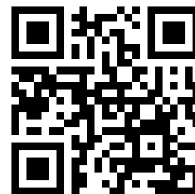


Научная статья

УДК 519.6

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-30-48

<https://elibrary.ru/rfmqyd>



Симметричные системы координатных функций для однородных краевых задач на прямоугольнике с уравнениями в частных производных

Дмитрий Феликсович Пастухов¹, Юрий Феликсович Пастухов²

^{1,2} Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, Новополоцк, Белоруссия

¹ dmitrij.pastuhov@mail.ru

² pulsar1900@mail.ru

Аннотация. В данной работе впервые предложена идея решения однородных краевых задач с однородными уравнениями в частных производных на выделенном классе функций двух переменных с сохранением симметрии. Для достижения наилучшей точности используется 7 четных или 7 нечетных координатных функций по каждой переменной. Показано, что произвольную непрерывную функцию в правой части уравнения можно представить суммой четырех непрерывных функций, по одной из каждого класса симметрии. Методом Бубнова–Галеркина численно находится решение в каждом из 4 классов симметрии функций, решение задачи равно сумме четырех частных решений. В первой части работы доказаны 3 леммы и теорема – критерий принадлежности решения данному классу четности. В работе численно решены четыре краевые задачи с уравнением Пуассона, правая часть которого принадлежит разным классом четности. Равномерная норма невязки решения задач имеет порядок 10^{-8} . Также преимуществом предложенного алгоритма является быстроедействие, которое, например, в 5–10 раз превосходит метод векторной прогонки для решения уравнения Пуассона.

Ключевые слова: численные методы; краевая задача; уравнение Пуассона; бигармоническое уравнение; дифференциальные уравнения в частных производных; функциональный анализ.

Для цитирования: Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф. Симметричные системы координатных функций для однородных краевых задач на прямоугольнике с уравнениями в частных производных // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 3(74). С. 30–48. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-30-48. <https://elibrary.ru/rfmqyd>.

Благодарности: авторы выражают благодарность профессору Волосову К. А. (д.ф.–м.н.), Волосовой А. К. (к.ф.–м.н.), Волосовой Н. К. за исследования по тематике краевых задач с уравнениями в частных производных.

Статья поступила в редакцию 13.08.2026; одобрена после рецензирования 20.09.2026; принята к публикации 06.10.2026.



© Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Research article

Symmetric Systems of Coordinate Functions for Homogeneous Boundary Value Problems on a Rectangle With Partial Differential Equations

Dmitry F. Pastukhov¹, Yuri F. Pastukhov²

^{1,2} Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk, Novopolotsk, Belarus

¹ dmitrij.pastuhov@mail.ru

² pulsar1900@mail.ru

Abstract. This paper is the first to propose the idea of solving homogeneous boundary value problems with homogeneous partial differential equations on a selected class of functions of two variables while preserving symmetry. To achieve the best accuracy, 7 even or 7 odd coordinate functions are used for each variable. It is shown that an arbitrary continuous function on the right side of the equation can be represented as the sum of four continuous functions, one from each symmetry class. Using the Bubnov–Galerkin method, a solution is found numerically in each of the 4 symmetry classes of functions; the solution to the problem is equal to the sum of four partial solutions. In the first part of the work, 3 lemmas and a theorem are proved – a criterion for a solution to belong to a given parity class. We numerically solve four boundary value problems with the Poisson equation, the right side of which belongs to different parity classes. The uniform norm of the discrepancy in solving the problems is of the order of 10^{-8} . Another advantage of the proposed algorithm is its high-speed performance; for example, it outperforms the vector sweep method for solving the Poisson equation by a factor of 5 to 10.

Keywords: numerical methods; boundary value problem; Poisson's equation; biharmonic equation; partial differential equations; functional analysis.

For citation: Pastukhov, D. F. and Pastukhov, Yu. F. (2026), "Symmetric Systems of Coordinate Functions for Homogeneous Boundary Value Problems on a Rectangle With Partial Differential Equations", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(74), pp. 30–48, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-30-48, <https://elibrary.ru/rfmqyd>.

Acknowledgments: the authors express their gratitude to Professor K. A. Volosov (Dr. Sci. in Phys. and Math.), A. K. Volosova (Cand. Sci. in Phys. and Math.), N. K. Volosova for research on boundary value problems with partial differential equations.

The article was submitted 13 Aug 2026; approved after review 20 Sep 2026; accepted for publication 06 Oct 2026.

Введение

В данной работе показано, что симметрии функций (четность и нечетность) играют важную роль даже в краевых задачах с уравнениями в частных производных (УЧП). Аналитические методы решения задач с УЧП приведены в работах [1] (метод параметра), [2] (метод функции Грина). В работе [3, стр.29], [3, стр.77] описаны простейшие уравнения эллиптического типа – Пуассона и гармоническое уравнение и методы их решения. Уравнение Пуассона применяется в гидродинамике [4], а бигармоническое [5] в механике. В работе [6] указано, что важно правильно выбрать системы базисных (координатных) функций, например, для численного решения уравнения Фредгольма, используя сплайны аналитического и неаналитического типа, тогда удастся решить интегральные уравнения с разрывом первого рода в интегральных ядрах.

В работе [7], как и в данной краевой задаче на прямоугольнике модельными являются уравнение Пуассона и бигармоническое уравнения, которые автор решает численно методом коллокации и методом наименьших квадратов [8]. В работах [9], [10] в краевых задачах с обыкновенным дифференциальным уравнением замечено удобство

применения четных и нечетных координатных функций относительно середины отрезка. В данной работе идея четных и нечетных координатных функций впервые обобщена на двухмерный случай для краевых задач в прямоугольнике.

Постановка задачи

Рассмотрим однородную краевую задачу для однородного уравнения в частных производных эллиптического типа на прямоугольнике. Примерами таких уравнений является уравнение Пуассона [3, стр. 29] (задача (1)) или бигармоническое уравнение [3, стр. 77] (задача (2)). Особенность однородных уравнений эллиптического типа заключается в том, что все слагаемые в уравнении имеют одинаковый порядок частных производных, например, второй или четвертый. Пусть неизвестная функция принадлежит классу функций $u(x, y) \in C^2[a, b] \times [c, d]$, $(u(x, y) \in C^4[a, b] \times [c, d])$:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), & a < x < b, \quad c < y < d \\ u|_{x=a} = u|_{x=b} = u|_{y=c} = u|_{y=d} = 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = f(x, y), & a < x < b, \quad c < y < d \\ u|_{x=a} = u|_{x=b} = u|_{y=c} = u|_{y=d} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Задача (1) моделирует распределение электрического потенциала внутри прямоугольного металлического заземленного контура с непрерывным распределением электрического заряда внутри. Задача (1) также описывает стационарное распределение температуры внутри прямоугольной пластины, стороны которой находятся при температуре тающего льда с источниками тепла внутри. Задача (2) применяется в механике сплошной среды для описания напряжений и деформации прямоугольного бруса [3, стр. 80].

Для однородных краевых задач (1), (2) введем следующие системы линейно-независимых однородных координатных функций:

$$\begin{cases} X_j^u(x) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{2j} (x^2 - x(a+b) + ab)^j, & j = 1, 2, \dots \quad a < x < b \\ Y_i^u(y) = \left(\frac{2}{d-c}\right)^{2i} (y^2 - y(c+d) + cd)^i, & i = 1, 2, \dots \quad c < y < d \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} X_j^h(x) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{2(j-1)} \sin\left(\frac{\pi}{b-a}(2x - a - b)\right) (x^2 - x(a+b) + ab)^{j-1}, & j = 1, 2, \dots \\ Y_i^h(y) = \left(\frac{2}{d-c}\right)^{2(i-1)} \sin\left(\frac{\pi}{d-c}(2y - c - d)\right) (y^2 - y(c+d) + cd)^{i-1}, & i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4)$$

Систему координатных функций (3) назовем четной, а систему (4) назовем нечетной координатной системой (верхний индекс в формулах (3), (4)). В силу построения координатные функции систем (3), (4) однородны: $X_j(a) = X_j(b) = 0$, $Y_i(c) = Y_i(d) = 0$, $i, j = 1, 2, \dots$.

Системы координатных функций (3), (4) имеют 2 важных преимущества:

1. Функции системы (3) не изменяют знака на отрезке $[a, b]$ (на отрезке $[c, d]$), а функции системы (4) изменяют знак ровно один раз на отрезке $[a, b]$ (на отрезке $[c, d]$), что уменьшает погрешность численного интегрирования в формулах скалярного произведения (13), (14).

2. Максимальное значение равномерной нормы функций типа (3) равно 1 в середине отрезка, а для функций типа (4) меньше единицы, то есть системы функций (3), (4) – ограничены в равномерной норме.

Рассмотрим некоторые свойства координатных систем (3), (4).

Лемма 1. Координатные функции системы (3) и их вторые (четвертые) производные четны относительно середины отрезка $\bar{c} = (a + b)/2$.

Доказательство.

Введем переменную $x|_a^b = t|_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} + \bar{c}$, $dx = dt$. Тогда имеем

$$x^2 - x(a + b) + ab = (x - a)(x - b) = \left(t + \frac{b - a}{2}\right)\left(t - \frac{b - a}{2}\right) = t^2 - \frac{(b - a)^2}{4}.$$

$$X_j^{\text{ч}}(x) = \left(\frac{2}{b - a}\right)^{2j} (x^2 - x(a + b) + ab)^j = \left(\frac{2}{b - a}\right)^{2j} \left(t^2 - \frac{(b - a)^2}{4}\right)^j,$$

$$X_j^{\text{ч}}(-t) = \left(\frac{2}{b - a}\right)^{2j} \left((-t)^2 - \frac{(b - a)^2}{4}\right)^j = \left(\frac{2}{b - a}\right)^{2j} \left(t^2 - \frac{(b - a)^2}{4}\right)^j = X_j^{\text{ч}}(t),$$

то есть, координатная функция четна. Найдем первую и вторую производные

$$\frac{d}{dx} X_j^{\text{ч}}(x) = \frac{d}{dt} X_j^{\text{ч}}(t) = 2tj \left(\frac{2}{b - a}\right)^{2j} \left(t^2 - \frac{(b - a)^2}{4}\right)^{j-1}, \frac{d}{dt} X_j^{\text{ч}}(-t) = -\frac{d}{dt} X_j^{\text{ч}}(t) -$$

первая производная является нечетной функцией.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} X_j^{\text{ч}}(x) &= \frac{d^2}{dt^2} X_j^{\text{ч}}(t) = 4t^2 j(j - 1) \left(\frac{2}{b - a}\right)^{2j} \left(t^2 - \frac{(b - a)^2}{4}\right)^{j-2} + \\ &+ 2j \left(\frac{2}{b - a}\right)^{2j} \left(t^2 - \frac{(b - a)^2}{4}\right)^{j-1}, j \geq 2 \quad \frac{d^2}{dt^2} X_j^{\text{ч}}(-t) = \frac{d^2}{dt^2} X_j^{\text{ч}}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Вторая производная является четной функцией. Аналогично, производная третьего порядка ($j \geq 3$) является нечетной функцией, а производная четвертого порядка ($j \geq 4$) четной функцией относительно средней точки $\bar{c} = (a + b)/2$ отрезка $[a, b]$. Доказательство четности производных четного порядка (нечетности производных нечетного порядка) для функций $Y_i(y)$ системы (3) относительно середины $\bar{c} = (c + d)/2$ отрезка $[c, d]$ аналогично. **Лемма 1** доказана.

Лемма 2. Координатные функции системы (4) и их вторые (четвертые) производные нечетны относительно середины отрезка $\bar{c} = \frac{a+b}{2}$, $H = \frac{b-a}{2}$.

Доказательство.

Если $i = 1$, имеем $x = t + \frac{a+b}{2}$, $t = x - \frac{a+b}{2}$

$$X_1^{\text{н}}(x) = \sin\left(\frac{\pi}{b - a}(2x - a - b)\right) = \sin\left(\frac{2\pi t}{b - a}\right), X_1^{\text{н}}(-t) = -\sin\left(\frac{2\pi t}{b - a}\right) = -X_1^{\text{н}}(t)$$

$$\frac{d}{dx} X_1^{\text{н}}(x) = \frac{d}{dt} X_1^{\text{н}}(t) = \frac{2\pi}{b - a} \cos\left(\frac{2\pi t}{b - a}\right), \frac{d}{dt} X_1^{\text{н}}(-t) = \frac{d}{dt} X_1^{\text{н}}(t) \quad - \text{четная функция,}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} X_1^{\text{н}}(x) = \frac{d^2}{dt^2} X_1^{\text{н}}(t) = -\frac{4\pi^2}{(b - a)^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{b - a}\right), \frac{d^2}{dt^2} X_1^{\text{н}}(-t) = -\frac{d^2}{dt^2} X_1^{\text{н}}(t) \quad - \text{нечетная функция}$$

В общем случае ($i > 1$) имеем

$$\begin{aligned} X_j^H(x) &= \left(\frac{2}{b-a}\right)^{2(j-1)} \sin\left(\frac{\pi}{b-a}(2x-a-b)\right) (x^2 - x(a+b) - ab)^{j-1}, \\ X_j^H(t) &= \left(\frac{2}{b-a}\right)^{2(j-1)} \sin\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right) (t^2 - H^2)^{j-1}, X_j^H(-t) = -X_j^H(t) - \text{нечетная функция} \\ \frac{d}{dt} X_j^H(t) &= \left(\frac{2}{b-a}\right)^{2(j-1)} \left[\frac{2\pi \cos\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right)}{b-a} (t^2 - H^2)^{j-1} + 2t(j-1) \sin\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right) (t^2 - H^2)^{j-2} \right], \\ \frac{d}{dt} X_j^H(-t) &= \frac{d}{dt} X_j^H(t) - \text{четная функция.} \end{aligned}$$

Запишем производную второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} X_j^H(t) &= \left(\frac{2}{b-a}\right)^{2(j-1)} \left[\frac{-4\pi^2 \sin\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right)}{(b-a)^2} (t^2 - H^2)^{j-1} + \right. \\ &+ \frac{8\pi t}{b-a} (j-1) \cos\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right) (t^2 - H^2)^{j-2} + \sin\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right) (2(j-1)(t^2 - H^2)^{j-2} + \\ &\left. + 4t^2(j-1)(j-2)(t^2 - H^2)^{j-3}) \right], j \geq 3. \end{aligned} \quad (6)$$

Она является нечетной функцией, так как каждое из трех слагаемых последнего выражения нечетно, в итоге имеем $\frac{d^2}{dt^2} X_j^H(-t) = -\frac{d^2}{dt^2} X_j^H(t)$.

Аналогично, производная третьего порядка и любого нечетного порядка – четная функция. А производная четвертого порядка и любого четного порядка от координатной функции системы (4) – нечетная функция. **Лемма 2** доказана.

Замечание 1. В точках $x = a, x = b$ координатные функции $X_j(x)$ системы (4) имеют нули j -го порядка, ($j \geq 1$) и являются нечетными на всем отрезке $[a, b]$.

Определение 1. Говорят, что непрерывная функция $f_1(x, y) \in C_{0,0}(D)$ принадлежит первому классу симметрии (обозначение $C_{0,0}$) в области D , если она четна по каждой из переменных x, y . То есть, $f_1(-x, y) = f_1(x, y), f_1(x, -y) = f_1(x, y)$.

Определение 2. Говорят, что непрерывная функция $f_2(x, y) \in C_{0,1}(D)$ принадлежит второму классу симметрии (обозначение $C_{0,1}$) в области D , если она четна по переменной x и нечетна по переменной y . То есть, $f_2(-x, y) = f_2(x, y), f_2(x, -y) = -f_2(x, y)$.

Определение 3. Говорят, что непрерывная функция $f_3(x, y) \in C_{1,0}(D)$ принадлежит третьему классу симметрии (обозначение $C_{1,0}$) в области D , если она нечетна по переменной x и четна по переменной y . То есть, $f_3(-x, y) = -f_3(x, y), f_3(x, -y) = f_3(x, y)$.

Определение 4. Говорят, что непрерывная функция $f_4(x, y) \in C_{1,1}(D)$ принадлежит четвертому классу симметрии (обозначение $C_{1,1}$) в области D , если она нечетна по каждой из переменных x, y . То есть, $f_4(-x, y) = -f_4(x, y), f_4(x, -y) = -f_4(x, y)$.

Лемма 3. Любая непрерывная функция двух переменных $f(x, y) \in C(D)$ представима суммой четырех непрерывных функций, принадлежащих определенным выше классам симметрии, то есть $f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) + f_4(x, y)$. Где $f_1(x, y) \in C_{0,0}(D), f_2(x, y) \in C_{0,1}(D), f_3(x, y) \in C_{1,0}(D), f_4(x, y) \in C_{1,1}(D)$.

Доказательство.

Рассмотрим вспомогательные функции на базе функции $f(x, y), (x, y) \in D$:

$$f_1(x, y) = \frac{1}{4} [(f(x, y) + f(-x, y)) + (f(x, -y) + f(-x, -y))] \in C(D)$$

$$f_2(x, y) = \frac{1}{4}[(f(x, y) + f(-x, y)) - (f(x, -y) + f(-x, -y))] \in C(D)$$

$$f_3(x, y) = \frac{1}{4}[(f(x, y) - f(-x, y)) + (f(x, -y) - f(-x, -y))] \in C(D)$$

$$f_4(x, y) = \frac{1}{4}[(f(x, y) - f(-x, y)) - (f(x, -y) - f(-x, -y))] \in C(D).$$

Во-первых:

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) + f_4(x, y) = f(x, y).$$

Во-вторых:

1.

$$f_1(-x, y) = \frac{1}{4}[(f(-x, y) + f(x, y)) + (f(-x, -y) + f(x, -y))] = f_1(x, y)$$

$$f_1(x, -y) = \frac{1}{4}[(f(x, -y) + f(-x, -y)) + (f(x, y) + f(-x, y))] = f_1(x, y)$$

То есть, $f_1(x, y) \in C_{0,0}(D)$.

2.

$$f_2(-x, y) = \frac{1}{4}[(f(-x, y) + f(x, y)) - (f(-x, -y) + f(x, -y))] = f_2(x, y)$$

$$f_2(x, -y) = \frac{1}{4}[(f(x, -y) + f(-x, -y)) - (f(x, y) + f(-x, y))] = -f_2(x, y)$$

То есть, $f_2(x, y) \in C_{0,1}(D)$.

3.

$$f_3(-x, y) = \frac{1}{4}[(f(-x, y) - f(x, y)) + (f(-x, -y) - f(x, -y))] = -f_3(x, y)$$

$$f_3(x, -y) = \frac{1}{4}[(f(x, -y) - f(-x, -y)) + (f(x, y) - f(-x, y))] = f_3(x, y)$$

То есть, $f_3(x, y) \in C_{1,0}(D)$.

4.

$$f_4(-x, y) = \frac{1}{4}[(f(-x, y) - f(x, y)) - (f(-x, -y) - f(x, -y))] = -f_4(x, y)$$

$$f_4(x, -y) = \frac{1}{4}[(f(x, -y) - f(-x, -y)) - (f(x, y) - f(-x, y))] = -f_4(x, y)$$

То есть, $f_4(x, y) \in C_{1,1}(D)$. **Лемма 3** доказана.

Теорема 1 (критерий принадлежности функции определенному классу симметрии). Для того чтобы решение задачи (1) $u(x, y) \in C^2[a, b] \times [c, d]$ (решение задачи (2) $u(x, y) \in C^4[a, b] \times [c, d]$) принадлежало определенному классу симметрии, необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения (1) или уравнения (2) принадлежала тому же классу симметрии.

Доказательство.

Для определенности проведем, например, для класса функций (пример обозначения при сужении класса функций смотрим в работе [11, стр. 73]):

$$C_{0,0}^2[a, b] \times [c, d] = C_{0,0}[a, b] \times [c, d] \cap C^2[a, b] \times [c, d].$$

Необходимость. Пусть решение задачи (1) или решение задачи (2) принадлежит классу $u(x, y) \in C_{0,0}^2[a, b] \times [c, d]$ ($u(x, y) \in C_{0,0}^4[a, b] \times [c, d]$). Тогда решение, разложенное по системе координатных функций вида (3) по каждой переменной x, y представимо в виде двойной суммы, в которой каждое слагаемое принадлежит классу $C_{0,0}^2[a, b] \times [c, d]$ ($C_{0,0}^4[a, b] \times [c, d]$). $C_{i,j}$ – коэффициенты разложения:

$$u(x, y) = u(t + \bar{c}, s + \bar{c}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n C_{i,j} X_j^q(t) Y_i^q(s). \quad (7)$$

Где:

$$x = t + \bar{c} = t + \frac{a+b}{2}; y = s + \bar{c} = s + \frac{c+d}{2}$$

$$X_j^q(t) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{2j} \left(t^2 - \frac{(b-a)^2}{4}\right)^j, Y_i^q(s) = \left(\frac{2}{d-c}\right)^{2i} \left(s^2 - \frac{(d-c)^2}{4}\right)^i, i, j \geq 1.$$

На основании **Леммы 1** каждое слагаемое решения в левой части уравнения (1) после взятия частной производной четного порядка сохраняет исходную четность. В итоге сумма

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{tt} + u_{ss} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n C_{i,j} \left(\frac{d^2 X_j^q(t)}{dt^2} Y_i^q(s) + X_j^q(t) \frac{d^2 Y_i^q(s)}{ds^2} \right).$$

$$\in C_{0,0}^2[a, b] \times [c, d]$$

Но в силу уравнения (1) функция из класса $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \in C_{0,0}^2[a, b] \times [c, d]$, который является подмножеством класса функций $C_{0,0}[a, b] \times [c, d]$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Теоремы 1 докажем от противного. Пусть правая часть $f(x, y)$ уравнения (1) $f(x, y) \in C_{0,0}[a, b] \times [c, d]$, то есть четна по двум переменным x, y , а решение задачи (1) не принадлежит классу $C_{0,0}[a, b] \times [c, d]$. Тогда из **Леммы 3** следует, что общее решение задачи (1) представимо (по системам координатных функций (3), (4)) в виде

$$u(x, y) = \sum_i \sum_j C_{ij}^1 X_j^q(t) Y_i^q(s) + \sum_i \sum_j C_{ij}^2 X_j^q(t) Y_i^h(s) + \sum_i \sum_j C_{ij}^3 X_j^h(t) Y_i^q(s) +$$

$$+ \sum_i \sum_j C_{ij}^4 X_j^h(t) Y_i^h(s). \quad (8)$$

Где в формуле (8) только первая сумма является функцией из класса $C_{0,0}[a, b] \times [c, d]$ и из класса $C_{0,0}^2[a, b] \times [c, d]$, $u(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция в задаче (1). И хотя бы одно слагаемое во второй или третьей или в четвертой сумме тождественно не равно нулю. На основании результатов **Леммы 1**, **Леммы 2** каждое слагаемое в четырех суммах формулы (8) сохранит принадлежность исходному классу и после действия оператора Лапласа $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Таким образом, функция в левой части уравнения (1) $u_{xx} + u_{yy}$ не из класса $C_{0,0}^2[a, b] \times [c, d]$, в то время как правая часть уравнения $f(x, y) \in C_{0,0}[a, b] \times [c, d]$. То есть, $f(x, y)$ четна по каждой переменной, а левая часть $u_{xx} + u_{yy}$ не является четной хотя бы по одной переменной. Полученное противоречие завершает доказательство достаточности. **Теорема 1** доказана.

Замечание 2. Аналогично с использованием **Леммы 1** и **Леммы 2** доказываем одновременную принадлежность решения задачи (1) (решение задачи (2)) и правой части соответствующего уравнения второму, третьему и четвертому классу симметрии.

Замечание 3. Благодаря доказанным Леммам 1, 2, 3, методом редукции линейной задачи (1) (задачи (2)) для каждого класса симметрии можно решать однородные краевые задачи для однородных уравнений в частных производных не только любого четного порядка, но и для уравнений нечетного порядка, разлагая правую часть уравнения на 4

слагаемых согласно **Лемме 3**. Однако для однородного уравнения нечетного порядка решение и правую часть уравнения нужно выбирать из сопряженных классов симметрии.

Используя метод редукции линейной задачи, сведем задачу (1) (задачу (2)):

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), & a < x < b, \quad c < y < d \\ u|_{x=a} = u|_{x=b} = u|_{y=c} = u|_{y=d} = 0 \end{cases}$$

к решению четырех однородных краевых задач:

$$t = x - \frac{a+b}{2}; s = y - \frac{c+d}{2}$$

$$1) \begin{cases} u_{xx}^1 + u_{yy}^1 = f_1(x, y), & a < x < b, \quad c < y < d, \quad f_1(x, y) \in C_{0,0}[a, b] \times [c, d] \\ u^1|_{x=a} = u^1|_{x=b} = u^1|_{y=c} = u^1|_{y=d} = 0, u^1(x, y) \in C_{0,0}^2[a, b] \times [c, d] \end{cases} \quad (9)$$

$$f_1(x, y) = \frac{1}{4}[(f(x, y) + f(-x, y)) + (f(x, -y) + f(-x, -y))]$$

$$u^1(x, y) = \sum_{p=1}^n \sum_{i+j \leq p+1} C_{ij}^1 X_j^q(t) Y_i^q(s) = \sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^p C_k^1 X_{p+1-i}^q(t) Y_i^q(s)$$

с координатными функциями по формуле (3). Где индекс k одномерного вектора C_k^1 связан с i условием $k = \frac{p(p-1)}{2} + i, i = \overline{1, p}, p = \overline{1, n}$ если $\frac{p(p-1)}{2} < k \leq \frac{p(p+1)}{2}$.

$$2) \begin{cases} u_{xx}^2 + u_{yy}^2 = f_2(x, y), & a < x < b, \quad c < y < d, \quad f_2(x, y) \in C_{0,1}[a, b] \times [c, d] \\ u^2|_{x=a} = u^2|_{x=b} = u^2|_{y=c} = u^2|_{y=d} = 0, u^2(x, y) \in C_{0,1}^2[a, b] \times [c, d] \end{cases} \quad (10)$$

$$f_2(x, y) = \frac{1}{4}[(f(x, y) + f(-x, y)) - (f(x, -y) + f(-x, -y))]$$

$$u^2(x, y) = \sum_{p=1}^n \sum_{i+j \leq p+1} C_{ij}^2 X_j^q(t) Y_i^H(s) = \sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^p C_k^2 X_{p+1-i}^q(t) Y_i^H(s)$$

с координатными функциями по формулам (3) и (4). Где индекс k одномерного вектора C_k^2 связан с i условием $k = \frac{p(p-1)}{2} + i, i = \overline{1, p}, p = \overline{1, n}$ если $\frac{p(p-1)}{2} < k \leq \frac{p(p+1)}{2}$.

$$3) \begin{cases} u_{xx}^3 + u_{yy}^3 = f_3(x, y), & a < x < b, \quad c < y < d, \quad f_3(x, y) \in C_{1,0}[a, b] \times [c, d] \\ u^3|_{x=a} = u^3|_{x=b} = u^3|_{y=c} = u^3|_{y=d} = 0, u^3(x, y) \in C_{1,0}^2[a, b] \times [c, d] \end{cases} \quad (11)$$

$$f_3(x, y) = \frac{1}{4}[(f(x, y) - f(-x, y)) + (f(x, -y) - f(-x, -y))]$$

$$u^3(x, y) = \sum_{p=1}^n \sum_{i+j \leq p+1} C_{ij}^3 X_j^H(t) Y_i^q(s) = \sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^p C_k^3 X_{p+1-i}^H(t) Y_i^q(s)$$

с координатными функциями по формулам (3) и (4). Где индекс k одномерного вектора C_k^3 связан с i условием $k = \frac{p(p-1)}{2} + i, i = \overline{1, p}, p = \overline{1, n}$ если $\frac{p(p-1)}{2} < k \leq \frac{p(p+1)}{2}$.

$$4) \begin{cases} u_{xx}^4 + u_{yy}^4 = f_4(x, y), \quad a < x < b, \quad c < y < d, \quad f_4(x, y) \in C_{1,1}[a, b] \times [c, d] \\ u^4|_{x=a} = u^4|_{x=b} = u^4|_{y=c} = u^4|_{y=d} = 0, u^4(x, y) \in C_{1,1}^2[a, b] \times [c, d] \end{cases} \quad (12)$$

$$f_4(x, y) = \frac{1}{4} [(f(x, y) - f(-x, y)) - (f(x, -y) - f(-x, -y))]$$

$$u^4(x, y) = \sum_{p=1}^n \sum_{i+j \leq p+1} C_{ij}^4 X_j^H(t) Y_i^H(s) = \sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^p C_k^4 X_{p+1-i}^H(t) Y_i^H(s)$$

с координатными функциями по формуле (4). Где индекс k одномерного вектора C_k^4 связан с i условием $k = \frac{p(p-1)}{2} + i, i = \overline{1, p}, p = \overline{1, n}$, если $\frac{p(p-1)}{2} < k \leq \frac{p(p+1)}{2}$.

Общее решение задачи (1) (задачи (2)) запишем в виде

$$u(x, y) = u^1(x, y) + u^2(x, y) + u^3(x, y) + u^4(x, y)$$

Будем решать задачи (9), (10), (11), (12) для нахождения векторов неизвестных коэффициентов $C_k^1, C_k^2, C_k^3, C_k^4, k = \overline{1, \frac{n(n+1)}{2}}$ методом Бубнова–Галеркина. Например, в задаче (9) левую и правую части уравнения умножим скалярно на координатную функцию $X_{p_1+1-i_1}^q(t) Y_{i_1}^q(s), k_1 = \frac{p_1(p_1-1)}{2} + i_1, i_1 = \overline{1, p_1}, p_1 = \overline{1, n}$, получим:

$$u_{xx}^1 + u_{yy}^1 = f_1(x, y),$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^p C_k^1 \left(\frac{d^2}{dt^2} X_{p+1-i}^q(t) Y_i^q(s) + X_{p+1-i}^q(t) \frac{d^2}{ds^2} Y_i^q(s) \right) &= f_1(x, y), \\ \sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^p C_k^1 \left(\left\langle \frac{d^2}{dt^2} X_{p+1-i}^q(t) Y_i^q(s) + X_{p+1-i}^q(t) \frac{d^2}{ds^2} Y_i^q(s), X_{p_1+1-i_1}^q(t) Y_{i_1}^q(s) \right\rangle \right) &= \\ \langle f_1(t, s), X_{p_1+1-i_1}^q(t) Y_{i_1}^q(s) \rangle &= f_{k_1} \end{aligned} \quad (13)$$

Где: $k_1 = \frac{p_1(p_1-1)}{2} + i_1, i_1 = \overline{1, p_1}, p_1 = \overline{1, n}$.

Формула (13) равносильна системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} A_{k_1, k} C_k^1 = f_{k_1}, \quad (14)$$

$$\text{Где: } A_{k_1, k} = \left\langle \frac{d^2}{dt^2} X_{p+1-i}^q(t) Y_i^q(s) + X_{p+1-i}^q(t) \frac{d^2}{ds^2} Y_i^q(s), X_{p_1+1-i_1}^q(t) Y_{i_1}^q(s) \right\rangle$$

$$f_{k_1} = \langle f_1(t, s), X_{p_1+1-i_1}^q(t) Y_{i_1}^q(s) \rangle$$

$$k = \frac{p(p-1)}{2} + i, i = \overline{1, p}, p = \overline{1, n}, \text{ если } \frac{p(p-1)}{2} < k \leq \frac{p(p+1)}{2}$$

$$k_1 = \frac{p_1(p_1-1)}{2} + i_1, i_1 = \overline{1, p_1}, p_1 = \overline{1, n}, \text{ если } \frac{p_1(p_1-1)}{2} < k_1 \leq \frac{p_1(p_1+1)}{2}.$$

Аналогично записывается алгоритм Бубнова–Галеркина для частных случаев в задачах (10), (11), (12). В этих задачах формально можно получить формулы из формул (13), (14), меняя нижний индекс для правой части функции $f_i(x, y), i = 2, 3, 4$ и меняя

одновременно верхний индекс $z, z_1 = \{ч, н\}$ соответственно в задачах (10), (11), (12). для координатных функций $X_{p+1-i}^z(t), Y_i^{z_1}(s), X_{p+1-i_1}^z(t), Y_{i_1}^{z_1}(s)$.

Матричные коэффициенты $A_{k_1, k}$ и правая часть f_{k_1} в формуле (14) используют скалярное произведение двух функций. Численное значение скалярного произведения, вычислялось программой по формуле (15) из работы [9], [10]:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b \int_c^d f_1(x, y) f_2(x, y) dx dy = 25h_1 h_2 \sum_{i=0}^{n_2} \sum_{j=0}^{n_1} C_i^{n_2} C_j^{n_1} f_1(x_i, y_j) f_2(x_i, y_j) + O(h_1^{12} + h_2^{12}) \quad (15)$$

$$x_i = a + h_1 i, y_j = c + h_2 j, h_1 = \frac{b-a}{n_1}, h_2 = \frac{d-c}{n_2}, i = \overline{0, n_1}, j = \overline{0, n_2}, n_s = 10p_s, s = 1, 2$$

Где весовые коэффициенты $C_i^{n_1}, C_j^{n_2}$ квадратурной формулы имеют вид

$$C_i^{n_s} = \begin{cases} \frac{16067}{299376}, \text{ если } i = 0 \text{ или } i = n_s, \\ \frac{16067}{149688}, \text{ если } i \equiv 0(mod 10) \text{ и } 0 < i < n_s \\ \frac{26575}{74844}, \text{ если } i \equiv 1(mod 10) \text{ или } i \equiv 9(mod 10) \\ \frac{-16175}{99792}, \text{ если } i \equiv 2(mod 10) \text{ или } i \equiv 8(mod 10) \\ \frac{5675}{6237}, \text{ если } i \equiv 3(mod 10) \text{ или } i \equiv 7(mod 10) \\ \frac{-4825}{5544}, \text{ если } i \equiv 4(mod 10) \text{ или } i \equiv 6(mod 10) \\ \frac{17807}{12474}, \text{ если } i \equiv 5(mod 10) \\ s = 1, 2 \end{cases}$$

Точные и численные решения с помощью алгоритма (3)–(15)

Рассмотрим несколько примеров численного решения однородных краевых задач для уравнения Пуассона на прямоугольнике с известными точными решениями.

Пример 1. Правая часть уравнения Пуассона четна по переменным t, s относительно середины квадрата со стороной π .

$$\begin{cases} \sin^2 x \sin y = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + t \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + s \right) = \cos^2(t) \cos(s) \\ u_{xx} + u_{yy} = \sin^2 x \sin y = \sin y \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Решение примера (16) ищем в виде $u(x, y) = f(x) \sin y$. Подставляя решение в систему уравнений (16), получим

$$\begin{cases} f''(x) - f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad 0 < x < \pi. \\ f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения $f_{00}(x) = A \cosh x + B \sinh x$. Частное решение ищем в виде $f_q(x) = C_0 + C_1 \cos 2x, f_q''(x) = -4C_1 \cos 2x$. После подстановки получим

$$-4C_1 \cos 2x - C_0 - C_1 \cos 2x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, C_0 = -\frac{1}{2}, C_1 = \frac{1}{10}$$

Общее решение неоднородного уравнения $f_{\text{он}}(x) = A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{10}$. С учетом краевых условий получим $f(0) = 0$, $A - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 0$, $A = \frac{2}{5}$, $f(\pi) = 0$, $\frac{2}{5} \operatorname{ch} \pi + B \operatorname{sh} \pi - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 0$, $B = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \right)$. Запишем ответ с учетом найденных коэффициентов A , B

$$u(x, y) = \left(\frac{2}{5} \left(\operatorname{ch} x + \left(\frac{1 - \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} x \right) - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{10} \right) \sin y. \quad (17)$$

Таблица 1. Вычисленное программой численное $u_{i,j}^{\text{num}}$ и точное значение $u_{i,j}^{\text{exact}}$ по формуле (17). Число координатных функций $n=7$. $n_1 = n_2 = 60$

x_j	y_i	$u_{i,j}^{\text{num}}$	$u_{i,j}^{\text{exact}}$	$ u_{i,j}^{\text{exact}} - u_{i,j}^{\text{num}} $
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
0.785398163	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
1.57079632	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
2.35619449	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
3.14159265	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
0.000000000	0.785398163	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
0.785398163	0.785398163	-0.2042391699	0.2042391704	4.94569-010
1.57079632	0.785398163	-0.3115408340	-0.3115408348	8.250E-010
2.35619449	0.785398163	-0.2042391699	-0.2042391704	4.94560E-010
3.14159265	0.785398163	0.000000000	0.000000000	0.0000E+000
0.000000000	1.570796326	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
0.785398164	1.570796326	-0.2888378048	-0.2888378033	1.43244E-009
1.570796326	1.570796326	-0.4405852714	-0.4405852738	2.40345E-009
2.356194490	1.570796326	-0.2888378033	-0.2888378048	1.43244E-009
3.141592653	1.570796326	0.000000000	0.000000000	0.00000000
0.000000000	1.570796326	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
0.7853981633	1.570796326	-0.2888378033	-0.2888378048	1.43244E-009
1.570796326	1.570796326	-0.4405852714	-0.4405852738	2.40345E-009
2.356194490	1.570796326	-0.2888378033	-0.2888378048	1.43244E-009
3.141592653	1.570796326	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
0.000000000	2.356194490	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
0.7853981633	2.356194490	-0.2042391699	-0.2042391704	4.94560E-010
1.570796326	2.356194490	-0.31154083401	-0.31154083484	8.25066E-010
2.356194490	2.356194490	-0.2042391699	-0.2042391704	4.94560E-010
3.141592653	2.356194490	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000

Координатные функции по переменным x, y заданы формулой (3). Решение примера 1 программируем по формуле (9). Программа дает равномерную норму (Чебышева) вычислительной погрешности в примере 1 алгоритмом (3)–(15):

$$\|u^{exact} - u^{num}\|_C = \max_{\substack{i=0, n_2 \\ j=0, n_1}} |u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num}| = 2.403451992982752E - 009,$$

$$\|u^{exact}\|_C = \max_{\substack{i=0, n_2 \\ j=0, n_1}} |u_{i,j}^{exact}| = 0.440585273864645.$$

Пример 2. Правая часть уравнения Пуассона четна по переменной t и нечетна по переменной s относительно середины квадрата со стороной π .

$$\begin{cases} \sin x \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^3 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) s^3 = \cos(t) s^3 \\ u_{xx} + u_{yy} = \sin x \cdot \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^3, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi. \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Решение примера (18) ищем в виде $u(x, y) = f(y) \sin x$. Подставляя решение в систему уравнений (18), получим:

$$\begin{cases} f''(y) - f(y) = \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^3, \quad 0 < y < \pi, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = y - \frac{\pi}{2} \\ f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(z) - f(z) = z^3, \quad -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2} \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения $f_{00}(z) = A \operatorname{ch} z + B \operatorname{sh} z$. Частное решение ищем в виде $f_{\text{ч}}(z) = C_0 z + C_1 z^3$, $f_{\text{ч}}''(z) = 6C_1 z$. После подстановки получим:

$$6C_1 z - C_0 z - C_1 z^3 = z^3, \quad C_0 = 6C_1 = -6, \quad C_1 = -1.$$

Общее решение неоднородного уравнения $f_{0\text{н}}(z) = A \operatorname{ch} z + B \operatorname{sh} z - 6z - z^3$. С учетом краевых условий получим:

$$\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, A \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right) - B \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\pi + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, A \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right) + B \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3\pi - \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = 0 \end{cases}, \quad A = 0, B = \frac{3\pi + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Запишем ответ с учетом найденных коэффициентов A, B :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \left(\left(\frac{3\pi + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right) \operatorname{sh} z - 6z - z^3 \right) \sin x = \\ &= \left(\left(\frac{3\pi + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right) \operatorname{sh}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - 6\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^3 \right) \sin x. \end{aligned} \quad (19)$$

Таблица 2. Вычисленное программой численное $u_{i,j}^{num}$ и точное значение $u_{i,j}^{exact}$ по формуле (19). Число координатных функций $n=7$. $n_1 = n_2 = 70$

x_j	y_i	$u_{i,j}^{num}$	$u_{i,j}^{exact}$	$ u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num} $
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.000000E+000
0.6731984257	0.0000000000	4.1987116E-017	-1.107540E-015	1.1495274E-015
1.346396851	0.0000000000	6.5653555E-017	-1.731819E-015	1.797473E-015
2.019595277	0.0000000000	6.0673040E-017	-1.600442E-015	1.6611152E-015
2.692793703	0.0000000000	2.9218668E-017	-7.707323E-016	7.999510E-016
0.0000000000	0.6731984257	0.0000000000	0.0000000000	0.000000E+000
0.6731984257	0.6731984257	0.1220789217	0.1220789423	-2.063954E-008
1.346396851	0.6731984257	0.1908902876	0.1908903209	-3.333566E-008
2.0195952773	0.67319842576	0.1764091508	0.1764091828	-3.198914E-008
2.692793703	0.6731984257	0.08495417623	0.08.495418499	-8.759563E-009
0.0000000000	1.346396851	0.0000000000	0.0000000000	0.000000E+000
0.6731984257	1.346396851	0.03107955473	0.03107953195	2.2777731E-008
1.346396851	1.346396851	0.04859792331	0.04859791308	1.0225394E-008
2.019595277	1.346396851	0.04491123769	0.04491122490	1.2786412E-008
2.692793703	1.346396851	0.02162813399	0.02162810601	2.7974960E-008
0.0000000000	2.019595277	0.0000000000	0.0000000000	0.000000E+000
0.6731984257	2.019595277	-0.06319668605	-0.06319672189	3.5836E-008
1.346396851	2.019595277	-0.09881834825	-0.09881837353	2.5275804E-008
2.019595277	2.019595277	-0.09132188139	-0.09132190905	2.7659922E-008
2.692793703	2.019595277	-0.04397827572	-0.04.397831354	3.7819510E-008
0.0000000000	2.692793703	0.0000000000	0.0000000000	0.000000E+000
0.6731984257	2.692793703	-0.1315158668	-0.1315158539	-1.286272E-008
1.346396851	2.692793703	-0.2056465031	-0.2056464701	-3.302175E-008
2.019595277	2.692793703	-0.1900459453	-0.1900459152	-3.007367E-008
2.6927937030	2.692793703	-0.09152128907	-0.09152128919	1.1451521E-010

Координатные функции по переменной x задаются формулой (3), а по переменной y задаются формулой (4). Решение примера 2 программируем по формуле (10). Программа дает равномерную норму (Чебышева) вычислительной погрешности в примере 2 алгоритмом (3)–(15):

$$\|u^{exact} - u^{num}\|_C = \max_{\substack{i=0,n_2 \\ j=0,n_1}} |u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num}| = 4.022184701968357E - 008,$$

$$\|u^{exact}\|_C = \max_{\substack{i=0,n_2 \\ j=0,n_1}} |u_{i,j}^{exact}| = 0.211525779807633.$$

Пример 3. Правая часть уравнения Пуассона четна по переменной t и произвольна по переменной s (то есть не является четной и не является нечетной по переменной s) относительно середины квадрата со стороной π .

$$\sin x \cdot y^2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \left(\frac{\pi}{2} + s\right)^2 = \cos(t) \left(\frac{\pi}{2} + s\right)^2$$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin x \cdot y^2, & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0 \end{cases}. \quad (20)$$

Решение примера (20) ищем в виде $u(x, y) = f(y) \sin x$. Подставляя решение в систему уравнений (18), получим:

$$\begin{cases} f''(y) - f(y) = y^2, & 0 < y < \pi \\ f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Общее решение однородного уравнения $f_{00}(z) = A \operatorname{ch} z + B \operatorname{sh} z$. Частное решение ищем в виде $f_{\text{ч}}(y) = C_0 + C_1 y^2$, $f''_{\text{ч}}(z) = 2C_1$. После подстановки получим

$$2C_1 - C_0 - C_1 y^2 = y^2, \quad C_0 = 2C_1 = -2, \quad C_1 = -1.$$

Общее решение неоднородного уравнения $f_{\text{он}}(y) = A \operatorname{ch} y + B \operatorname{sh} y - 2 - y^2$. С учетом краевых условий получим

$$f(0) = 0, A = 2, f(\pi) = 0, 2 \operatorname{ch} \pi + B \operatorname{sh} \pi - 2 - \pi^2 = 0, B = \frac{2 + \pi^2 - 2 \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi}.$$

Запишем ответ с учетом найденных коэффициентов A, B :

$$u(x, y) = \left(\left(2 \operatorname{ch} y + \left(\frac{2 + \pi^2 - 2 \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} y \right) - 2 - y^2 \right) \sin x. \quad (21)$$

Координатные функции по переменной x задаются формулой (3), а по переменной y задаются формулами (3) и (4). Решение примера 3 программируем по двум частным задачам, разлагая правую часть на четное и нечетное слагаемое по переменной y (**Лемма 3**). В первой частной задаче строим численное решение по формуле (9), во второй частной задаче – по формуле (10). Затем складываем численные решения задач:

$$u_{i,j}^{\text{num}} = u_{i,j}^{\text{num}(9)} + u_{i,j}^{\text{num}(10)}, \quad j = \overline{0, n_1}, i = \overline{0, n_2}.$$

Программа дает равномерную норму (Чебышева) вычислительной погрешности в примере 3 алгоритмом (3)–(15):

$$\|u^{\text{exact}} - u^{\text{num}}\|_C = \max_{\substack{i=\overline{0, n_2} \\ j=\overline{0, n_1}}} |u_{i,j}^{\text{exact}} - u_{i,j}^{\text{num}}| = 4.965370670184655E - 008,$$

$$\|u^{\text{exact}}\|_C = \max_{\substack{i=\overline{0, n_2} \\ j=\overline{0, n_1}}} |u_{i,j}^{\text{exact}}| = 2.07084359002153,$$

$$\frac{\|u^{\text{exact}} - u^{\text{num}}\|_C}{\|u^{\text{exact}}\|_C} = 2.397752632845165E - 008.$$

Таблица 3. Вычисленное программой численное $u_{i,j}^{num}$ и точное значение $u_{i,j}^{exact}$ по формуле (21). Число координатных функций $n=7$. $n_1 = n_2 = 90$

x_j	y_i	$u_{i,j}^{num}$	$u_{i,j}^{exact}$	$ u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num} $
0.0000000000	0.0000000000	2.8847452E-048	0.0000000000	2.8847452E-048
0.6981317007	0.0000000000	8.8121821E-017	0.0000000000	8.8121821E-017
1.396263401	0.0000000000	1.3501033E-016	0.0000000000	1.3501033E-016
2.094395102	0.0000000000	1.18726E-016	0.0000000000	1.1872614E-016
2.792526803	0.0000000000	4.6888667E-017	0.0000000000	4.6888667E-017
0.0000000000	0.698131700	8.9150597E-034	0.0000000000	8.9150597E-034
0.6981317007	0.6981317007	-0.4633010528	-0.4633010412	-1.160963E-008
1.396263401	0.6981317007	-0.7098183953	-0.7098183763	-1.901752E-008
2.094395102	0.6981317007	-0.6242038230	-0.6242038043	-1.873738E-008
2.792526803	0.6981317007	-0.2465173309	-0.2465173350	4.1067097E-009
0.0000000000	1.396263401	1.8284102E-033	0.0000000000	1.8284102E-033
0.6981317007	1.396263401	-0.9768696634	-0.9768696782	1.4812790E-008
1.396263401	1.396263401	-1.496651166	-1.496651177	1.0777631E-008
2.0943951023	1.3962634015	-1.316132947	-1.316132957	9.7307812E-009
2.792526803	1.396263401	-0.5197814741	-0.5197814991	2.4968398E-008
0.0000000000	2.094395102	2.9270042E-033	0.0000000000	2.927004E-033
0.6981317007	2.094395102	-1.324359349	-1.324359357	7.8451543E-009
1.396263401	2.094395102	-2.029036254	-2.029036253	-9.207226E-010
2.094395102	2.094395102	-1.784304535	-1.784304535	-3.805200E-011
2.792526803	2.094395102	-0.7046768753	-0.7046768955	2.0289889E-008
0.0000000000	2.792526803	1.8255772E-033	0.0000000000	1.8255772E-033
0.6981317007	2.792526803	-0.8871460549	-0.8871460301	-2.480204E-008
1.396263401	2.792526803	-1.359186580	-1.359186573	-7.733131E-009
2.094395102	2.792526803	-1.195248629	-1.195248613	-1.694967E-008
2.792526803	2.792526803	-0.4720405607	-0.4720405430	-1.766452E-008

Пример 4. Правая часть уравнения Пуассона произвольна по переменной t и произвольна по переменной s (не является четной и не является нечетной по переменным t, s) относительно середины квадрата со стороной π .

$$\begin{aligned}
 y^2 \sin x + x^2 \sin y &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\left(\frac{\pi}{2} + s\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + s\right)\left(\frac{\pi}{2} + t\right)^2 \\
 \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = y^2 \sin x + x^2 \sin y, & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi. \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \quad (22)$$

Решение примера 4 получим из решения примера 3, используя редукцию линейной задачи (22) и симметрию правой части (22):

$$u(x, y) = \left(\left(2\operatorname{ch} y + \left(\frac{2 + \pi^2 - 2\operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} y \right) - 2 - y^2 \right) \sin x +$$

$$+ \left(\left(2 \operatorname{ch} x + \left(\frac{2 + \pi^2 - 2 \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} x \right) - 2 - x^2 \right) \sin y. \quad (23)$$

Таблица 4. Вычисленное программой численное $u_{i,j}^{num}$ и точное значение $u_{i,j}^{exact}$ по формуле (23). Число координатных функций $n=7$. $n_1 = n_2 = 90$

x_j	y_i	$u_{i,j}^{num}$	$u_{i,j}^{exact}$	$ u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num} $
0.0000000000	0.0000000000	8.1655973E-048	0.0000000000	8.1655973E-048
0.6981317007	0.0000000000	8.8121821E-017	0.0000000000	8.8121821E-017
1.396263401	0.0000000000	1.3501033E-016	0.0000000000	1.3501033E-016
2.094395102	0.0000000000	1.1872614E-016	0.0000000000	1.1872614E-016
2.792526803	0.0000000000	4.6888667E-017	0.0000000000	4.6888667E-017
0.0000000000	0.6981317007	8.812182E-017	0.0000000000	8.8121821E-017
0.6981317007	0.6981317007	-0.9266021121	-0.9266020825	-2.954416E-008
1.396263401	0.6981317007	-1.686688061	-1.686688054	-7.043760E-009
2.094395102	0.6981317007	-1.948563174	-1.948563162	-1.274737E-008
2.792526803	0.6981317007	-1.133663387	-1.133663365	-2.229445E-008
0.0000000000	1.396263401	1.3501033E-016	0.0000000000	1.3501033E-016
0.6981317007	1.396263401	-1.686688083	-1.686688054	-2.927367E-008
1.396263401	1.396263401	-2.993302360	-2.993302354	-5.895098E-009
2.094395102	1.396263401	-3.345169217	-3.345169210	-7.318042E-009
2.792526803	1.396263401	-1.878968061	-1.878968072	1.0975811E-008
0.0000000000	2.094395102	1.1872614E-016	0.0000000000	1.1872614E-016
0.6981317007	2.094395102	-1.948563188	-1.948563162	-2.658253E-008
1.396263401	2.094395102	-3.345169212	-3.345169210	-1.953105E-009
2.094395102	2.094395102	-3.568609077	-3.568609071	-6.000962E-009
2.792526803	2.094395102	-1.899925509	-1.899925508	-3.849329E-010
0.0000000000	2.792526803	4.6888667E-017	0.0000000000	4.6888667E-017
0.6981317007	2.792526803	-1.133663387	-1.133663365	-2.193001E-008
1.396263401	2.792526803	-1.878968056	-1.878968072	1.6172456E-008
2.094395102	2.792526803	-1.899925507	-1.899925508	1.6218706E-009
2.792526803	2.792526803	-0.9440811219	-0.9440810861	-3.578233E-008

Координатные функции по переменным x и y задаются формулами (3) и (4). Решение примера 4 программируем по четырем частным задачам, разлагая правую часть уравнения на четыре слагаемых согласно **Лемме 3**. Соответственно, строим численные решения задач по формулам (9), (10), (11), (12). Затем складываем численные решения задач:

$$u_{i,j}^{num} = u_{i,j}^{num(9)} + u_{i,j}^{num(10)} + u_{i,j}^{num(11)} + u_{i,j}^{num(12)}, \quad j = \overline{0, n_1}, i = \overline{0, n_2}$$

Программа дает равномерную норму (Чебышева) вычислительной погрешности в примере 4 алгоритмом (3)–(15):

$$\begin{aligned}\|u^{exact} - u^{num}\|_C &= \max_{\substack{i=0, n_2 \\ j=0, n_1}} |u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num}| = 9.734341377409805E - 008, \\ \|u^{exact}\|_C &= \max_{\substack{i=0, n_2 \\ j=0, n_1}} |u_{i,j}^{exact}| = 3.74139188742999, \\ \frac{\|u^{exact} - u^{num}\|_C}{\|u^{exact}\|_C} &= 2.601796783201037E - 008.\end{aligned}$$

Наибольшее время работы программы (для примера 4) составило 4.328125 секунды, что значительно меньше (20 секунд) для решения уравнения Пуассона методом векторной прогонки [8, стр. 548] при одинаковом числе узлов сетки.

Основные полученные в работе результаты

Впервые предложены четные и нечетные системы однородных координатных функций симметричных относительно середины прямоугольника.

Определены 4 класса четности непрерывных функций двух переменных $C_{0,0}, C_{0,1}, C_{1,0}, C_{1,1}$ (четно-четные, четно-нечетные, нечетно-четные, нечетно-нечетные). Каждый класс функций инвариантен относительно частных производных четного порядка, например, для действия на функции оператора Лапласа или бигармонического оператора (Лемма 1, Лемма 2).

Доказано, что любую непрерывную функцию двух переменных можно разложить в сумму 4 непрерывных слагаемых, каждое слагаемое принадлежит по четности классам $C_{0,0}, C_{0,1}, C_{1,0}, C_{1,1}$ (Лемма 3).

Доказана Теорема 1, согласно которой решение любой однородной краевой задачи для однородного линейного уравнения в частных производных сводится редукцией к решению 4 простых задач на каждом по четности классе функций.

Предложен численный алгоритм Бубнова–Галеркина (3)–(15) для решения краевой задачи с уравнением Пуассона на прямоугольнике для иллюстрации метода симметричных систем координатных функций.

Численно решены четыре однородных краевых задачи с уравнением Пуассона из различных классов симметрии правой части уравнения (четно-четной, четно-нечетной, четно-произвольной, произвольно-произвольной).

Точность решения краевых задач методом Бубнова–Галеркина с однородными уравнениями в частных производных имеет порядок 10^{-8} в равномерной метрике.

Для краевой задачи с бигармоническим уравнением (2), решаемой алгоритмом Бубнова–Галеркина (13), (14) для вычисления смешанной производной u_{xxyy} достаточно использовать формулы второй производной (5), (6), а для производной u_{xxxx} написать формулу четвертой производной. В левую часть уравнений (13), (14) вместо оператора Лапласа необходимо подставить три слагаемых $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}$ для бигармонического оператора. Причем $u(x, y)$ представимо суммой по координатным функциям либо в виде (9), либо (10), либо (11), либо (12).

Список источников

1. Волосов К. А. Построение решений квазилинейных параболических уравнений в параметрической форме // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 4. С. 492–497.
2. Бурский В. П. Некоторые новые методы исследования краевых задач для общих дифференциальных уравнений в частных производных // Теоретическая и математическая физика. 2024. Т. 218, № 1. С. 48–59.

3. Пикулин В. П., Похожаев С. И. Практический курс по уравнениям математической физики. М.: МЦНМО, 2004. 208 с.
4. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Никитина А. В. [и др.] Метод решения сеточных уравнений для задач гидродинамики в плоских областях // Математическое моделирование. 2023. Т. 35, № 3. С. 35–58.
5. Чернышов А. Д., Горяйнов В. В., Кузнецов С. Ф., Никифорова О. Ю. Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. Т. 70. С. 127–142.
6. Бурова И. Г., Алцыбеев Г. О. Применение сплайновых аппроксимаций второго порядка к решению интегральных уравнений второго рода // Вычислительные методы и программирование. 2025. Т. 26, № 2. С. 175–191.
7. Шапеев В. П., Беляев В. А. Решение краевых задач для уравнений с частными производными в треугольных областях методом коллокации и наименьших квадратов // Вычислительные методы и программирование. 2018. Т. 19, № 1. С. 96–111.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: учеб. пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. 636 с.
9. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К. [и др.]. Модифицированный метод Бубнова–Галеркина для решения краевых задач с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением // Computational Mathematics and Information Technologies. 2024. Т. 8, № 3. С. 23–33.
10. Волосова Н. К., Волосов К. А., Волосова А. К. [и др.]. Решение краевых задач для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений методом Бубнова–Галеркина // Computational Mathematics and Information Technologies. 2025. Т. 9, № 1. С. 7–19.
11. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи. М.: Физматлит, 2008. 255 с.

References

1. Volosov, K. A. (2007), "Construction of Solutions of Quasilinear Parabolic Equations in Parametric Form" [Postroenie resheniy kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy v parametricheskoy forme], *Differential Equations* [Differentsialnye uravneniya], no 43(4), pp. 492–497.
2. Burskiy, V. P. (2024), "Some New Methods for Studying Boundary Value Problems for General Partial Differential Equations" [Nekotorye novye metody issledovaniya kraevykh zadach dlya obshchikh differentsialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh], *Theoretical and Mathematical Physics* [Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika], no 218(1), pp. 48–59.
3. Pikulin, V. P. and Pokhohaev, S. I. (2004), *A Practical Course on Equations of Mathematical Physics* [Prakticheskiy kurs po uravneniyam matematicheskoy fiziki], MCCME [M TsNMO], Moscow, 208 p.
4. Sukhinov, A. I., Chistyakov, A. E., Nikitina, A. V. et al. (2023), "Method for Solving Grid Equations for Hydrodynamics Problems in Plane Domains" [Metod resheniya setochnykh uravneniy dlya zadach gidrodinamiki v ploskikh oblastyakh], *Mathematical Modeling* [Matematicheskoe modelirovanie], no 35(3), pp. 35–58.
5. Chernyshov, A. D., Goryainov, V. V., Kuznetsov, S. F. and Nikiforova, O. Yu. (2021), "Application of Fast Expansions for Constructing Exact Solutions of the Problem of

- Bending of a Rectangular Membrane Under Variable Load" [Primenenie bystrykh razlozheniy dlya postroeniya tochnykh resheniy zadachi o progrebe pryamougolnoy membrany pod deystviem peremennoy nagruzki], *Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and Mechanics* [Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika], no 70, pp. 127–142.
6. Burova, I. G. and Altsybeev, G. O. (2025), "Application of Second-Order Spline Approximations to Solving Integral Equations of the Second Kind" [Primenenie splaynovykh approksimatsiy vtorogo poryadka k resheniyu integralnykh uravneniy vtorogo roda], *Computational Methods and Programming* [Vychislitelnye metody i programmirovaniye], no 26(2), pp. 175–191.
 7. Shapeev, V. P. and Belyaev, V. A. (2018), "Solution of Boundary Value Problems for Partial Differential Equations in Triangular Domains by the Collocation and Least Squares Method" [Reshenie kraevykh zadach dlya uravneniy s chastnymi proizvodnymi v treugolnykh oblastiakh metodom kollokatsii i naimenshikh kvadratov], *Computational Methods and Programming* [Vychislitelnye metody i programmirovaniye], no 19(1), pp. 96–111.
 8. Bakhvalov, N. S., Zhidkov, N. P. and Kobelkov, G. M. (2011), *Numerical Methods: A Study Guide for Students of Physics and Mathematics Specialties of Higher Educational Institutions* [Chislennye metody: uchebnoe posobie dlya studentov fiziko-matematicheskikh spetsialnostey vysshikh uchebnykh zavedeniy], Binom. Laboratory of Knowledge [Binom. Laboratoriya znaniy], Moscow, 636 p.
 9. Volosova, N. K., Volosov, K. A., Volosova, A. K. et al. (2024), "Modified Bubnov-Galerkin Method for Solving Boundary Value Problems with a Linear Ordinary Differential Equation" [Modifitsirovannyi metod Bubnova-Galerkina dlya resheniya kraevykh zadach s lineynym obyknovennym differentsialnym uravneniem], *Computational Mathematics and Information Technologies*, no 8(3), pp. 23–33.
 10. Volosova, N. K., Volosov, K. A., Volosova, A. K. et al. (2025), "Solving Boundary Value Problems for Some Nonlinear Differential Equations by the Bubnov-Galerkin Method" [Reshenie kraevykh zadach dlya nekotorykh nelineynykh differentsialnykh uravneniy metodom Bubnova-Galerkina], *Computational Mathematics and Information Technologies*, no 9(1), pp. 7–19.
 11. Alekseev, V. M., Galeev, E. M. and Tikhomirov, V. M. (2008), *Collection of Problems in Optimization: Theory. Examples. Problems* [Sbornik zadach po optimizatsii: Teoriya. Primery. Zadachi], Fizmatlit, Moscow, 255 p.

Информация об авторах:

Д. Ф. Пастухов – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, д. 29), eLibrary AuthorID: 405101;

Ю. Ф. Пастухов – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), eLibrary AuthorID: 405109.

Information about the authors:

D. F. Pastukhov – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Associate Professor at the Departments of Programming Technologies, Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk (29, Blokhina st., Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), eLibrary AuthorID: 405101;

Yu. F. Pastukhov – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Associate Professor at the Departments of Programming Technologies, Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk (29, Blokhina st., Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), eLibrary AuthorID: 405109.