке p.

Поставим в соответствие каждой точке p из M^n некоторую внешнюю q-форму $\omega(p)$ из $\overset{q}{\to}\wedge (T_p(M^n))^*$.

Отображение

$$\omega, M^n \to \bigcup_{p\in M^n}\left(\overset{q}{\to}\wedge (T_p(M^n))^*\right)$$

называется *внешней дифференциальной q-формой на многообразии M^n*.

Пусть $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ – положительный единичный вектор оси x_i пространства R^n. Тогда векторы $\dfrac{\partial}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ составляют базис n-мерного векторного пространства R^n. Обозначим через $dx_1,\dots,dx_n$ базис двойственного к R^n пространства $(R^n)^*$, являющийся двойственным к $\dfrac{\partial}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}$:

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}.$$

В таком случае элементы $dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_q}$, $j_1 < \ldots < j_q$; $1 \le j_k \le n$; $k = 1,2,\dots,q$, составляют базис векторного пространства $\overset{q}{\to}\wedge (R^n)^*$ над полем R.

Пусть (U_κ, ϕ_κ) – координатная окрестность на M^n, а Φ_κ – определенный выше изоморфизм:

$$\Phi_\kappa : T_p(M^n) \to R^n$$

для произвольной точки p из M^n. Определим с помощью Φ_κ отображение

$$\Phi_\kappa^* : (R^n)^* \to \left(T_p(M^n)\right)^*,$$

положив

$$\Phi_\kappa^*(dx_i)(v) = dx_i(\Phi_\kappa(v)), \qquad v \in T_p(M^n).$$

С помощью изоморфизма

$$\left(\Phi_\kappa^*\right)^{-1} : \left(T_p(M^n)\right)^* \to (R^n)^*$$

введем изоморфизм, который будем обозначать тем же символом:

$$\left(\Phi_\kappa^*\right)^{-1} : \overset{q}{\to}\wedge \left(T_p(M^n)\right)^* \to \overset{q}{\to}\wedge (R^n)^*.$$

Применительно к элементу $\omega(p)$, соответствующему точке $p \in U_\kappa$, это позволяет записать

$$\left(\Phi_\kappa^*\right)^{-1}\omega(p) = \sum_{j_1<\ldots<j_q} a_{j_1,\dots,j_q}(\phi_\kappa(p))dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_q}.$$

Если коэффициенты $a_{j_1,\dots,j_q}$ являются C^r-функциями в точке $\phi_\kappa(p)$, то ω называется *внешней дифференциальной q-формой класса C^r в точке p*.

Если форма ω является формой класса C^r во всех точках многообразия M^n, то она называется *внешней дифференциальной q-формой класса C^r на многообразии M^n*. Множество всех внешних дифференциальных q-форм класса C^r на многообразии M^n

будем обозначать через $A^q_{(r)}(M^n)$ или просто $A^q(M^n)$.

Линейное отображение

$$d: A^q_{(r)}(M^n) \to A^{q+1}_{(r-1)}(M^n), \qquad r \geq 1,$$

определяемое формулой

$$\left(\Phi^*_\kappa\right)^{-1} d\omega(p) =$$

$$= \sum_{j_1<\ldots<j_q} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{j_1,\ldots,j_q}(\phi_\kappa(p)) dx_i \right) \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q},$$

называется *оператором внешнего дифференцирования,* а форма $d\omega$ – *внешним дифференциалом формы* ω или ее *внешней производной.* Здесь $p \in U_\kappa$ – произвольная точка многообразия, (U_κ, ϕ_κ) – координатная окрестность на M^n, а ω – произвольная форма из множества $A^q_{(r)}(M^n)$.

Форма $\lambda[\omega](p)$ называется *внешним производным числом формы* $\omega \in A^q_{(r)}(M^n)$, $r \geq 0$, в точке $p \in M^n$, если в R^n существует сходящаяся к нулю последовательность $\{\Delta x^k\}$ такая, что

$$\left(\Phi^*_\kappa\right)^{-1} \lambda[\omega](p) =$$

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ \sum_{j_1<\ldots<j_q} \left(\sum_{i=1}^n \psi_{x_i}[a_{j_1,\ldots,j_q}](x;\Delta x^k) dx_i \right) \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q} \right\},$$

где $x = \phi_\kappa(p)$, а ψ_{x_i} – функции, определенные выше.

Поскольку функций $a_{j_1,\ldots,j_q}$ конечное число, то, не нарушая общности, можно считать, что на $\{\Delta x^k\}$ реализуются некоторые частные производные числа $\lambda_{x_i}[a_{j_1,\ldots,j_q}](\phi_\kappa(p))$ этих функций.

Тогда внешнее производное число формы ω допускает следующее представление:

$$\left(\Phi^*_\kappa\right)^{-1} \lambda[\omega](p) =$$

$$\sum_{j_1<\ldots<j_q} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{x_i}[a_{j_1,\ldots,j_q}](\phi_\kappa(p)) dx_i \right) \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q},$$

где стоящие в правой части равенства частные производные числа реализуются на одной общей для всех функций $a_{j_1,\ldots,j_q}$ сходящейся к нулю последовательности $\{\Delta x^k\}$.

Таким образом, понятие внешнего производного числа формы ω определено для каждой координатной окрестности (U_κ, ϕ_κ). Но форма $\Phi^{*\,-1}_\kappa \omega(p)$ не зависит от выбора окрестности (U_κ, ϕ_κ), и потому на общей части $U_\kappa \cap U_\mu$ окрестностей (U_κ, ϕ_κ) и (U_μ, ϕ_μ) при условии, что $U_\kappa \cap U_\mu \neq \varnothing$, внешние производные числа формы $\omega(p)$, $p \in U_\kappa \cap U_\mu$, совпадают, т. е. их определение не зависит от конкретного выбора окрестности (U_κ, ϕ_κ), и, следовательно, оно приемлемо для всех точек p многообразия M^n.

Теорема 1. Пусть ω, ω_1, $\omega_2 \in A^q_{(r)}(M^n)$ и $\theta \in A^s_{(r)}(M^n)$ – формы, коэффициенты которых имеют только ограниченные частные производные числа. Тогда:

1) $\lambda[\omega_1 + \omega_2] = \lambda[\omega_1] + \lambda[\omega_2]$,

2) $\lambda[\omega \wedge \theta] = \lambda[\omega] \wedge \theta + (-1)^q \omega \wedge \lambda[\theta]$,

3) пусть $f \in A^0_{(r)}(M^n)$ и (U_κ, ϕ_κ) – координатная окрестность на M^n, тогда

$$\left(\Phi^*_\kappa\right)^{-1} \lambda[f(p) = \sum_{i=1}^n \lambda_{x_i}[f \circ \phi_\kappa^{-1}](\phi_\kappa(p)) dx_i,$$

$$p \in U_\kappa, r \geq 0.$$

Доказательство. Из определения внешних производных чисел формы $\omega \in A^q_{(r)}(M^n)$, $r \geq 0$, очевидно, следует выполнение условий 1) и 3), если коэффициенты формы удовлетворяют требованиям теоремы. Чтобы доказать условие 2), заметим, что, в силу линейности всех входящих в 2) операций, достаточно рассмотреть случай, когда

$$\left(\Phi^*_\kappa\right)^{-1} \omega = f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q},$$

и

$$\left(\Phi^*_\kappa\right)^{-1} \theta = g dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}.$$

Пусть $\{\Delta x^k\}$ произвольная сходящаяся к нулю последовательность. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, всегда можно добиться, чтобы на $\{\Delta x^k\}$ реализовались внешние производные числа форм ω и θ.

Тогда для формы $\lambda[\omega\wedge\theta]$ будем иметь:

$$\left(\Phi_\kappa^*\right)^{-1}\lambda[f(p)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_{x_i}[f\circ\phi_\kappa^{-1}](\phi_\kappa(p))dx_i,$$

$$p\in U_\kappa, r\geq 0.$$

Таким образом, свойство 2) установлено.

3. Поле касательных гиперплоскостей

Пусть M^n есть n-мерное C^s-многообразие, $s\geq 1$. Обозначим через G_p^m множество всех подпространств размерности m в касательном векторном пространстве $T_p(M^n)$ к M^n в точке $p\in M^n$.

Полем касательных m-мерных плоскостей на M^n называется всякое отображение

$$D^m\, M^n\to\bigcup_{p\in M^n}G_p^m,$$

при котором $D^m(p)\in G_p^m$, $m\geq n$.

Пусть p – произвольная точка на M^n и U – некоторая ее окрестность, в которой определены m векторных C^r-полей $X_1,\ldots,$ X_m. Предположим, что для каждой точки $p^{'}\in U$ векторы $X_1(p^{'}),\ldots,$ $X_m(p^{'})$ составляют базис в пространстве $D^m(p^{'})$.

Тогда D^n называется C^r-полем касательных m-мерных плоскостей, $0\leq r<s$, а про поля $X_1,\,,\,X_m$ говорят, что они порождают поле D^m на окрестности U.

Пусть на многообразии M^n заданы дифференциальные 1-формы $\omega_1,\,,\,\omega_m$ класса C^r. Если взять для каждой точки $p\in M^n$ пространство $D^{n-m}(p)$ такое, что

$$D^{n-m}(p)=\{v(\omega_i(p))(v)=0,$$

$$i=1,2,\ldots,m; v\in T_p(M^n)\},$$

то тем самым определится C^r-поле касательных $(n-m)$- мерных плоскостей:

$$D^{n-m}=\{D^{n-m}(p)\,p\in M^n\}$$

на M^n. Поле D^{n-m} называется *полем касательных плоскостей, определенным дифференциальными 1-формами* $\omega_1,\,,\,\omega_m$.

В общем случае C^r-поле касательных $(n-m)$-мерных плоскостей D^{n-m} на многообразии M^n не является полем, определенным некоторыми дифференциальными 1-формами $\omega_1,\,,\,\omega_m$. Однако при $m=1$ D^{n-1}, т. е. поле касательных гиперплоскостей, определяется дифференциальной 1-формой класса C^r, не обращающейся в нулевую форму и заданной с точностью до умножения на функцию, не обращающуюся нигде в нуль [6, 7, 10].

Поле гиперплоскостей называется *вполне интегрируемым*, если форма $\lambda[\omega]$ в плоскости поля тождественно равна нулю.

Теорема 2. Пусть ω – дифференциальная 1-форма класса C^r, и f – всюду отличная от нуля C^r-функция, $r\geq 0$. Тогда структуры $\lambda[\omega]\big|_{\omega=0}$ и $\lambda[f\omega]\big|_{f\omega=0}$ на плоскости $\omega=0$ отличаются на не обращающийся в нуль множитель.

Доказательство.

Из теоремы 1 следует, что

$$\lambda[f\omega]=\lambda[f]\wedge\omega+f\lambda[\omega].$$

Но $\lambda[f]\wedge\omega$ на плоскости $\omega=0$ есть нулевая 2-форма. Следовательно, 2-формы $\lambda[\omega]$ и $\lambda[f\omega]$ на плоскости $\omega=0$ отличаются на ненулевой множитель f.

Теорема 2 показывает, что свойство полной интегрируемости поля не зависит от выбора локально задающей его формы ω, так как форма $\lambda[\omega]\big|_{\omega=0}$ при умножении ω на отличную от нуля функцию умножается на эту функцию.

Теорема 3. Для того чтобы поле гиперплоскостей $\omega=0$ было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы было $\omega\wedge\lambda[\omega]\equiv 0$.

Доказательство.

Необходимость. Выберем в рассматриваемой точке базис из $(n-1)$-го горизонтального вектора $(e_1,\ldots,e_{n-1})$ в плоскости $\omega=0$ и еще одного вертикального вектора f. Пусть на гиперплоскости $\omega=0$ $\lambda[\omega]=0$. Покажем, что тогда выполняется условие теоремы.

Значение 3-формы $\omega \wedge \lambda[\omega]$ на трех горизонтальных векторах равно нулю, так как $\omega = 0$. Далее, $(\lambda[\omega] \wedge \omega)(e_i, e_j, f) = 0$ как сумма, в которой каждое слагаемое содержит в виде сомножителя либо $\omega(e_i)$, либо $\lambda[\omega](e_i, e_j)$, эти же сомножители равны нулю.

Достаточность. Если $\omega \wedge \lambda[\omega] \equiv 0$, то покажем, что в этом случае обязательно

$$\lambda[\omega](e_i, e_j) = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Действительно, единственное слагаемое в $(\omega \wedge \lambda[\omega])(e_i, e_j, f)$, не содержащее множителя $\omega(e_i)$ или $\omega(e_j)$, есть $\lambda[\omega](e_i, e_j)\omega(f)$. Но $\omega(f) \neq 0$ и, следовательно, $\lambda[\omega](e_i, e_j) = 0$.

Условие

$$\omega \wedge \lambda[\omega] \equiv 0$$

будем называть *условием интегрируемости Фробениуса.*

Из теорем 2 и 3 следует, что условие интегрируемости Фробениуса есть условие на поле гиперплоскостей. Оно выполнено или не выполнено одновременно для всех форм ω, определяющих поле.

Действительно, если ω' – другая дифференциальная 1-форма, задающая то же поле, то (локально) ω' отличается от ω на не обращающийся нигде в нуль множитель, и, следовательно, формы ω и ω' удовлетворяют или не удовлетворяют условию Фробениуса одновременно.

4. Интегральное многообразие поля гиперплоскостей

Теперь выясним условия, при которых поле плоскостей, определяемое дифференциальной 1-формой ω класса C^r, $r \geq 0$, является полем касательных к семейству гиперповерхностей. Предварительно докажем два вспомогательных утверждения.

Пусть M^n – C^s-многообразие, $s \geq 1$, на котором задано поле касательных гиперплоскостей, определяемое дифференциальной 1-формой ω класса C^r, $0 \leq r < s$. Пусть X – векторное C^r-поле, не обращающееся в нуль, и такое, что направление поля X в каждой точке принадлежит гиперплоскости нулей формы ω в этой точке:

$$\omega(X) \equiv 0.$$

Лемма 9. Для того чтобы поле нулей формы ω было инвариантно относительно фазового потока поля X, удовлетворяющего условию $\omega(X) \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda[\omega](X, \xi) = 0$$

для всех ξ из гиперплоскости поля $\omega(\xi) = 0$.

Доказательство. Пусть X – произвольное поле, удовлетворяющее условиям леммы. Следуя [10], обозначим через $g^t p$ поток, порождаемый этим полем. Условие инвариантности поля нулей формы ω относительно потока $g^t p$ состоит в том, что производная $d\omega/dt$ должна обращаться в нуль на плоскости поля $\omega = 0$. Вычислим эту производную.

Пусть p – произвольная точка многообразия M^n и (U_κ, ϕ_κ) – координатная окрестность на M^n такая, что $p \in U_\kappa$. Тогда нетрудно проверить, что имеет место равенство

$$\left(\Phi_\kappa^*\right)^{-1} \frac{d\omega(p)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{x_i}[a_j](\phi_\kappa \circ p) \cdot v_i \wedge \xi_j' \right) =$$

$$= \left(\Phi_\kappa^*\right)^{-1} \lambda[\omega](X, \xi),$$

где через v_i и ξ_j' обозначены компоненты векторов $X(p)$ и ξ, соответственно, при отображении Φ_κ. Отсюда следует, что условие инвариантности имеет вид

$$(\omega(\xi) = 0)(\lambda[\omega](X, \xi) = 0).$$

k-мерное подмногообразие Γ^k многообразия M^n, $k < n$, будем называть *интегральным многообразием поля гиперплоскостей,* определяемого дифференциальной 1-формой ω, если для любой точки $p \in \Gamma^k$ касательное пространство $T_p(\Gamma^k)$ к подмногообразию Γ^k в этой точке принадлежит гиперплоскости поля $\omega = 0$. Интегральное многообразие размерности $(n-1)$ будем называть *интегральной гиперповерхностью поля гиперплоскостей* $\omega = 0$.

Лемма 10. Пусть дифференциальная 1-форма ω определяет вполне интегрируемое поле гиперплоскостей, а также пусть X – произвольное векторное C^r-поле на M^n, для которого $\omega(X) \equiv 0$.

Тогда, если существует k-мерное интегральное подмногообразие Γ^k поля гиперплоскостей такое, что для некоторой точки $p \in \Gamma^k$ $X(p)$ не лежит в касательной плоскости к Γ^k в точке p, то фазовые кривые поля X, проходящие через точки интегрального многообразия Γ^k, вблизи p образуют интегральное многообразие Γ^{k+1} поля гиперплоскостей $\omega = 0$.

Доказательство. Обозначим через $\{g^t\}$ локальный фазовый поток поля X. По условию леммы поле гиперплоскостей, определяемое формой ω, вполне интегрируемо, т. е. форма $\lambda[\omega]$ в плоскости поля тождественно равна нулю. Но поле X выбрано нами так, что $\omega(X) \equiv 0$, и, следовательно, для любого вектора ξ плоскости поля должно быть

$$\lambda[\omega](X, \xi) = 0.$$

Таким образом, выполнены все требования леммы 9, и тогда, в силу последней, поле гиперплоскостей инвариантно относительно фазового потока $\{g^t\}$.

Далее, и касательная плоскость $T_p(\Gamma^k)$ в точке p к интегральному многообразию Γ^k, и вектор $X(p)$ лежат в плоскости поля, а касательное пространство $T_p(\Gamma^{k+1})$ к Γ^{k+1} в точке p порождено $X(p)$ и $T_p(\Gamma^k)$. Следовательно, касательное пространство к Γ^{k+1} в точках начального многообразия Γ^k близких к p лежат в плоскости поля.

Из этих двух утверждений следует, что многообразие Γ^{k+1} есть интегральное многообразие для вполне интегрируемого поля гиперплоскостей, которое определяется формой ω.

Теорема 4. Для того чтобы поле гиперплоскостей $\omega = 0$ было полем касательных к семейству гиперповерхностей, необходимо и достаточно, чтобы это поле удовлетворяло условию интегрируемости Фробениуса:

$$\omega \wedge \lambda[\omega] \equiv 0.$$

Доказательство.

Необходимость. На поверхностях семейства $\omega = 0$. Это означает, что поле гиперплоскостей $\omega = 0$ инвариантно относительно фазового потока любого непрерывного неособого векторного поля X, удовлетворяющего условию

$$\omega(X) \equiv 0.$$

Но тогда, в силу леммы 9, на каждой гиперплоскости $\omega = 0$ будет

$$\lambda[\omega] = 0.$$

Это в силу теоремы 3 эквивалентно условию интегрируемости Фробениуса.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда, в силу теоремы 3, $\lambda[\omega] = 0$ в плоскостях поля $\omega = 0$. Интегральное многообразие размерности $(n-1)$ поля гиперплоскостей, определяемого формой ω, будем строить последовательным увеличением размерности.

Очевидно, не нарушая общности, можно ограничиться рассмотрением случая, когда поле гиперплоскостей, определяемое формой ω, задано в R^n.

Пусть p – произвольная точка многообразия M^n. Рассмотрим локальную систему координат $(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$, в которой координатная плоскость $y = 0$ в точке p принадлежит полю плоскостей $\omega = 0$.

Проекция вдоль оси y из плоскости поля на координатную плоскость $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ в окрестности точки p является изоморфизмом.

В координатной плоскости $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ рассмотрим базисные векторные поля $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)$. Их прообразы в плоскостях поля образуют в окрестности точки p непрерывные векторные поля, которые мы обозначим через $(X_1, \ldots, X_{n-1})$.

В качестве начального (нульмерного) интегрального многообразия Γ^0 возьмем точку p.

Применяя лемму 10 к Γ^0 и X_1, получим одномерное интегральное многообразие Γ^1. В силу построения, на Γ^1 имеем $x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0,$ и поэтому

$$X_2 \ni T_p(\Gamma^1).$$

Применяя лемму 10 к Γ^1 и X_2, получим двумерное интегральное многообразие Γ^2, на котором

$$x_3 = \ldots = x_{n-1} = 0.$$

Двигаясь дальше таким же образом, мы придем к интегральному многообразию Γ^k, на котором

$$x_{k+1} = \ldots = x_{n-1} = 0.$$

Действуя на него потоком поля X_{k+1}, получим интегральное многообразие Γ^{k+1}, на котором

$$x_{k+2} = \ldots = x_{n-1} = 0.$$

Процесс завершается построением искомого многообразия Γ^{n-1}.

Заключение

В работе излагаются теоремы и алгоритм действия производных чисел. Мы показали, как аппарат частных и внешних производных чисел можно использовать при исследовании поведения функции нескольких переменных, а также применить к задаче полной интегрируемости поля гиперплоскостей к дифференциальному многообразию.

В дальнейшем предполагается показать, как полученные здесь результаты могут быть применены к задаче устойчивости решений системы дифференциальных уравнений, сведя эту задачу к проблеме разрешимости системы уравнений специального вида.

Список литературы

1. *Демьянов В.Ф.* Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. 112 с.
2. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
3. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 482 с.
4. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Горовенко П.А.* Производные числа функций одной переменной // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. № 3(42). С. 5–19.
5. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* Derived numders of one variable convex functions. (2019) IJPAM, (41). P. 649–662.
6. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* Derived numders of one variable monotonic functions. (2019) IJPAM, (41). P. 637–648.
7. *Alferov G., Ivanov G., Sharlay A., Fedorov V.* Application of derived numbers theory in convex analysis. (2019) AIP Conference Proceedings, 2019. 2116. 080003.
8. *Alferov G., Ivanov G., Sharlay A., Fedorov V.* Application of derived numbers theory in problem of function extremum. (2019) AIP Conference Proceedings, 2019. 2116. 080002.
9. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* Possible solutions of linear homogeneous system of differential equations. (2020) AIP Conference Proceedings, 2020. 2293. 080002.
10. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* Investigation of the stability of solutions of systems of ordinary differential equations. (2020) AIP Conference Proceedings, 2020. 2293. 060004.
11. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V.* About of the asymptotical stability of solutions of systems of ordinary differential equations. (2020) AIP Conference Proceedings, 2020. 2293. 060005.
12. *Ivanov G., Alferov G., Sharlay A., Efimova P.* Conditions of asymptotic stability for linear homogeneous switched systems. (2017) AIP Conference Proceedings, 2017. 1863. 080002.
13. *Ivanov G., Alferov G., Efimova P.* Integrability of smooth one-variable functions. (2017) 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017. Proceedings, 7973965.
14. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P.* The structural study of limited invariant sets of relay stabilized systems. (2017) Mechanical Systems: Research, Applications and Technology. P. 101–164. Book Chapter.
15. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A., Sharlay A.* S. Stability of linear systems with multitask right-hand member. (2018) Stochastic Methods for Estimation and Problem Solving in Engineering. P. 74–112. Ch004. Book Chapter.
16. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on the structure of limit invariant sets of stationary control systems with nonlinearity of hysteresis type. (2017) AIP Conference Proceedings, 2017. 1863. 080003.
17. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* Stabilization of the program motion of control object with elastically connected elements. (2018) AIP Conference Proceedings, 2018. 2040. 150014.

18. *Ivanov G., Alferov G., Gorovenko P., Sharlay A.* Estimation of periodic solutions number of first-order differential equations. (2018) AIP Conference Proceedings, 2018. 1959. 080006.
19. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V., Selitskaya E.* A new method to study the periodic solutions of the ordinary differential equations using functional analysis. (2019) Mathematics. 7 (8). 677.
20. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G.,Korolev V.* On estimation for numbers of periodic and almost periodic solutions of first-order ordinary differential equations. (2020) AIP Conference Proceedings, 2020. 2293. 060003.
21. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Sharlay A.S., Fedorov V.* Estimation for number of almost periodic solutions of first-order ordinary differential equations. (2019) AIP Conference Proceedings, 2019. 2116. 080004.
22. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* Almost periodic solutions of first-order ordinary differential equations. (2018) Mathematics. 6 (9). 171.
23. *Иванов Г.Г, Алфёров Г.В., Королёв В.С.* Периодические решения дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. № 3(46). С. 5–15.

Derivative number apparatus and application possibilities

G. G. Ivanov, G. V. Alferov, V. S. Korolev
Saint Petersburg State University
35, Universitetsky Avenue, Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russia
alferovgv@gmail.com;
guennadi.ivanov@gmail.com;
vokorol@bk.ru; 8(812) 428-43-56

The article develops the apparatus of derived numbers, the use of which allows one to study the behavior of functions of several variables without requiring their differentiability. In addition, the application of this apparatus to the problem of integrability of the field of planes tangent to a differential manifold allows one to generalize the Frobenius theorem and expand its scope by weakening the restrictions on the degree of smoothness of the differential manifolds under consideration. Conditions and criteria for using the apparatus of partial and external derivatives of numbers are proposed.

Keywords: *differential equations; derivative numbers; nonsmooth analysis; field of hyperplanes; differential manifolds.*