УДК 517.977.934

О квазиособых управлениях в дискретных системах с запаздыванием

К. Б. Мансимов
Бакинский государственный университет
Az, 1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З. Халилова, 23
Институт систем управления НАН Азербайджана
Az, 1141, Азербайджан, г. Баку, ул. Б. Вагабзаде, 68
kamilbmansimov@gmail.com

Рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой разностных уравнений с запаздывающим аргументом и терминальным функционалом качества при предположении выпуклости области управления.
Доказан аналог линеаризованного условия максимума. Установлены ряд необходимых условий оптимальности в случае вырождения линаризованного условия максимума.

Ключевые слова: *система с запаздыванием; линаризованный принцип максимума; квазиособое управление; многоточечное необходимое условие оптимальности.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2021-3-19-24

Введение

Как известно (см., например, [1–4]) особые, в смысле принципа максимума Понтрягина управления в случае гладкости краевой части рассматриваемого уравнения по управлению и выпуклости области управления, являются также квазиособыми, т.е. для них и линаризованное (дифференциальное [2]) условие максимума также вырождаются. Обратное, вообще говоря, не верно, т.е. квазиособые управления могут и не быть особыми, в смысле принципа максимума Понтрягина.

Следовательно, необходимые условия оптимальности квазиособых управлений позволяют во многих случаях выявлять не оптимальность также тех допустимых управлений, которые без вырождения удовлетворяют условию максимума Понтрягина.

В предлагаемой работе при предположении выпуклости области управления рассматривается одна дискретная терминальная задача оптимального управления с запаздыванием.

Установлен аналог линеаризованного условия максимума и исследован случай его вырождения (квазиособый случай [1]).

1. Постановка задачи

Предположим, что требуется найти минимальное значение терминального функционала

$$S(u) = \varphi\big(x(t_1)\big), \tag{1}$$

при ограничениях

$$u(t) \in U \subset R^r,$$
$$t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}, \tag{2}$$
$$x(t+1) = f\big(t, x(t), x(t-h), u(\tau)\big), t \in T, \tag{3}$$
$$x(t_0 - h) = x_{t_0-h}, \dots, x(t_0) = x_0. \tag{4}$$

Здесь t_0, t_1 — заданные числа, причем разность $t_1 - t_0$ есть натуральное число, h —заданное натуральное число (запаздывание), $x(t_0 - h), \dots, x(t_0)$ — заданные постоянные векторы, U — заданное непустое ограниченное и выпуклое множество, $u(t)$ — r-мерный дискретный вектор управляющих воздействий (допустимое управление),

$\varphi(x)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, а $f(t,x,y,u)$ – заданная n –мерная вектор-функция непрерывная по (x,y,u) вместе с частными производными по (x,y,u) до второго порядка включительно, при всех $t \in T$.

Допустимое управление, доставляющее минимальное значение функционалу (1) при ограничениях (2)–(4) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t),x(t))$ – оптимальным процессом.

2. Специальное приращение функционала качества

Пусть $(u(t),x(t))$ и $(\bar{u}(t) = \Delta u(t) - u(t), \bar{x}(t) = \Delta x(t) - x(t))$ – некоторые допустимые процессы. Тогда, ясно, что приращение $\Delta x(t)$ траектории $x(t)$ будет решением задачи

$$\Delta x(t+1) = f(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t),\bar{u}(t)) - f(t,x(t),y(t),u(t)), \tag{5}$$

$$\Delta x(t_0 - h) = 0, \dots, \Delta x(t_0) = 0, \tag{6}$$

где

$$y(t) = x(t-h).$$

Введем аналог функции Гамильтона–Понтрягина

$$H(t,x,y,u,\psi) = \psi' f(t,x,y,u),$$

где $\psi(t)$ – некоторая пока неизвестная n-мерная вектор-функция.

Учитывая вид функции Гамильтона–Понтрягина, из (5) получим, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\Delta x(t+1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[H(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t),\bar{u}(t),\psi(t)) - H(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)) \right]. \tag{7}$$

Принимая во внимания (6) легко доказать, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\Delta x(t+1) = \psi'(t_1-1)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\Delta x(t). \tag{8}$$

С учетом тождеств (7), (8) запишем приращение функционала качества

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) =$$

$$= \bar{\varphi}(x(t_1)) - \varphi(x(t_1)) + \psi'(t_1-1)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[H(t,\bar{x}(t),\bar{y}(t),\bar{u}(t),\psi(t)) - H(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)) \right]. \tag{9}$$

В дальнейшем будут использованы обозначения типа

$$H_x[t] \equiv H_x(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)),$$
$$H_{xx}[t] \equiv H_{xx}(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)),$$
$$H_u[t] \equiv H_u(t,x(t),y(t),u(t),\psi(t)),$$
$$f_x[t] \equiv f_x(t,x(t),y(t),u(t)),$$
$$f_y[t] \equiv f_y(t,x(t),y(t),u(t)),$$
$$f_u[t] \equiv f_u(t,x(t),y(t),u(t)).$$

Применяя формулу Тейлора из (9), получим

$$\Delta S(u) = \varphi'_x(x(t_1))\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2) + \psi'(t_1-1)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[H'_x[t]\Delta x(t) + H'_y[t]\Delta y(t) + H'_u[t]\Delta u(t) \right] - \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t) + \Delta y'(t)H_{yy}[t]\Delta y(t) + \Delta x'(t)H_{xy}[t]\Delta y(t) + \Delta y'(t)H_{yx}[t]\Delta x(t) + \Delta x'(t)H_{xu}[t]\Delta u(t) + \Delta y'(t)H_{yu}[t]\Delta u(t) + \Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t) + \Delta u'(t)H_{uy}[t]\Delta y(t) + \right.$$

$$+\Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)] -$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2[\|\Delta x(t)\| + \|\Delta y(t)\| + \|\Delta u(t)\|]^2. \tag{10}$$

Далее имеет место тождество

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_y'[t]\Delta y(t) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1-h} H_y[t+h]\Delta x(t). \tag{11}$$

Теперь учитывая тождество (11) в (10) и предполагая, что $\psi(t)$ является решением линейного уравнения

$$\psi(t-1) = H_x[t] - H_y[t+h], \quad t < t_1, \tag{12}$$

с начальным условием

$$\psi(t_1 - 1) = -\varphi_x(x(t_1)), \psi(t) = 0, \quad t > t_1 - 1 \tag{13}$$

из (10) получим формулу приращения функционала (1) в виде

$$\Delta S(u) =$$
$$= -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u'[t]\Delta u(t) + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1) -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t) + \Delta y'(t)H_{yy}[t]\Delta y(t)$$
$$+ \Delta x'(t)H_{xy}[t]\Delta y(t) + \Delta y'(t)H_{yx}[t]\Delta x(t)$$
$$+\Delta x'(t)H_{xu}[t]\Delta u(t) + \Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t) +$$
$$+ \Delta y'(t)H_{yu}[t]\Delta u(t) + \Delta u'(t)H_{uy}[t]\Delta y(t) +$$
$$+\Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)] + o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2) -$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2[\|\Delta x(t_1)\| + \|\Delta y(t_1)\| + \|\Delta u(t_1)\|]^2. \tag{14}$$

Из соотношений (5), (6) получаем, что приращение $\Delta x(t)$ траектории $x(t)$ является решением линеаризованной задачи

$$\Delta x(t+1) =$$
$$f_x'[t]\Delta x(t) + f_y'[t]\Delta y(t) + f_u'[t]\Delta u(t) +$$
$$+ o_3(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(t-h)\| + \|\Delta u(t)\|), \tag{15}$$

$$\Delta x(t_0 - h) = 0, \dots, \Delta x(t_0) = 0. \tag{16}$$

Далее ясно, что

$$\Delta x(t+1) = \sum_{\tau=t_0}^{t}[\Delta x(\tau+1) - \Delta x(\tau)] =$$
$$= \sum_{\tau=t_0}^{t}[f(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{x}(\tau-h), \bar{u}(\tau)) -$$
$$- f(\tau, x(\tau), x(\tau-h), u(\tau)) - \Delta x(\tau)]. \tag{17}$$

Из (17) переходя к норме и используя условия Липшица, будем иметь

$$\|\Delta x(t+1)\| =$$
$$= L_1\sum_{\tau=t_0}^{t}[\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(t-h)\| + \|\Delta u(t)\|]. \tag{18}$$

Здесь $L_1 = const > 0$ некоторая постоянная.

Из оценки (18), учитывая неравенство

$$\sum_{\tau=t_0}^{t}\|\Delta x(\tau-h)\| \le \sum_{\tau=t_0}^{t-h}\|\Delta x(\tau)\|,$$

а затем применяя дискретный аналог леммы Гронуолла–Беллмана получим, что

$$\|\Delta x(t)\| \le L_2\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\|\Delta u(t)\|, \tag{19}$$

Здесь $L_2 = const > 0$ некоторое постоянное.

Пусть $v(t) \in U, \ t \in T$ произвольное допустимое управление, а $\varepsilon \in [0,1]$ – произвольное число. Тогда в силу выпуклости множества U специальное приращение допустимого управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$u(t: \varepsilon) = \varepsilon[v(t) - u(t)], t \in T. \tag{20}$$

Через $\Delta x(t: \varepsilon)$ обозначим специально приращение траектории $x(t)$. Используя оценку (19) и формулу (10) с помощью линеаризованной системы (15)–(16), нетрудно доказать справедливость разложения

$$\Delta x(t: \varepsilon) = \varepsilon l(t) + o(\varepsilon; t), \tag{21}$$

где $l(t)$ является решением уравнения

$$l(t+1) = f_x[t]l(t) + f_y[t]l(t-h) +$$
$$+ f_u[t](v(t) - u(t)), \tag{22}$$

с начальным условием

$$l(t_0-h)=0,\dots,l(t_0)=0. \tag{23}$$

Уравнение (22) представляет собой аналог уравнения в вариациях [1, 3].

Принимая во внимание (20), (21) в (14) приходим к разложению:

$$S(u(t)+\Delta u(t:\varepsilon))-S(u(t))=$$
$$=-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_u'[t](v(t)-u(t))+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta l'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta l(t_1)-$$
$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[l'(t)H_{xx}[t]l(t)+l'(t)H_{xy}[t]l(t-h)$$
$$+l'(t-h)H_{yx}[t]l(t)+$$
$$+l'(t-h)H_{yy}[t]l(t-h)+$$
$$+l'(t)H_{xu}[t](v(t)-u(t))+$$
$$+(v(t)-u(t))'H_{ux}[t]l(t)+$$
$$+l'(t-h)H_{yu}[t](v(t)-u(t))+$$
$$+(v(t)-u(t))'(t)H_{uy}[t]l(t-h)+$$
$$+(v(t)-u(t))'(t)H_{uu}[t](v(t)-u(t))]+o(\varepsilon^2). \tag{24}$$

Из разложения (24) сразу следует

Теорема 1. (линеаризованный принцип максимума). Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_u'[t](v(t)-u(t))\le 0 \tag{25}$$

выполнялось для всех $v(t)\in U,\ t\in T$.

Соотношение (25) представляет аналог линеаризованного условия максимума и является необходимым условиям оптимальности первого порядка.

Изучим случай его вырождения.

Определение. Допустимое управление $u(t)$ назовем *квазиособым управлением*, если для всех $v(t)\in U,\ t\in T$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_u'[t](v(t)-u(t))=0. \tag{26}$$

Из разложения (24) с учетом тождества (26), сразу следует, что для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\Delta l'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta l(t_1)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[l'(t)H_{xx}[t]l(t)+l'(t)H_{xy}[t]l(t-h)+$$
$$+l'(t-h)H_{yx}[t]l(t)+$$
$$+l'(t-h)H_{yy}[t]l(t-h)+$$
$$+l'(t)H_{xu}[t](v(t)-u(t))+$$
$$+(v(t)-u(t))'H_{ux}[t]l(t)+$$
$$+l'(t-h)H_{yu}[t](v(t)-u(t))+$$
$$+(v(t)-u(t))'(t)H_{uy}[t]l(t-h)+$$
$$+(v(t)-u(t))'(t)H_{uu}[t](v(t)-u(t))]\ge 0 \tag{27}$$

выполнялось для всех $v(t)\in U,\ t\in T$.

Неравенство (27) является неявным необходимым условием оптимальности квазиособых управлений. Но используя его можно получить необходимое условие оптимальности, выраженное через параметры рассматриваемой задачи.

Уравнение (22) является линейным неоднородным разностным уравнением относительно $l(t)$ с начальным условием (23). Поэтому решение задачи (22)–(23) на основе результата из [3] допускает представление

$$l(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau)f_u[\tau](v(\tau)-u(\tau)). \tag{28}$$

Здесь $F(t,\tau)-(n\times n)$ матричная функция, являющаяся решением задачи

$$F(t,\tau-1)=F(t,\tau)f_x[\tau]+$$
$$+F(t,\tau+h)f_y[\tau+h],\tau<t, \tag{29}$$
$$F(t,t-1)=E,F(t,\tau)=0,\tau>t-1, \tag{30}$$

где $E-(n\times n)$ единичная матрица.

Займемся преобразованием отдельных слагаемых с помощью представления (28).

Ясно, что

$$\Delta l'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta l(t_1)=$$
$$=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(v(t)-u(t))'f_u[\tau]F'(t_1,\tau)\varphi_{xx}(x(t_1))$$

$$F(t_1,s)f_u[s]\big(v(s)-u(s)\big). \tag{31}$$

Далее, поскольку

$$l(t-h)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t-h,\tau)f_u[\tau]\big(v(\tau)-u(\tau)\big), \tag{32}$$

то используя (28), (32) получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[l'(t)H_{xx}[t]l(t)+l'(t)H_{xy}[t]l(t-h)+$$
$$+l'(t-h)H_{yx}[t]l(t)+$$
$$+l'(t-h)H_{yy}[t]l(t-h)]=$$
$$=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(v(t)-$$
$$-u(t))'f_u[\tau]\left[\sum_{t=\max(\tau,s)+1}^{t_1-1}F'(t,\tau)H_{xx}[t]F(t,s)\right.$$
$$+F'(t,\tau)H_{xy}[t]F(t-h,s)+$$
$$+F'(t-h,\tau)H_{yx}[t]F(t,s)+$$
$$\left.+F'(t-h,\tau)H_{yy}[t]F(t-h,s)\right]$$
$$f_u[s]\big(v(s)-u(s)\big). \tag{33}$$

Теперь используя представления (32), (28) получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[l'(t)H_{xu}[t]\big(v(t)-u(t)\big)+$$
$$+\big(v(t)-u(t)\big)'H_{ux}[t]l(t)+$$
$$+l'(t-h)H_{yu}[t]\big(v(t)-u(t)\big)$$
$$+\big(v(t)-u(t)\big)'H_{uy}[t]l(t-h)]=$$
$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t-1}[v(\tau)-u(\tau)'f_u[\tau].\right.$$
$$F(t,\tau)H_{xu}[t]\big(v(t)-u(t)\big)+$$
$$+\big(v(\tau)-u(\tau)\big)'H_{ux}[t]F(t,\tau)$$
$$f_u[\tau]\big(v(t)-u(t)\big)+ \tag{34}$$
$$+\big(v(\tau)-u(\tau)\big)'f'_u[\tau]F'(t-h,\tau)$$
$$H_{yu}[t]\big(v(t)-u(t)\big)]\,]=$$
$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t-1}[\big(v(\tau)-u(\tau)\big)'f'_u[\tau](F'(t,\tau)\right.$$
$$\left.H_{xu}[t]+F'(t-h,\tau)H_{yu}[t]\big)\big(v(t)-u(t)\big)\right]$$

Пусть $K(\tau,s)-(n\times n)$ матричная функция, определяемая формулой

$$K(\tau,s)=-F'(t_1,\tau)\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)F(t_1,s)+$$
$$+\sum_{t=\max(\tau,s)+1}^{t_1-1}[F'(t,\tau)H_{xx}[t]F(t,s)+$$
$$+F'(t,\tau)H_{xy}[t]F(t-h,s)+$$
$$+F'(t-h,\tau)H_{yx}[t]F(t,s)+$$
$$+F'(t-h,\tau)H_{yy}[t]F(t-h,s)]. \tag{35}$$

Учитывая формулу (35), а также тождества (31), (33), (34) неравенство (22) записывается в виде

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\big(v(\tau)-u(\tau)\big)f'_u[\tau]K(\tau,s)f_u[s]$$
$$\big(v(s)-u(s)\big)+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\big(v(t)-u(t)\big)'H_{uu}[t]\big(v(t)-u(t)\big)+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}[\big(v(t)-u(t)\big)'(H_{xu}[t]F(t,\tau)+\right.$$
$$\left.+H_{uy}[t]F(t-h,\tau)\Big)\big(v(\tau)-u(\tau)\big)\right]\le 0. \tag{36}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. При сделанных предположениях для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство (36) выполнялось для всех

$$u(t)\in U, t\in T.$$

Приведем одно следствие вытекающее из теоремы 2.

Следствие. Если $u(t)$ квазиособое управление, то для его оптимальности необходимо, чтобы неравенство

$$\left(v-u(\theta)\right)' f_u'[\theta] K(\theta,\theta) f_u[\theta]\left(v-u(\theta)\right)+ \\ +\left(v-u(\theta)\right)' H_{uu}[\theta]\left(v-u(\theta)\right)\le 0 \quad (37)$$

выполнялось для всех $\theta \in T$ и $v \in U$.

Как видно, необходимое условие оптимальности (37) слабее, чем (36). Но оно относительно легко проверяется.

Список литературы

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Либроком, 2011, 256 с.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления М.: Либроком, 2011, 272 с.
3. *Мансимов К.Б.* Дискретные системы. Баку. Изд.-во: БГУ, 2013. 151 с.
4. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* К теории необходимых условий оптимальности в дискретных системах управления // Управляемые системы. ИМ. СО АН СССР. 1979. Вып. 18. С. 14–25.

On quasi-singular controls in discrete systems with delay

K. B. Mansimov

Baku State University; 23, Z. Khalilova st., Baku, Az, 1148, Azerbaijan

Institute of Control Systems of the National Academy of Sciences of Azerbaijan

68, B.Vahabzade st., Baku, Az, 1141, Azerbaijan

kamilbmansimov@gmail.com

Cconsider an optimal control problem described by a system of differential controls with a delaying argument and a multipoint performance functional under the assumption that the control domain is convex.

A number of integral and multipoint necessary optimality conditions in the case of degeneration of the linearized maximum condition are established.

Keywords: *system with delay; linearized maximum principle; quasi-singular control; multipoint necessary optimality condition.*