МЕХАНИКА
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 530.12:531.551

Математические модели центров равнодавлений в звездных системах

Г. С. Гуревич
Институт интеграции и профессиональной адаптации
Израиль, г. Нетания
garoldgurevich37@gmail.com

С. В. Лутманов, О. Г. Пенский
Пермский государственный национальный исследовательский университет
614099, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15
ogpensky@mail.ru

Предлагаются математические модели, позволяющие вычислять координаты центров равнодавлений в звездных системах и решать обратную задачу определения источников излучения материальной субстанции при формировании макротел. Показывается не единственность решения прямой и обратной задач.

Ключевые слова: *математическая модель; звездная система; центр равнодавлений; сила; давление.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2021-3-25-30

Звезды в галактике, излучая материальную субстанцию, образуют центры равнодавлений, в которых рождаются макротела.

В работе [1] дано следующее определение центра равнодавления: "Центр равнодавления – это точка в пространстве, где равнодействующая сил, порожденная давлением материальной субстанции, излучаемой другими точками (звездами), равна нулю".

Принцип формирования центров равнодавлений звездами в интервале 5, 10 и 15 световых лет показан на рисунке.

В работах [2–4] исследован процесс образования центров равнодавления и приведены иллюстрации образования центров равнодавлений в звездных системах.

В статье [5] приведен пример, показывающий, что центров равнодавлений в одной и той же звездной системе может быть несколько.

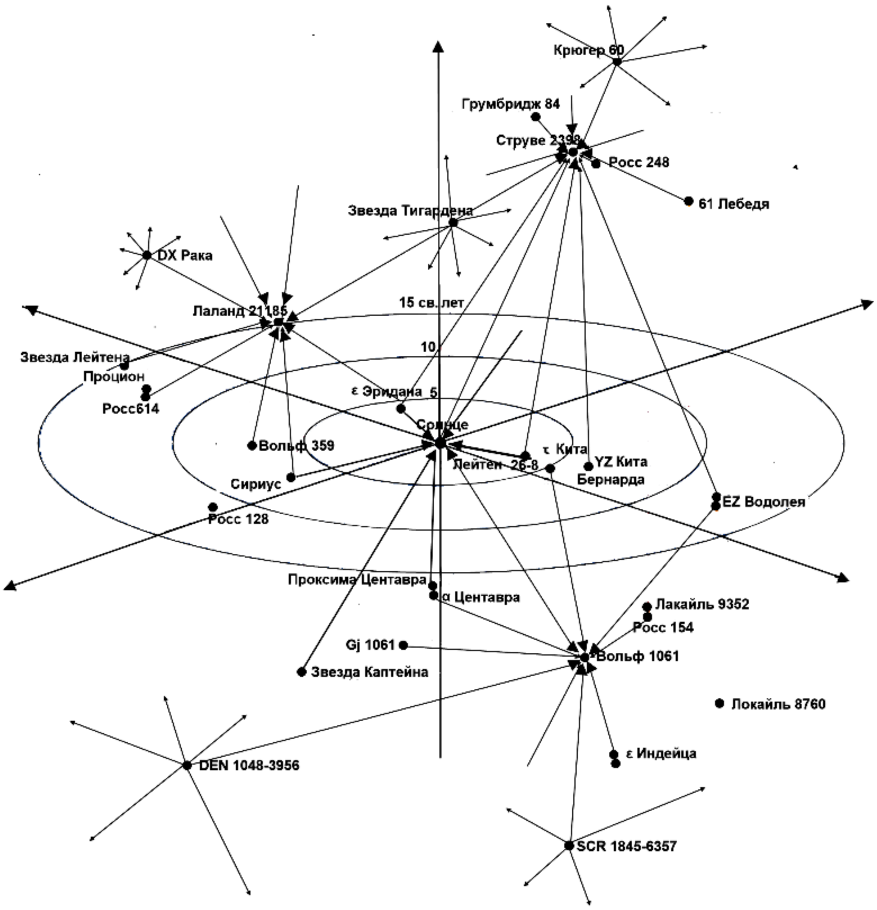
В настоящей статье предлагаются математические модели, позволяющие вычислять координаты центров равнодавлений в звездных системах, исходя из известных координат излучающих материальную субстанцию звезд (прямая задача), а также описан способ вычисления координат излучающих материальную субстанцию звезд, исходя из известных координат центра равнодавления (обратная задача).

Заметим, что существует множество систем координат, позволяющих описывать расположение макротел во Вселенной [6].

В дальнейшем для простоты математической формализации мы будем использовать декартову систему координат с центром координат аналогичным эклиптической системе [7].

Использование декартовой системы нисколько не умаляет общность решаемых ниже задач, так как существующие координаты звезд легко переводятся из одной системы координат в другую.

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ЗВЁЗД В ИНТЕРВАЛЕ 5,10 И 15 СВЕТОВЫХ ЛЕТ



Обозначения

Введем следующие обозначения.

Пусть

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in R^3 -$$ центр равнодавления (центр);

$P \subset R^3 -$ область возможного положения центра;

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{pmatrix}, \cdots, u^{(m)} = \begin{pmatrix} u_1^{(m)} \\ u_2^{(m)} \\ u_3^{(m)} \end{pmatrix} \in R^3 -$$ источники излучения материальной субстанции;

$k_1, \cdots, k_m \in R^1 -$ коэффициенты пропорциональности;

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i -$$ символ скалярного произведения векторов $u, v \in R^3$;

$$\|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(u_i - v_i\right)^2} -$$ норма разности векторов $u, v \in R^3$;

$$\|F_i(v)\| = \frac{k_i}{\left\|v - u^{(i)}\right\|^2}, \ i \in \{1, \cdots, m\} -$$ величина силы, действующая со стороны $i-го$ источника на точку, находящуюся в центре $v \in R^3$;

$e_i(v) = \dfrac{v - u^{(i)}}{\left\| v - u^{(i)} \right\|}, i \in \{1, \cdots, m\}$ – единичный вектор, направленный от i-го источника к центру $v \in R^3$;

$$F_i(v) = \left\| F_i(v) \right\| \cdot e_i(v) =$$

$$= \frac{k_i}{\left\| v - u^{(i)} \right\|^2} \cdot \frac{v - u^{(i)}}{\left\| v - u^{(i)} \right\|} = k_i \cdot \frac{v - u^{(i)}}{\left\| v - u^{(i)} \right\|^3}, i \in \{1, \cdots, m\} -$$

вектор силы со стороны i-го источника, действующей на точку, помещенную в центр $v \in R^3$;

$$F(v) = \sum_{i=1}^{m} F_i(v) = \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot \frac{v - u^{(i)}}{\left\| v - u^{(i)} \right\|^3} -$$

вектор равнодействующей всех сил со стороны источников, приложенных к точке, помещенной в центр $v \in R^3$.

Прямая задача (задача 1)

Дано:

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{pmatrix} \in R^3, \cdots, u^{(m)} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1^{(m)} \\ u_2^{(m)} \\ u_3^{(m)} \end{pmatrix} \in R^3, k_1, \cdots, k_m \in R^1, \quad P \subset R^3.$$

Найти центр $v^0 = \begin{pmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \\ v_3^0 \end{pmatrix} \in P$ из условия равенства нулю равнодействующей $F(v)$.

Решение:

Вектор $v^0 \in R^3$ будем искать как решение следующей задачи математического программирования на условный экстремум:

$$\left\| F(v) \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{m} F_i(v), \sum_{i=1}^{m} F_i(v) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot \frac{v - u^{(i)}}{\left\| v - u^{(i)} \right\|^3}, \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot \frac{v - u^{(i)}}{\left\| v - u^{(i)} \right\|^3} \right\rangle \to \min,$$

$$u \in P \subset R^3.$$

Нулевое значение целевой функции на оптимальном векторе $v^0 \in R^3$ будет означать, что прямая **задача** решена и вектор $v^0 \in R^3$ представляет собой радиус-вектор искомого центра. Заметим, что в случае отсутствия ограничений, т. е. когда $P = R^3$, у задачи всегда имеется решение $v_0 = \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \end{pmatrix}$.

Пример 1

Дано:

$$m = 4, u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1,$$

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in [-1, 1] \right\}.$$

Вектор равнодействующей записывается в виде

$$F(v) = \sum_{i=1}^{4} F_i(v) = \sum_{i=1}^{4} k_i \cdot \frac{v - u^{(i)}}{\left\| v - u^{(i)} \right\|^3}, \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Целевая функция имеет вид

$$\left\| F(v) \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{4} \frac{v - u_i}{\left\| v - u_i \right\|^3}, \sum_{i=1}^{4} \frac{v - u_i}{\left\| v - u_i \right\|^3} \right\rangle.$$

Пример решался в среде пакета "Mathematica".

Для решения задачи математического программирования применялась команда

NMinimize[{*F*[x1,x2,x3],−1≤x1≤1,−1≤x2 ≤1,−1≤x3≤1},{x1,x2,x3}].

Результаты расчетов:

{2.90892*10^-30, {x1 -> 0.5, x2 -> 0.5, x3 -> 0.5}}.

Как видно из приведенных расчетов, значение целевой функции в найденной точке $v^0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ равно 2.90892×10^{-30}, т. е практически ноль. Следовательно, точка $v^0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ является искомым центром.

Обратная задача (задача 2)

Используя обозначения предыдущего пункта, сформулируем задачу, обратную к **задаче 1.**

Дано:

$$v^0 = \begin{pmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \\ v_3^0 \end{pmatrix} \in R^3, k_1, \cdots, k_m \in R^1, \quad P_i \subset R^3, i \in \{1, \cdots, m\}.$$

Найти:

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{pmatrix} \in P_1, \cdots, u^{(m)} = \begin{pmatrix} u_1^{(m)} \\ u_2^{(m)} \\ u_3^{(m)} \end{pmatrix} \in P_m,$$

для которых

$$F\left(v^0\right) = \sum_{i=1}^{m} F_i\left(v^0\right) = \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot \frac{v^0 - u^{(i)}}{\left\| v^0 - u^{(i)} \right\|^3} = 0.$$

Здесь $P_i \subset R^3, i \in \{1, \cdots, m\}$ – области предположительного расположения источников. Очевидно, что если допустить свободное расположение источников во всем пространстве R^3, то **задача 2** будет иметь бесконечно много легко строящихся решений.

Решение:

Вектора $u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{pmatrix} \in P_1, \cdots, u^{(m)} = \begin{pmatrix} u_1^{(m)} \\ u_2^{(m)} \\ u_3^{(m)} \end{pmatrix} \in P_m$ будем искать как решение задачи математического программирования на условный экстремум, с целевой функцией

$$\left\| F\left(v^0\right) \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{m} F_i\left(v^0\right), \sum_{i=1}^{m} F_i\left(v^0\right) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot \frac{v^0 - u^{(i)}}{\left\| v^0 - u^{(i)} \right\|^3}, \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot \frac{v^0 - u^{(i)}}{\left\| v^0 - u^{(i)} \right\|^3} \right\rangle \to \min,$$

совпадающей с целевой функцией прямой задачи. Однако здесь ее переменными являются $u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{pmatrix}, \cdots, u^{(m)} = \begin{pmatrix} u_1^{(m)} \\ u_2^{(m)} \\ u_3^{(m)} \end{pmatrix}$, а параметры $v^0 = \begin{pmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \\ v_3^0 \end{pmatrix} \in R^3$ считаются известными.

Ограничения на переменные имеют вид

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{pmatrix} \in P_1, \cdots, u^{(m)} = \begin{pmatrix} u_1^{(m)} \\ u_2^{(m)} \\ u_3^{(m)} \end{pmatrix} \in P_m.$$

Задача 2 считается решенной, если оптимальное значение целевой функции равно нулю.

Пример 2

Дано:

$$v^0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \in R^3, \quad P_1, \cdots, P_4 \subset R^3,$$

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} \middle| \left(u_{11} - 1\right)^2 + \left(u_{12}\right)^2 + \left(u_{13}\right)^2 \le 1^2 \right\},$$

$$P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{pmatrix} \middle| \left(u_{21}\right)^2 + \left(u_{22} - 1\right)^2 + \left(u_{23}\right)^2 \le 1^2 \right\},$$

$$P_3 = \left\{ \begin{pmatrix} u_{31} \\ u_{32} \\ u_{33} \end{pmatrix} \middle| \left(u_{31}\right)^2 + \left(u_{32}\right)^2 + \left(u_{33} - 1\right)^2 \le 1^2 \right\},$$

$$P_3 = \left\{ \begin{pmatrix} u_{41} \\ u_{42} \\ u_{43} \end{pmatrix} \middle| (u_{41}-1)^2 + (u_{42}-1)^2 + (u_{43}-1)^2 \le 1^2 \right\}.$$

Вектор равнодействующей записывается в виде

$$F\left(v^0\right) = \sum_{i=1}^{4} k_i \cdot \frac{v^0 - u^{(i)}}{\left\| v^0 - u^{(i)} \right\|^3},$$

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{pmatrix}, \cdots, u^{(4)} = \begin{pmatrix} u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \\ u_3^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Целевая функция имеет вид

$$\left\| F\left(v^0\right) \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{4} \frac{v^0 - u_i}{\left\| v^0 - u_i \right\|^3}, \sum_{i=1}^{4} \frac{v^0 - u_i}{\left\| v^0 - u_i \right\|^3} \right\rangle.$$

Пример решался в среде пакета "Mathematica".

Для решения задачи математического программирования применялась команда

NMinimize[{*F*[u11,u12,u13,u21,u22,u23,u31,u32,u33,u41,u42,u43]

Результаты расчетов:

{3.62867*10^-16, {u11 -> 1.17403, u12 -> 0.102601, u13 -> 0.556784,

u21 -> -0.571177, u22 -> 0.885622, u23 -> 0.786926, u31 -> 0.14806,

u32 -> -0.411013, u33 -> 0.401974, u41 -> 0.321408, u42 -> 1.26398,

u43 -> 0.405633}}.

Как видно из расчетов, значение целевой функции в найденных точках

$$u^{(10)} = \begin{pmatrix} 1.17403 \\ 0.102601 \\ 0.556784 \end{pmatrix}, u^{(20)} = \begin{pmatrix} -0.571177 \\ 0.885622 \\ 0.786926 \end{pmatrix},$$

$$u^{(30)} = \begin{pmatrix} 0.14806 \\ -0.411013 \\ 0.401974 \end{pmatrix}. u^{(40)} = \begin{pmatrix} 0.321408 \\ 1.26398 \\ 0.405633 \end{pmatrix}$$

равно 3.62867×10^{-16} 3.62867*10^-16, т. е практически ноль. Следовательно, точки $u^{(10)}, u^{(20)}, u^{(30)} u^{(40)}$ являются искомыми источниками. Найденные точки не совпадают с теми, которые фигурировали в условиях прямой задачи **примера 1**. Отсюда следует не единственность решения обратной задачи.

Представляет интерес решение прямой задачи**,** в которой положение источников определяется векторами $u^{(10)}, u^{(20)}, u^{(30)}, u^{(40)}$, найденными как решение обратной задачи, а множество $P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in [-1,1] \right\}$ совпадает с ограничениями исходной **задачи 1**.

Результаты расчетов:

{1.51618*10^-20, {x1 -> 0.500006, x2 -> 0.500002, x3 -> 0.5}}.

Как видно из расчетов, значение целевой функции в найденной точке

$$v^0 = \begin{pmatrix} 0.500006 \\ 0.500002 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

равно

1.51618×10^{-20} , т. е. практически ноль.

Легко видеть, что имеет место совпадение полученных координат центра с теми, которые были вычислены при решении исходной прямой задачи в **примере 1**.

Заключение

Таким образом, в настоящей статье впервые предложены математические модели, позволяющие решать прямую и обратную задачи определения координат центров равнодавлений и источников формирования центров равнодавлений.

Другие группы звезд образуют другие центры равнодавлений. Звезды могут входить одновременно в другие группы звезд, образуя другие центры равнодавлений.

Список литературы

1. *Гуревич Г.С.* Математическое моделирование процессов в гравитационном поле макротел // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып.1(52). С.16–24.
2. *Гуревич Г.С., Каневский С.Н.* Материя, пространство, время, гравитация. М.: ИПО "У Никитских ворот", 2009. 248 с. ISBN978-5- 91366-112-8.
3. *Гуревич Г.С., Каневский С.Н.* Чем Солнце тянет Землю? М.: ИПО "У Никитских ворот", 2012. 72 с. ISBN 978-5-91366-376-4.

4. *Каневский С.Н., Гуревич Г.С.* Астродинамика М.: ИПО "У Никитских ворот", 2009. 384-с. ISBN 978-5-91366-081-7.
5. *Гуревич Г.С., Пенский О.Г.* О существовании центров равнодавлений, являющихся центрами концентрации материальной субстанции // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 2(53). С. 25–28. DOI: 10.17072/1993-0550-2021-2-25-28.
6. *Серапинас Б.Б.* Геодезические основы карт. URL: http://www.geogr.msu.ru/cafedra/karta/docs/GOK/gok_lecture_2.pdf (дата обращения 16.06.2021).
7. *Эклиптическая* система координат. URL: https://vuzlit.ru/511614/eklipticheskaya_sistema_koordinat (дата обращения 16.06.2021).

Mathematical models of centers of equal pressure in stellar systems

G. S. Gurevich
Institute for Integration and Professional Adaptation Israel, Netanya
garoldgurevich37@gmail.com

S. V. Lutmanov, O. G. Pensky
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
ogpensky@mail.ru; +7 342 239 63 09

Mathematical models are proposed that allow calculating the coordinates of the centers of equal pressure in stellar systems and solving the inverse problem of determining the radiation sources of a material substance during the formation of macro-bodies. It is shown that the solutions of direct and inverse problems are not unique.

Keywords: *mathematical model; stellar system; center of equal pressure; force; pressure.*