

Научная статья

УДК 512.55

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-49-57

<https://elibrary.ru/idhngf>



Пирсовский пучок полуколец для полукольца с инволюцией

Никита Сергеевич Протасов¹ Василий Владимирович Чермных²

^{1,2} Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, Сыктывкар, Россия

¹ protasownikita@yandex.ru

² vv146@mail.ru

Аннотация. Для полукольца с инволюцией рассматривается его пирсовский пучок полуколец (без инволюций). Предлагается конструкция антиавтоморфизма этого пучка. Полукольцо сечений пучка является полукольцом с инволюцией, дается описание строения инволюции.

Ключевые слова: полукольцо с инволюцией; изоморфизм пучков; пирсовское представление; пирсовский слой.

Для цитирования: Протасов Н. С., Чермных В. В. Пирсовский пучок полуколец для полукольца с инволюцией // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 3(74). С. 49–57. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-49-57. <https://elibrary.ru/idhngf>.

Статья поступила в редакцию 20.07.2026; одобрена после рецензирования 01.09.2026; принята к публикации 06.10.2026.

Research article

Pierce Sheaf of Semirings for a Semiring With Involution

Nikita S. Protasov¹, Vasily V. Chermnykh²

^{1,2} Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia

¹ protasownikita@yandex.ru

² vv146@mail.ru

Abstract. The paper deals with pierce sheaf of semirings (without involution) for a semiring with involution. An antiautomorphism construction for this sheaf is proposed. The semiring of sheaf sections is a semiring with involution; the involution structure is described.

Keywords: semiring with involution; sheaf isomorphism; Pierce representation; Pierce stalk.

For citation: Protasov, N. S. and Chermnykh, V. V. (2026), "Pierce Sheaf of Semirings for a Semiring With Involution", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(74), pp. 49–57, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-49-57, <https://elibrary.ru/idhngf>.

The article was submitted 20 Jul 2026; approved after review 01 Sep 2026; accepted for publication 06 Oct 2026.



© Протасов Н. С., Чермных В. В., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Введение и первоначальные понятия

Представление алгебр сечениями пучков является известным и хорошо зарекомендовавшим себя методом исследования алгебр. Смысл использования пучков заключается в том, что изучаемая абстрактная алгебра интерпретируется как алгебра непрерывных функций. Как правило, при пучковых представлениях выбираются конструкции пучков с более простыми алгебрами-слоями; привлечение топологических свойств пучков часто позволяет глубже понять структуру представляемого объекта. Настоящая статья посвящена пирсовским представлениям полуколец с инволюцией.

Пирсовские пучки являются наиболее востребованными пучковыми конструкциями. Это обуславливается тем, что пирсовский пучок имеет хорошее базисное пространство, а само пирсовское представление является изоморфным для всех алгебр, к которым применимы пучковые представления (кольца, ограниченные дистрибутивные решетки, почти-кольца, решеточно упорядоченные группы и кольца, полукольца). Изоморфные пирсовские представления имеют также кольца и полукольца с инволюцией.

Основная идея нашей статьи следующая. Рассмотрим полукольцо S с инволюцией. Для него имеются два пирсовских пучка – пучок полуколец $\mathbb{P}(S)$ и пучок полуколец с инволюцией $\mathbb{P}^*(S)$. Полукольцо, изоморфное полукольцу с инволюцией, является полукольцом с инволюцией. Поэтому полукольцо $\Gamma(\mathbb{P}(S))$ всех глобальных сечений пирсовского пучка является полукольцом с инволюцией. Очевидно, что сечение $\widehat{a}^*$ будет сопряженным к сечению $\widehat{a}$. Одна из задач заключается в нахождении связи между значениями сечений $\widehat{a}^*$ и $\widehat{a}$ в каждом слое (еще раз подчеркнем, что в слоях инволюции нет). Для этого мы рассматриваем преобразование пирсовского пучка $\mathbb{P}(S)$, при котором с помощью инволюции на S переставляются как точки базисного пространства пучка, так и соответствующие пирсовские слои. Полученное преобразование задает антиавтоморфизм пирсовского пучка (теорема 1), который позволяет указать вид инволюции полукольца глобальных сечений $\Gamma(\mathbb{P}(S))$ (теорема 2).

Начнем с основных определений.

Под *полукольцом* мы понимаем алгебру $\langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, которая является коммутативной полугруппой с нулем относительно сложения, полугруппой с единицей относительно умножения, умножение дистрибутивно справа и слева относительно сложения, нуль мультипликативен (т. е. справедливо условие $a0 = 0 = 0a$ для любого $a \in S$). Будем рассматривать полукольца с единицей, отличной от нуля.

Определение 1. Полукольцо S называется **-полукольцом* (или *полукольцом с инволюцией*), если существует антиавтоморфизм $*$: $a \mapsto a^*$ полукольца S :

$$a^{**} = a, (a + b)^* = a^* + b^*, (ab)^* = b^*a^*.$$

Примеры полуколец с инволюцией.

1. Любое кольцо с инволюцией является *-полукольцом.
2. Любое коммутативное полукольцо можно рассматривать как полукольцо с тождественной ($a^* = a$) инволюцией.
3. Полное полукольцо матриц есть *-полукольцо, где в качестве инволюции берется транспонирование матриц.
4. Пусть B – конечная булева алгебра, τ – произвольная перестановка второго порядка атомов (т.е. τ раскладывается в произведение независимых транспозиций). Для любого ненулевого $a \in B$ имеем $a = e_1 + \dots + e_k$ для однозначно

определенных атомов e_i . Положим $a^* = \tau(e_1) + \dots + \tau(e_k)$. Стандартно проверяется, что $*$ – инволюция на B . Более того, любая инволюция $*$ на B задается некоторой перестановкой атомов, поскольку, легко показать, как каждый атом переводит в атом.

Определение 2. Тройка (Π, π, X) называется *пучком полуколец*, если выполняются условия:

- 1) Π, X – топологические пространства;
- 2) $\pi: \Pi \rightarrow X$ – локальный гомеоморфизм;
- 3) для любого $x \in X$ $\Pi_x = \pi^{-1}(x)$ – полукольцо;
- 4) сложение, умножение в каждом Π_x являются непрерывными операциями;
- 5) отображения, сопоставляющие каждому $x \in X$ нуль и единицу из Π_x , непрерывны.

Если в пункте 3) заменить полукольцо на $*$ -полукольцо, а в пункте 4) потребовать непрерывность инволюции, рассматриваемой как унарная операция, то получим определение пучка $*$ -полуколец.

Пространства X и Π называются *базисным* и *накрывающим* соответственно; Π_x называется *слоем* пучка. Непрерывное отображение $\sigma: X \rightarrow \Pi$, определенное на всем X и такое, что $\sigma(x) \in \Pi_x$ называется *глобальным сечением*; непрерывное отображение, определенное на открытом подмножестве базисного пространства, называется *локальным сечением*. Локальные сечения образуют базис открытых множеств накрывающего пространства.

Множество $\Gamma(\Pi)$ всех глобальных сечений с послойно определенными операциями образует полукольцо. *Пучковым представлением* полукольца S называется произвольный гомоморфизм S в полукольцо глобальных сечений пучка Π .

Основными конструкциями, интересующими нас, являются пирсовские пучок полуколец и пучок $*$ -полуколец. Напомним их строение.

I. Пусть S – произвольное полукольцо.

1) Мультипликативный идемпотент $e = e^2 \in S$ называется *центральным дополняемым*, если для любого $a \in S$ выполняется $ae = ea$ и найдется такой элемент $e^\perp$, что $e + e^\perp = 1$ и $ee^\perp = 0$. Элемент $e^\perp$ находится однозначно и также является центральным дополняемым идемпотентом.

2) Обозначим через BS множество всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца S . Положим для $e, f \in BS$:

$$e \vee f = ef^\perp + f = e^\perp f + e, \quad e \wedge f = ef.$$

Тогда $\langle BS, \vee, \wedge \rangle$ – булева алгебра. Элемент $e^\perp$, определенный в пункте 1), будет также дополнением к e в булевой алгебре BS . Порядок в BS задается стандартно: $e \leq f \Leftrightarrow e = ef$.

3) Пусть $\text{Max } BS$ – множество всех максимальных идеалов булевой алгебры BS . С топологией Стоуна–Зарисского $\text{Max } BS$ становится топологическим пространством с открытыми множествами вида

$$d(A) = \{M \in \text{Max } BS: A \notin M\}$$

для произвольного идеала A из BS . Пространство $\text{Max } BS$ является нульмерным компактом, т. е. компактным хаусдорфовым пространством с базисом открыто-замкнутых множеств вида $d(e) = \{M \in \text{Max } BS: e \notin M\}$, $e \in BS$.

4) Рассмотрим конгруэнцию ρ_M на полукольце S , положив для произвольных $a, b \in S$, $M \in \text{Max } BS$:

$$a \equiv b \pmod{\rho_M} \Leftrightarrow ae = be \text{ для некоторого } e \in BS \setminus M.$$

Факторполукольцо S/ρ_M называется *пирсовским слоем* полукольца S .

5) Наконец, пирсовский пучок полукольца S имеет вид

$$(\mathbb{P}(S), \text{Max } BS),$$

где $\mathbb{P}(S)$ – накрывающее пространство пучка, являющееся дизъюнктивным объединением пирсовских слоев S/ρ_M по всем точкам базисного пространства $\text{Max } BS$.

Рассмотренная конструкция является обобщением классического пучка колец, введенного в обиход Р.С. Пирсом в 1967 г. [1]; в этой же работе получено изоморфное представление произвольного кольца сечениями своего пирсовского пучка (theorem 4.4). Изоморфизм пирсовского представления произвольного полукольца установлен В.В. Чермных в 1993 г. (см. теорема 3 в [2]).

II. Конструкция пирсовского пучка $*$ -полуколец имеет следующие отличия от пирсовского пучка полуколец.

Пусть S – произвольное $*$ -полукольцо. Элемент $a \in S$ называется *самосопряженным*, если $a^* = a$. Дополняемый самосопряженный идемпотент называется *проекцией*. Обозначим через B^*S булеву алгебру всех центральных проекций. Пространство $\text{Max } B^*S$ – множество всех максимальных идеалов кольца B^*S с топологией Стоуна–Зарисского. Рассмотрим конгруэнцию ρ_M^* на $*$ -полукольце S , положив для произвольных $a, b \in S$, $M \in \text{Max } B^*S$:

$$a \equiv b \pmod{\rho_M^*} \Leftrightarrow ae = be \text{ для некоторого } e \in B^*S \setminus M.$$

Факторполукольцо S/ρ_M^* называется *пирсовским слоем* $*$ -полукольца S . Тогда пирсовский пучок $*$ -полукольца S имеет вид

$$(\mathbb{P}^*(S), \text{Max } B^*S),$$

где $\mathbb{P}^*(S)$ – накрывающее пространство пучка, являющееся дизъюнктивным объединением пирсовских слоев S/ρ_M^* по всем точкам базисного пространства $\text{Max } B^*S$.

Пример. Приведем простой пример, показывающий отличия пирсовского пучка полуколец и пирсовского пучка $*$ -полуколец для $*$ -полукольца. Пусть B – восьмиэлементная булева алгебра с атомами a, b, c , а инволюция на B задана условиями $a^* = b$ и $c^* = c$. Тогда пирсовский пучок $\mathbb{P}(B)$ полуколец имеет трехточечное базисное пространство, а его слои двухэлементны. В свою очередь пирсовский пучок $\mathbb{P}^*(B)$ $*$ -полуколец содержит два слоя, один из которых двухэлементная, а другой – четырехэлементная булева алгебра.

Впервые изоморфное пирсовское представление было получено для произвольного $*$ -кольца К. Салавой [3], для $*$ -полукольца – Р.В. Марковым [4]. Если S – произвольное полукольцо, то элементу $s \in S$ при пирсовском представлении соответствует глобальное сечение $\hat{s}$, где $\hat{s}(M) = s_M$ – класс элемента s в пирсовском слое S/ρ_M .

Постановка задач

Во-первых, отметим, что полукольцо, изоморфное полукольцу с инволюцией, также является полукольцом с инволюцией. Действительно, пусть S – $*$ -полукольцо, T – полукольцо, φ – полукольцевой изоморфизм. Для любого $t \in T$ положим $t^* = \varphi(s^*)$, где $\varphi(s) = t$. Тогда $t^{**} = (\varphi(s^*))^* = \varphi(s^{**}) = \varphi(s) = t$. Если $u = \varphi(v)$, то из $\varphi(sv) = tu$ следует $(tu)^* = \varphi((sv)^*) = \varphi(v^*s^*) = \varphi(v^*)\varphi(s^*) = u^*t^*$. Таким же образом устанавливается, что $(t + u)^* = t^* + u^*$.

Пусть сейчас S – $*$ -полукольцо. Будем рассматривать S как полукольцо, забыв об инволюции, и пусть $(\mathbb{P}(S), \text{Max } BS)$ – его пирсовский пучок полуколец (не $*$ -полукольцо!). Поскольку S изоморфно полукольцу $\Gamma = \Gamma(\mathbb{P}(S))$, то полукольцо Γ является полукольцом с инволюцией. Легко проверяется, что для произвольного сечения $\hat{a} \in \Gamma$, $a \in S$, сопряженный к нему элемент $(\hat{a})^*$ – глобальное сечение $\widehat{a^*}$. Пирсовские слои полукольца S в общем не являются полукольцами с инволюцией, поэтому мы не можем оперировать элементами вида $(a_M)^*$. Возникают следующие вопросы:

- 1) Как связаны значения сечений $\hat{a}$ и $\widehat{a^*}$ в произвольной точке пирсовского пучка?
- 2) Конгруэнцию ρ на $*$ -полукольце S будем называть *стабильной относительно инволюции $*$* (или *$*$ -конгруэнцией*), если $a \equiv b \pmod{\rho} \Leftrightarrow a^* \equiv b^* \pmod{\rho}$. Пусть ρ – $*$ -конгруэнция на S , тогда факторполукольцо S/ρ становится полукольцом с инволюцией, если положить $a_\rho^* = (a^*)_\rho$ для любого $a_\rho \in S/\rho$. Когда пирсовская конгруэнция на $*$ -полукольце S является $*$ -конгруэнцией?

Основные результаты

Исследования пирсовского пучка полуколец $*$ -полукольца S позволило заметить связанное с инволюцией преобразование пирсовского пучка $\mathbb{P}(S)$. Для описания этого преобразования потребуется понятие изоморфизма пучков. Заметим, что пучок кроме алгебраической имеет и топологическую составляющую, поэтому совпадение соответствующих слоев двух пучков, даже на одном и том же базисном пространстве, еще не позволяет сделать вывод о каком-либо равенстве пучков. Наиболее употребительное определение изоморфизма пучков дается через рассмотрение пучков как предпучков. При таком подходе с каждым открытым множеством U базисного пространства связано полукольцо $P(U)$ (это в случае, если мы рассматриваем пучок полуколец, а если работаем с пучком алгебр сигнатуры Ω , то $P(U)$ – алгебра сигнатуры Ω). Тогда для совпадения пучков требуется гомеоморфизм базисных пространств и изоморфизм полуколец над соответствующими при этом гомеоморфизме открытыми множествами. Поскольку пучок определяется нами в терминах расслоенного пространства, то мы используем следующее определение изоморфизма пучков.

Определение 3. Пусть Π – пучок полуколец Π_X над пространством X , Λ – пучок полуколец Λ_Y над пространством Y . *Изоморфизмом пучков Π и Λ* называется гомеоморфизм $\varphi: Y \rightarrow X$ и семейство $\{f_y: y \in Y\}$ изоморфизмов $f_y: \Pi_{\varphi(y)} \rightarrow \Lambda_y$, таких, что для любого локального сечения α на открытом множестве $U \subseteq X$ пучка Π отображение β , определенное по формуле

$$\beta(y) = f_y(\alpha(\varphi(y))), \quad y \in \varphi^{-1}(U),$$

непрерывно.

Для любого подмножества A $*$ -полукольца S положим

$$A^* = \{a^* \in S: a \in A\}.$$

Лемма 1. Пусть S — $*$ -полукольцо, $a, b \in BS$. Тогда справедливы утверждения:

- 1) $(a^\perp)^* = (a^*)^\perp$;
- 2) $(a \vee b)^* = a^* \vee b^*$;
- 3) если $M \in \text{Max } BS$, то $M^* \in \text{Max } BS$.

Доказательство.

Проверяется стандартно.

Лемма 1 позволяет определить отображение:

$$\varphi: \text{Max } BS \rightarrow \text{Max } BS, \text{ такое, что } \varphi(M) = M^*.$$

Лемма 2. Отображение φ является гомеоморфизмом.

Доказательство.

Поскольку $(M^*)^* = \{e^*: e \in M^*\} = \{(e^*)^*: e \in M\} = \{e: e \in M\} = M$, то $\varphi = \varphi^{-1}$. Поэтому, чтобы показать, что биекция φ является гомеоморфизмом, достаточно показать непрерывность φ .

Пусть $d(e) = \{M \in \text{Max } BS: e \notin M\}$. Тогда $\varphi^{-1}(d(e)) = \varphi(d(e)) = \{M \in \text{Max } BS: M^* \in d(e)\} = \{M \in \text{Max } BS: e \notin M^*\}$. Поскольку $e \notin M^* \Leftrightarrow e^* \notin M$, имеем, $\{M \in \text{Max } BS: e \notin M^*\} = \{M \in \text{Max } BS: e^* \notin M\} = d(e^*)$ и $\varphi^{-1}(d(e)) = d(e^*)$ открыто. Следовательно, отображение φ непрерывно.

Далее, для каждого $M \in \text{Max } BS$ определим отображение между пирсовскими слоями

$$f_M: S/\rho_{\varphi(M)} \rightarrow S/\rho_M \text{ по правилу } f_M(a_{\varphi(M)}) = (a^*)_M.$$

Лемма 3. Для любого $M \in \text{Max } BS$ $*$ -полукольца S отображение f_M является антиизоморфизмом полуколец.

Доказательство.

Пусть $a \equiv b \pmod{\rho_{\varphi(M)}}$. Тогда $ae = be$ для некоторого $e \in BS \setminus \varphi(M)$. Действуя инволюцией, получим $a^*e^* = b^*e^*$. Поскольку $e \notin \varphi(M) = M^*$, то $e^* \notin M$, а значит, $a^* \equiv b^* \pmod{\rho_M}$. Верно и обратное, таким образом, $a \equiv b \pmod{\rho_{\varphi(M)}}$ равносильно условию $a^* \equiv b^* \pmod{\rho_M}$. Это означает, что отображение f_M задано корректно и является инъективным. Сюръективность легко проверяется, поэтому f_M — биекция. Поскольку $(a + b)^* = a^* + b^*$, то $(a + b)^* \equiv a^* + b^* \pmod{\rho_M}$ для любого M ; аналогично, $(ab)^* \equiv b^*a^* \pmod{\rho_M}$. Договоримся элемент $a_{\varphi(M)}$ факторполукольца $S/\rho_{\varphi(M)}$ обозначать через a_{M^*} . Получаем:

$$f_M(a_{M^*} + b_{M^*}) = f_M((a + b)_{M^*}) = (a + b)^*_M = a^*_M + b^*_M = f_M(a_{M^*}) + f_M(b_{M^*}),$$

$$f_M(a_{M^*} \cdot b_{M^*}) = f_M((ab)_{M^*}) = (ab)^*_M = b^*_M \cdot a^*_M = f_M(b_{M^*}) \cdot f_M(a_{M^*}).$$

Следовательно, f_M — антиизоморфизм.

Для произвольного локального сечения σ над открытым множеством $U \subseteq \text{Max } BS$, зададим определенное на $\varphi^{-1}(U)$ отображение σ^* , так, что

$$\sigma^*(N) = f_N(\sigma(\varphi(N)))$$

для любого $N \in \varphi^{-1}(U)$.

Локальное сечение σ является объединением локальных сечений вида $\hat{s}_i|_{U_i}$ для открытых подмножеств $U_i \subseteq \text{Max } BS$, дизъюнктное объединение которых дает U . Произвольная точка $N \in \varphi^{-1}(U)$ попадает в некоторое открытое множество $\varphi^{-1}(U_i)$, поэтому локальное сечение $\sigma|_{U_i}$ совпадает с $\hat{s}_i|_{U_i}$. Следовательно, $\sigma^*(N) = f_N(\hat{s}_i(\varphi(N))) =$

$\hat{S}_i(N)$ для произвольной точки $N \in \varphi^{-1}(U_i)$. Получаем, $\sigma^*|_{\varphi^{-1}(U_i)}$ совпадает с $\hat{S}_i$ на $\varphi^{-1}(U_i)$, поэтому σ^* – непрерывное отображение.

Подведем итоги. Предыдущим рассуждением и леммами 1 и 2 установлено:

- 1) отображение $\varphi: \text{Max } BS \rightarrow \text{Max } BS$, $\varphi(M) = M^*$, является гомеоморфизмом;
- 2) для каждого $M \in \text{Max } BS$ отображение $f_M: S/\theta_{\varphi(M)} \rightarrow S/\theta_M$, $f_M(a_{\varphi(M)}) = (a^*)_M$ является полукольцевым антиизоморфизмом;
- 3) для произвольного локального сечения σ над открытым $U \subseteq \text{Max } BS$ отображение $\sigma^*(N) = f_N(\sigma(\varphi(N)))$, $N \in \varphi^{-1}(U)$, непрерывно.

Рассмотрим аналог определения 3, сформулированный для полуколец, без использования инволюции, и с антиизоморфизмами вместо изоморфизмов. Назовем получаемое соответствие между пучками *антиизоморфизмом пучков*. Изоморфизм пучков с условиями $X = Y$ и $\Pi = \Lambda$ назовем *автоморфизмом пучков*. Пользуясь этими соглашениями и пунктами 1)-3), получаем:

Теорема 1. Для произвольного $*$ -полукольца S $(\varphi, \{f_M\})$ – антиавтоморфизм пирсовского пучка $(\mathbb{P}(S), \text{Max } BS)$.

Обозначим пучок полуколец – образ при антиавтоморфизме, указанном в теореме 1, через $(\mathbb{P}^*(S), \text{Max } BS)$. В следующей теореме описывается инволюция на полукольце глобальных сечений пирсовского пучка полуколец, построенного для полукольца с инволюцией. Тем самым, дается некоторый вариант ответа на вопрос 1) раздела 1.

Теорема 2. Для произвольного $*$ -полукольца S отображение $f: \hat{a} \mapsto (\hat{a})^*$ задает $*$ -антиизоморфизм между $*$ -полукольцами глобальных сечений пучков полуколец $(\mathbb{P}(S), \text{Max } BS)$ и $(\mathbb{P}^*(S), \text{Max } BS)$.

Доказательство.

Из проведенных выше рассуждений понятна связь между аддитивными и мультипликативными операциями полуколец сечений, показывающая, что f является антигомоморфизмом. Легко устанавливается биективность f , например, из $\hat{a} \neq \hat{b}$ следует, что $\hat{a}(M) \neq \hat{b}(M)$ для некоторой точки $M \in \text{Max } BS$, поэтому $(\hat{a})^* \neq (\hat{b})^*$ в точке M^* пучка $\mathbb{P}^*(S)$. Наконец, заметим, что с любым глобальным сечением $\hat{a}$ пучка сопряжено глобальное сечение $\hat{a}^*$. Действительно, для любой точки $M \in \text{Max } BS$ сечение $\hat{a}$ принимает значение a_M , а сечение $\hat{a}^*$ принимает значение $\hat{a}^*(M) = f_{M^*}(\hat{a}(\varphi(M))) = f_M(a_{\varphi(M)}) = (a^*)_M$. Поэтому $f(\hat{a}^*) = (\hat{a}^*)^* = (\hat{a})^* = f(\hat{a})^*$, теорема доказана.

О стабильности пирсовской конгруэнции

Укажем некоторые условия, при которых пирсовская конгруэнция ρ_M является $*$ -конгруэнцией.

Пусть S – $*$ -полукольцо, $M \in \text{Max } BS$. Рассмотрим ситуацию, когда найдется атом $e \in BS$, не лежащий в M ; в этом случае будем пользоваться обозначением $M = M_e$.

Лемма 4. Пусть $M = M_e$, тогда справедливы утверждения:

- 1) e – единственный атом из BS , не лежащий в M ;
- 2) $M_e = (e^\perp)$ – главный идеал, порожденный $e^\perp$;
- 3) если $a \equiv b \pmod{\rho_M}$, то $ae = be$.

Доказательство.

1) Если e, f – два различных атома из $BS \setminus M$, то $0 = ef \in M$, противоречие с простотой максимального идеала M .

2) Пусть $a \in M$, тогда $ae = 0$, поэтому $a = ae^\perp$.

3) Если $a \equiv b \pmod{\rho_M}$, то $af = bf$ для некоторого $f \in BS \setminus M$. Поскольку $f^\perp \in M$, то $f^\perp = f^\perp e^\perp$ по пункту 2). Тогда $f = (f^\perp e^\perp)^\perp = fe^\perp + e$, поэтому $fe = e$. Следовательно, $ae = be$.

Предложение 1. Пусть S – $*$ -полукольцо, $M \in \text{Max } BS$ – максимальный идеал вида M_e для некоторого атома $e \in BS$. Тогда равносильны условия:

- 1) $(M_e)^* = M_e$;
- 2) $e^* = e$;
- 3) пирсовская конгруэнция ρ_{M_e} является $*$ -конгруэнцией.

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2). Элемент e не лежит в M_e , поэтому $e^* \notin (M_e)^*$. Поскольку $(M_e)^* \in \text{Max } BS$ и e^* – атом, то из $(M_e)^* = M_e$ и пункта 1) леммы 4 следует $e^* = e$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $a \equiv b \pmod{\rho_M}$, тогда $ae = be$ по пункту 3) леммы 4. Следовательно, $a^*e = b^*e$ и $a^* \equiv b^* \pmod{\rho_M}$,

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $(M_e)^* \neq M_e$, тогда $e \in (M_e)^*$, и поэтому $e^* \in M_e$. Отсюда следует $e^* \equiv 0 \pmod{\rho_{M_e}}$ и, учитывая $e \equiv 1 \pmod{\rho_{M_e}}$, получаем $e^* \not\equiv e \pmod{\rho_{M_e}}$, т. е. ρ_{M_e} не является $*$ -конгруэнцией.

Непосредственно из предложения 1 вытекает

Следствие 1. Любая пирсовская конгруэнция $*$ -полукольца S с конечной булевой алгеброй BS стабильна относительно инволюции.

Примеры. 1. Не каждый максимальный идеал булевой алгебры имеет вид M_e для некоторого атома e . Например, рассмотрим $\beta(\mathbb{N})$ – булеан множества натуральных чисел. Это атомная булева решетка, одноэлементные подмножества являются ее атомами. Рассмотрим собственный идеал в $\beta(\mathbb{N})$, состоящий из всех конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$. По лемме Цорна он содержится в некотором максимальном идеале, который, очевидно, содержит все атомы булевой алгебры. Вместо $\mathbb{N}$ может быть выбрано любое бесконечное множество.

2. Максимальные идеалы всякой конечной булевой алгебры имеют вид M_e .

В заключение отметим, что авторам не известен какой-либо аналог предложенной конструкции преобразования пирсовского пучка, ни для полуколец, ни для колец с инволюцией. В дальнейшем нами предполагается применить полученную конструкцию для изучения конкретных полуколец с инволюцией.

Список источников

1. Pierce R. S. Modules over commutative regular rings // Mem. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 70. P. 1–112. DOI:10.1090/memo/0070.
2. Чермных В. В. Пучковые представления полуколец // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 5. С. 185–186. DOI: 10.1070/RM1993v048n05ABEH001078.
3. Салавова К. Кольца с инволюцией: дис. ... канд. физ.-матем. наук / К. Салавова. М.: 1978. IstinaResearcherID (IRID): 842017.
4. Марков Р. В. Пирсовское представление полуколец с инволюцией // Изв. вузов. матем. 2014. № 4. С. 18–24.

References

1. Pierce, R. S. (1967), "Modules over commutative regular rings", *Mem. Amer. Math. Soc.*, vol. 70, pp. 1–112, DOI:10.1090/memo/0070.

2. Chermnykh, V. V. (1993), "Sheaf representations of semirings" [Puchkovye predstavleniya polukolec], *Russian Math. Surveys* [Uspekhi mat. nauk], vol. 48, no 5, pp. 169–170.
3. Salavova, K. (1978), Rings with Involution [Koltsa s involyutsiey], Candidate of Physico-Mathematical Sciences dissertation, Moscow.
4. Markov, R. V. (2014), "Pierce Representation of Semirings with Involution" [Pirsovskoe predstavlenie polukolets s involyutsiey], *Russian Mathematics* (Izvestiya VUZ. Matematika) [Izv. vuzov. matem.], no 4, pp. 18–24, DOI:10.3103/S1066369X14040033.

Информация об авторах:

Н. С. Протасов – преподаватель кафедры физико-математического и информационного образования Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина (167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр-т, д. 55);

В. В. Чермных – доктор физико-математических наук, доцент; главный научный сотрудник Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина (167001, Россия, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский пр-т, д. 55).

Information about the authors:

N. S. Protasov – Lecturer at the Departments of Physico-Mathematical and Information Education, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University (55, Oktyabrsky prospect, Syktyvkar, 167001, Russia);

V. V. Chermnykh – Doctor of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor; Chief Researcher, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University (55, Oktyabrsky prospect, Syktyvkar, 167001, Russia).