

Научная статья

УДК 519.17:519.711

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-130-141

<https://elibrary.ru/ijreky>



Джемминг k^3 -меров разного размера на кубической решетке

Кирилл Александрович Эберт

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия
sirieeel@rambler.ru

Аннотация. В работе исследуется бидисперсная модель случайной последовательной адсорбции k^3 -меров (кубических блоков) разного размера на кубической решетке с периодическими граничными условиями. Рассматривается алгоритм упаковки, при котором сначала осуществляется максимальное заполнение системы большими k^3 -мерами, после чего свободное пространство заполняется малыми k^3 -мерами. Целью исследования является изучение влияния линейного размера системы и соотношения размеров k^3 -меров на порог джемминга.

Проведено численное моделирование в широком диапазоне параметров модели для соотношений $k_{large}/k_{small} = 2, 5, 10, 20$. Показано, что введение второй фракции k^3 -меров приводит к увеличению порога джемминга. Установлено, что при фиксированном соотношении размеров объектов порог джемминга монотонно уменьшается с ростом k_{large} и стремится к предельному значению, тогда как увеличение соотношения k_{large}/k_{small} приводит к росту порога джемминга за счет более эффективного заполнения пустот малыми k^3 -мерами.

Получены предельные оценки порогов джемминга и отношений концентраций больших и малых k^3 -меров при $k_{large} \rightarrow \infty$. Оценки порогов джемминга демонстрируют значительное повышение предельной концентрации заполнения по сравнению со случаем упаковки k^3 -меров одинакового размера при $k \rightarrow \infty$. Максимальная оценка порога джемминга составила $p_{jam} = 0.6561(3)$ для $k_{large}/k_{small} = 20$, а отношение концентраций больших и малых k^3 -меров – $1.8 : 1$.

Ключевые слова: джемминг; случайная последовательная адсорбция; порог джемминга; k^3 -меры; кубические блоки; кубическая решетка; максимальная упаковка; полидисперсные системы; плотные неупорядоченные структуры; численное моделирование.

Для цитирования: Эберт К. А. Джемминг k^3 -меров разного размера на кубической решетке // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 2(73). С. 130–141. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-130-141. <https://elibrary.ru/ijreky>.

Статья поступила в редакцию 15.03.2026; одобрена после рецензирования 30.05.2026; принята к публикации 20.06.2026.



© Эберт К. А., 2026
Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Research article

Jamming of k^3 -mers of Different Sizes on a Cubic Lattice

Kirill A. Ebert

Perm State University, Perm, Russia
sirieel@rambler.ru

Abstract. A bidisperse model of random sequential adsorption (RSA) of k^3 -mers (cubic blocks) of different sizes on a cubic lattice with periodic boundary conditions is investigated. An adsorption algorithm is considered in which the system is first maximally filled with large k^3 -mers, after which the remaining free space is filled with small k^3 -mers. The aim of the study is to examine the influence of the system size and the size ratio of k^3 -mers on the jamming threshold.

Numerical simulations were performed over a wide range of model parameters for the size ratios $k_{large}/k_{small} = 2, 5, 10, 20$. It is shown that the introduction of a second fraction of k^3 -mers leads to an increase in the jamming threshold. It is established that, for a fixed size ratio, the jamming threshold decreases monotonically with increasing k_{large} and approaches a limiting value, whereas an increase in the ratio k_{large}/k_{small} results in a higher jamming threshold due to more efficient filling of voids by small k^3 -mers.

Limiting estimates of the jamming threshold and the concentration ratio of large and small k^3 -mers were obtained for $k_{large} \rightarrow \infty$. The estimated jamming thresholds demonstrate a significant increase in the limiting packing concentration compared with the case of packing identical k^3 -mers in the limit $k \rightarrow \infty$. The maximum estimated jamming threshold is $p_{jam} = 0.6561(3)$ for $k_{large}/k_{small} = 20$, while the concentration ratio of large and small k^3 -mers is 1.8 : 1.

Keywords: *jamming; random sequential adsorption; jamming threshold; k^3 -mers; cubic blocks; cubic lattice; maximum packing; polydisperse systems; dense disordered structures; numerical simulation.*

For citation: Ebert, K. A. (2026), "Jamming of k^3 -mers of Different Sizes on a Cubic Lattice", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 2(73), pp. 130–141, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-130-141, <https://elibrary.ru/ijreky>.

The article was submitted 15.03.2026; approved after reviewing 30.05.2026; accepted for publication 20.06.2026.

Введение

Проблема максимальной упаковки в бидисперсных системах представляет практический и теоретический интерес. Исследования гранулярных материалов, порошковых сред и бетонных смесей показывают, что введение второй фракции частиц меньшего размера способно существенно увеличивать плотность упаковки за счет заполнения пустот между более крупными частицами. Данный эффект лежит в основе ряда инженерных методов повышения плотности упаковки и прочностных характеристик композитных материалов. Во многих случаях максимальная плотность упаковки достигается при определенном соотношении размеров частиц и их объемных долей, зависящем от геометрии системы и механизма формирования структуры [1–3].

Модели случайной последовательной адсорбции (Random Sequential Adsorption, RSA) широко используются для исследования процессов необратимого заполнения поверхности или объема частицами конечного размера. Истоки данного направления восходят к работе П. Флори [4], посвященной адсорбции молекул на одномерной решетке. Впоследствии подход был распространен на двумерные и трехмерные системы, а также

на объекты различной формы. Одной из ключевых характеристик RSA-процессов является порог джемминга – предельная концентрация заполнения, при которой дальнейшее размещение новых объектов становится невозможным [5–7].

Особый интерес представляют RSA-модели полидисперсных систем, поскольку они позволяют исследовать влияние распределения размеров объектов на структуру упаковки и величину порога джемминга. Подобно реальным гранулярным средам, малые объекты в таких моделях способны занимать области пространства, недоступные для размещения крупных объектов, что приводит к более эффективному заполнению системы. Исследование подобных моделей позволяет установить связь между геометрическими свойствами объектов и предельной концентрацией заполнения, а также выявить закономерности формирования плотных неупорядоченных структур [8–10].

Настоящее исследование продолжает цикл работ [11–13], посвященных моделированию джемминга объектов конечного размера на регулярных решетках. В [11] исследована трехмерная модель джемминга k^3 -меров (кубических блоков). Были определены оценки порогов джемминга при $2 \leq k \leq 80$, а также получена оценка в пределе $k \rightarrow \infty$: $p_{jam} = 0.4225(1)$.

В [12] исследована двумерная модель джемминга k^2 -меров (квадратных блоков) разного размера. В указанной работе были предложены два алгоритма упаковки объектов двух фракций. В первом большие объекты последовательно размещаются до некоторой промежуточной концентрации по алгоритму максимальной упаковки, описанному в [11]. Затем по этому же алгоритму происходит максимальная упаковка малых объектов. Во втором алгоритме большие и малые объекты упаковываются поочередно до состояния джемминга для больших объектов. Далее происходит максимальная упаковка малых объектов. В работе было установлено, что введение малых k^2 -меров способствует более эффективному заполнению свободного пространства на решетке, вследствие чего порог джемминга системы возрастает. Максимально достигнутая концентрация упаковки по первому алгоритму при $k_{large}/k_{small} \rightarrow \infty$ составила $p_{jam} = 0.803(1)$, что существенно превышает значение $p_{jam} \approx 0.5620$ [14, с. 69], характерное для монодисперсного случая при $k \rightarrow \infty$.

В [13] предложена трехмерная модель джемминга k^3 -меров разного размера и представлены первые результаты численного моделирования по первому алгоритму для ограниченного набора параметров модели. Однако влияние линейного размера системы и соотношения размеров объектов на порог джемминга исследовано не было. В связи с этим целью настоящей работы является систематическое исследование влияния указанных факторов на порог джемминга в трехмерной бидисперсной RSA-модели k^3 -меров разного размера.

1. Постановка задачи

Рассматривается кубическая решетка с линейным размером L . На решетке размещаются k^3 -меры двух размеров (сначала большие k^3 -меры, затем малые) при условии отсутствия пересечений между ними. Используются периодические граничные условия, то есть система имеет период L по каждому из трех координатных направлений.

Математически модель имеет вид

$$M = \langle L, W_n, k_{large}, k_{small}, N \rangle,$$

где L – линейный размер кубической решетки, W_n – множество троек координат, задающих положения левых верхних передних вершин k^3 -меров (см. рис. 1), а n – общее количество объектов в системе, k_{large} – длина стороны больших k^3 -меров, k_{small} – длина стороны малых k^3 -меров, N – количество независимых испытаний в эксперименте.

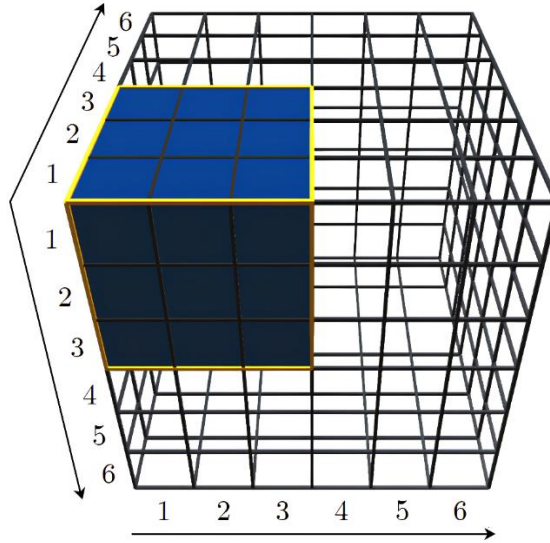


Рис. 1. Размещение 3^3 -мера на кубической решетке с началом в ячейке с координатами $(1, 1, 1)$, $L = 6$ [11]

Обозначим через $NumOfLarge$ количество упакованных k^3 -меров с длиной стороны k_{large} , а через $NumOfSmall$ – количество упакованных k^3 -меров с длиной стороны k_{small} . Пусть p_{large} и p_{small} обозначают доли пространства системы, занятые соответственно большими и малыми k^3 -мерами. Итоговая концентрация k^3 -меров определяется выражением

$$p = p_{large} + p_{small},$$

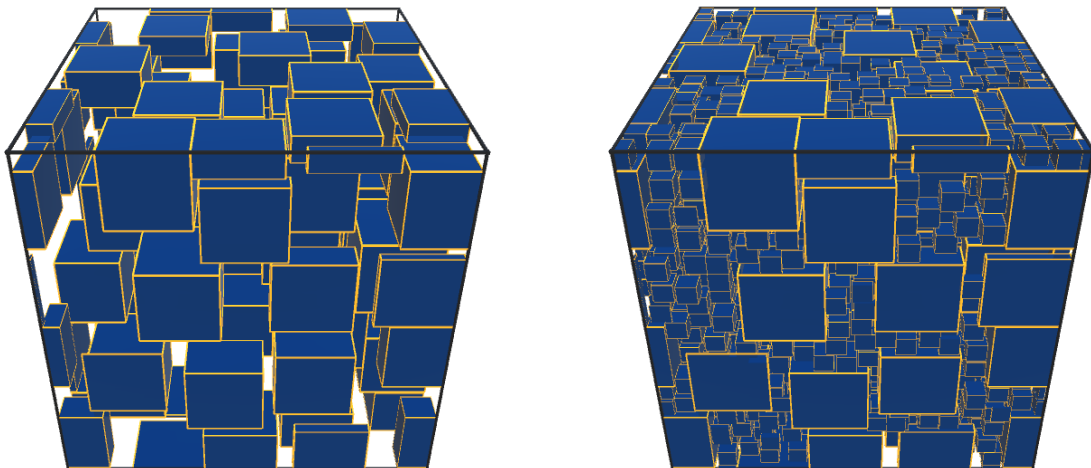
где

$$p_{large} = \frac{NumOfLarge \cdot k_{large}^3}{L^3}, \quad p_{small} = \frac{NumOfSmall \cdot k_{small}^3}{L^3},$$

при этом

$$NumOfLarge + NumOfSmall = n.$$

Пример максимальной упаковки k^3 -меров разного размера по первому алгоритму представлен на рис. 2.



а) $p_{large} = 0.432$

б) $p = 0.631625$

Рис. 2. Визуализация работы первого алгоритма упаковки [13]

2. Метод моделирования

Численное моделирование проводится по первому алгоритму с использованием программы, реализованной на языке С#. Входными данными являются параметры L , k_{large} , k_{small} , N . Для каждого набора параметров выполняется N независимых испытаний. В каждом испытании сначала формируется трехмерная система, максимально заполненная большими k^3 -мерами, после чего оставшееся свободное пространство заполняется малыми k^3 -мерами. В результате каждого независимого испытания определяются концентрации $p_{large, i}$ и $p_{small, i}$. Полученные значения сохраняются в текстовый файл. Для каждого испытания итоговая концентрация определяется как

$$p_i = p_{large, i} + p_{small, i},$$

после чего формируется выборка значений $p_1, p_2, \dots, p_N$.

Для оценки порога джемминга используется формула [11]

$$p_{jam} = \bar{p} \pm t_\gamma \frac{S}{\sqrt{N}},$$

где $\bar{p}$ – среднее значение полученных концентраций, t_γ – коэффициент Стьюдента, соответствующий доверительной вероятности $\gamma = 0.99$ (при $N \geq 1000$ используется значение $t_\gamma \approx 2.58$), S – исправленное среднеквадратическое отклонение.

Значения p_{large}/p_{small} усредняются по количеству независимых испытаний и округляются до второго или третьего знака после запятой.

3. Результаты

В таблице 1 приведены результаты вычислительных экспериментов при $k_{large} = 20$ и $k_{small} = 2$ для различных линейных размеров решетки. Наиболее точная оценка порога джемминга получена для $L = 2000$ и составляет $p_{jam} = 0.790045(6)$. Для сравнения отметим, что в [11] для монодисперсных систем были получены оценки при $k = 2$ и $k = 20$: $p_{jam, k=2} = 0.6453461(10)$, $p_{jam, k=20} = 0.440066(26)$.

Таблица 1. Значения порогов джемминга по первому алгоритму при $k_{large} = 20$, $k_{small} = 2$ для различных L

L	p_{large}/p_{small}	p_{jam}	N
100	1.265	0.790728(15)	1000000
200	1.260	0.790054(13)	200000
400	1.258	0.7901(1)	1000
500	1.257	0.79004(5)	1000
600	1.257	0.79003(4)	1000
800	1.257	0.79005(2)	1000
1000	1.257	0.79004(2)	1000
1200	1.257	0.79005(1)	1000
1500	1.257	0.79005(1)	1000
1800	1.257	0.790046(7)	1000
2000	1.257	0.790045(6)	1000

В бидисперсном случае порог джемминга значительно выше и превышает значения для соответствующих монодисперсных систем примерно на 22 % ($k = 2$) и 80 % ($k = 20$). Такое увеличение максимальной концентрации обусловлено тем, что малые k^3 -меры эффективно заполняют пустоты, формирующиеся между большими k^3 -мерами, что приводит к более плотной упаковке системы в целом.

Во всех последующих вычислительных экспериментах выполнялось $N = 1000$ независимых испытаний. В таблицах 2–4 приведены результаты экспериментов, выполненных для соотношений $k_{large}/k_{small} = 2, 5, 10$ при $10 \leq k_{large} \leq 100$. В экспериментах поддерживалось постоянное соотношение линейного размера решетки и длины стороны больших блоков, равное $L/k_{large} = 20$.

Таблица 2. Значения порогов джемминга по первому алгоритму
при $k_{large} = 10, 20, \dots, 100, k_{large}/k_{small} = 2, L/k_{large} = 20$

k_{large}	k_{small}	p_{large}/p_{small}	p_{jam}
10	5	2.580	0.6367(1)
20	10	2.712	0.6023(1)
30	15	2.758	0.5913(1)
40	20	2.781	0.5859(1)
50	25	2.796	0.5827(1)
60	30	2.805	0.5805(1)
70	35	2.811	0.5790(1)
80	40	2.816	0.5780(1)
90	45	2.822	0.5771(1)
100	50	2.826	0.5764(1)

Таблица 3. Значения порогов джемминга по первому алгоритму
при $k_{large} = 10, 20, \dots, 100, k_{large}/k_{small} = 5, L/k_{large} = 20$

k_{large}	k_{small}	p_{large}/p_{small}	p_{jam}
10	2	1.415	0.7832(1)
20	4	1.689	0.7006(1)
30	6	1.794	0.6760(1)
40	8	1.848	0.6641(1)
50	10	1.882	0.6572(1)
60	12	1.905	0.6526(1)
70	14	1.923	0.6494(1)
80	16	1.935	0.6470(1)
90	18	1.945	0.6451(1)
100	20	1.952	0.6436(1)

Таблица 4. Значения порогов джемминга по первому алгоритму
при $k_{large} = 10, 20, \dots, 100, k_{large}/k_{small} = 10, L/k_{large} = 20$

k_{large}	k_{small}	p_{large}/p_{small}	p_{jam}
10	1	0.848	1
20	2	1.258	0.7901(1)
30	3	1.433	0.7370(1)
40	4	1.529	0.7129(1)
50	5	1.590	0.6992(1)
60	6	1.632	0.6903(1)
70	7	1.663	0.6841(1)
80	8	1.685	0.6794(1)
90	9	1.705	0.6760(1)
100	10	1.721	0.6732(1)

В таблицах 5–7 приведены результаты экспериментов, выполненных для соотношений $k_{large}/k_{small} = 2, 5, 10$ при $110 \leq k_{large} \leq 200$. В экспериментах поддерживалось соотношение $L/k_{large} = 10$. Уменьшение относительного размера системы по сравнению с предыдущей серией экспериментов ($L/k_{large} = 20$) обусловило некоторое увеличение погрешностей оценок порогов джемминга.

Таблица 5. Значения порогов джемминга по первому алгоритму
при $k_{large} = 110, 120, \dots, 200$, $k_{large}/k_{small} = 2$, $L/k_{large} = 10$

k_{large}	k_{small}	p_{large}/p_{small}	p_{jam}
110	55	2.83	0.5757(3)
120	60	2.83	0.5754(3)
130	65	2.83	0.5749(3)
140	70	2.83	0.5747(3)
150	75	2.84	0.5744(3)
160	80	2.84	0.5741(3)
170	85	2.84	0.5739(3)
180	90	2.84	0.5736(3)
190	95	2.84	0.5735(3)
200	100	2.84	0.5735(3)

Таблица 6. Значения порогов джемминга по первому алгоритму
при $k_{large} = 110, 120, \dots, 200$, $k_{large}/k_{small} = 5$, $L/k_{large} = 10$

k_{large}	k_{small}	p_{large}/p_{small}	p_{jam}
110	22	1.961	0.6425(3)
120	24	1.966	0.6414(3)
130	26	1.967	0.6404(3)
140	28	1.974	0.6399(3)
150	30	1.979	0.6394(3)
160	32	1.979	0.6387(3)
170	34	1.985	0.6383(3)
180	36	1.985	0.6377(3)
190	38	1.988	0.6375(3)
200	40	1.989	0.6371(3)

Таблица 7. Значения порогов джемминга по первому алгоритму
при $k_{large} = 110, 120, \dots, 200$, $k_{large}/k_{small} = 10$, $L/k_{large} = 10$

k_{large}	k_{small}	p_{large}/p_{small}	p_{jam}
110	11	1.731	0.6708(3)
120	12	1.741	0.6689(3)
130	13	1.750	0.6674(3)
140	14	1.759	0.6661(3)
150	15	1.765	0.6649(3)
160	16	1.773	0.6640(3)
170	17	1.780	0.6633(3)
180	18	1.782	0.6623(3)
190	19	1.788	0.6617(3)
200	20	1.790	0.6609(3)

Дополнительно в табл. 8 приведены результаты экспериментов, выполненных для соотношения $k_{large}/k_{small} = 20$ при $20 \leq k_{large} \leq 200$. В этом случае также поддерживалось соотношение $L/k_{large} = 10$.

Таблица 8. Значения порогов джемминга по первому алгоритму
при $k_{large} = 20, 40, \dots, 200$, $k_{large}/k_{small} = 20$, $L/k_{large} = 10$

k_{large}	k_{small}	p_{large}/p_{small}	p_{jam}
20	1	0.787	1
40	2	1.191	0.7928(3)
60	3	1.365	0.7414(3)
80	4	1.461	0.7183(3)
100	5	1.522	0.7051(3)
120	6	1.566	0.6969(3)
140	7	1.595	0.6908(3)
160	8	1.618	0.6865(3)
180	9	1.639	0.6833(3)
200	10	1.654	0.6807(3)

Из таблиц 2–8 следует, что при фиксированных соотношениях k_{large}/k_{small} порог джемминга монотонно уменьшается с ростом размеров объектов и стремится к предельным значениям. При увеличении соотношения k_{large}/k_{small} наблюдается рост порога джемминга, что свидетельствует о более эффективном заполнении пустот малыми объектами.

Следует отметить, что при $k_{small} = 1$ достигается полное заполнение решетки ($p_{jam} = 1$), поскольку после завершения упаковки крупных объектов все оставшиеся свободные ячейки могут быть заняты единичными k^3 -мерами.

На рис. 3–4 представлены все полученные значения порогов джемминга и отношений концентраций больших и малых k^3 -меров.

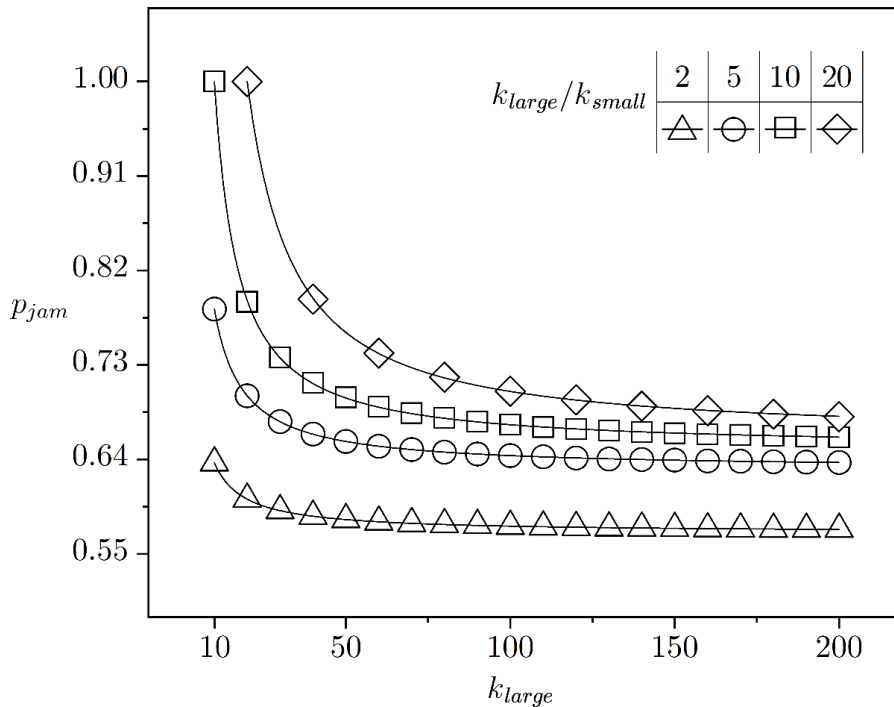


Рис. 3. Зависимости порога джемминга для различных соотношений k_{large}/k_{small} ,
 $10 \leq k_{large} \leq 200$

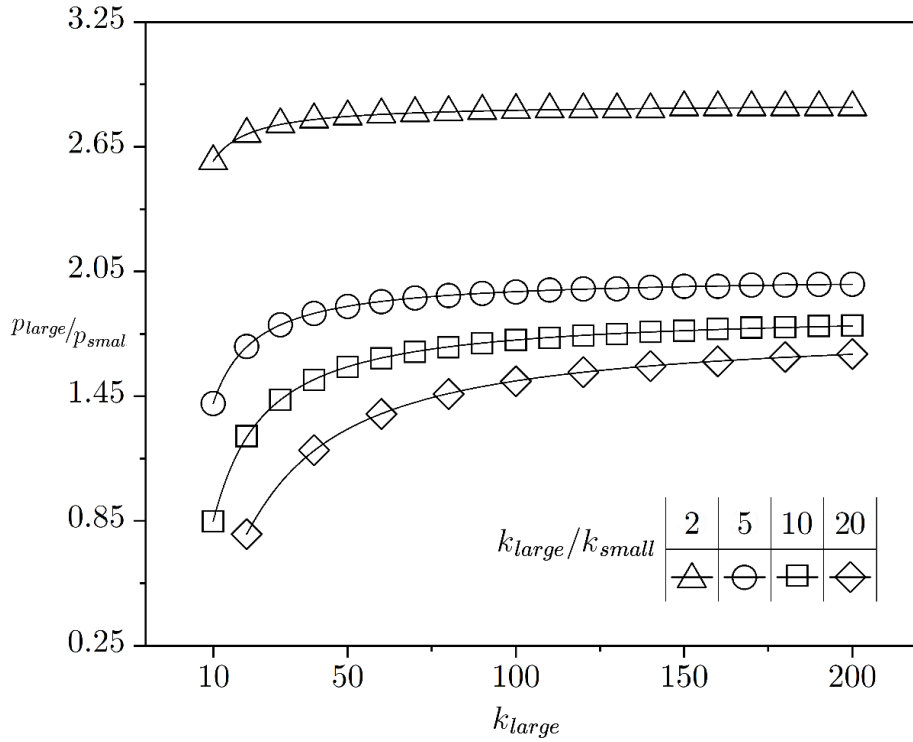


Рис. 4. Зависимости отношений концентраций больших и малых k^3 -меров, $10 \leq k_{large} \leq 200$

Результаты подтверждают, что введение второй фракции объектов является эффективным механизмом повышения плотности упаковки. Оценки порогов джемминга при $k_{large} \rightarrow \infty$ получены путем линейной экстраполяции зависимости p_{jam} от k_{large}^{-1} . Для экстраполяции использовались данные при $100 \leq k_{large} \leq 200$ – рис. 5.

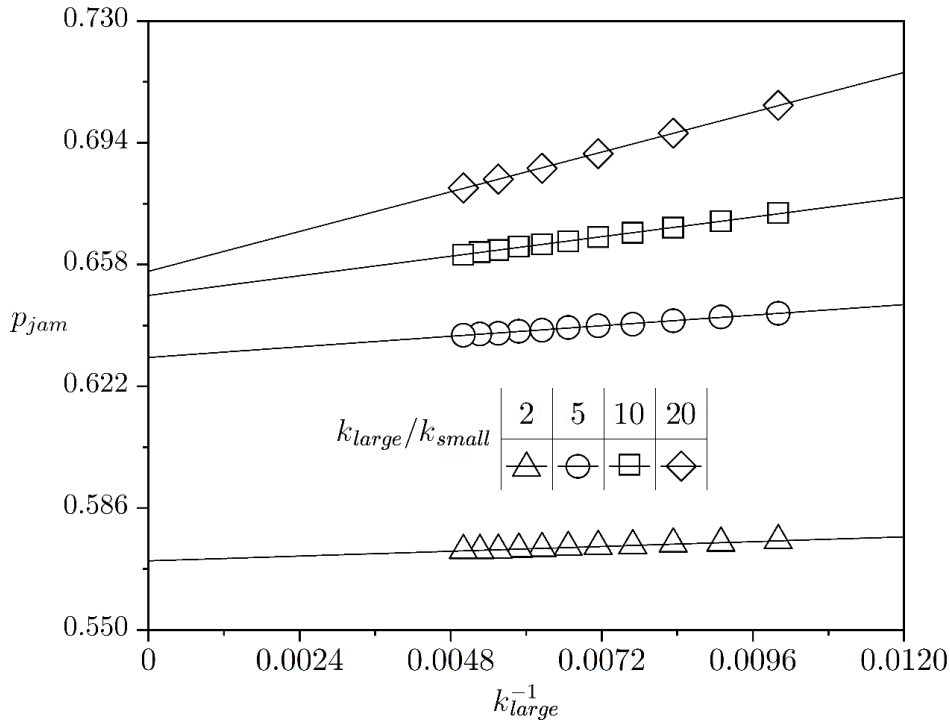


Рис. 5. Экстраполяция порогов джемминга для различных соотношений k_{large}/k_{small} , $100 \leq k_{large} \leq 200$

Предельные значения отношений концентраций больших и малых k^3 -меров получены в ходе аппроксимации соответствующих зависимостей функцией

$$\frac{p_{large}}{p_{small}} = A + \frac{B}{k_{large}}.$$

В каждом случае коэффициент A принимается за оценку в пределе и округляется до одного знака после запятой. Результаты приведены в табл. 9.

Таблица 9. Предельные значения p_{large}/p_{small} и p_{jam} для соотношений $k_{large}/k_{small} = 2, 5, 10, 20$ при $k_{large} \rightarrow \infty$

k_{large}/k_{small}	p_{large}/p_{small}	p_{jam}
2	2.9	0.5705(1)
5	2.0	0.6306(2)
10	1.9	0.6490(2)
20	1.8	0.6561(3)

Стоит отметить, что дальнейшее исследование предельного случая $k_{large}/k_{small} \rightarrow \infty$ требует значительного увеличения вычислительных ресурсов. При $k_{large}/k_{small} > 20$ и сохранении условия $L/k_{large} = 10$ проведение вычислительных экспериментов для больших значений k_{large} оказывается затруднительным вследствие высоких требований к объему оперативной памяти компьютера. Поэтому уточнение оценок порога джемминга в области больших значений k_{large}/k_{small} является перспективным направлением дальнейших исследований.

4. Заключение

В работе проведено численное исследование бидисперсной модели джемминга k^3 -меров разного размера на кубической решетке. Установлено, что введение второй фракции k^3 -меров меньшего размера приводит к существенному увеличению порога джемминга по сравнению с монодисперсным случаем. Показано, что при фиксированном соотношении размеров объектов порог джемминга монотонно уменьшается с ростом k_{large} и стремится к предельному значению. При увеличении соотношения k_{large}/k_{small} наблюдается рост порога джемминга, что связано с более эффективным заполнением свободного пространства малыми k^3 -мерами. Получены предельные оценки порогов джемминга и отношений концентраций больших и малых k^3 -меров при $k_{large} \rightarrow \infty$ для соотношений $k_{large}/k_{small} = 2, 5, 10, 20$. Максимальная оценка порога джемминга составила $p_{jam} = 0.6561(3)$ для $k_{large}/k_{small} = 20$, а соответствующее отношение концентраций больших и малых k^3 -меров – $1.8 : 1$.

Полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем исследовании полидисперсных решеточных RSA-моделей и процессов формирования плотных упаковок объектов конечного размера.

Список источников

1. Furnas C. C. Grading Aggregates—I.—Mathematical Relations for Beds of Broken Solids of Maximum Density // Industrial & Engineering Chemistry. 1931. Vol. 23, № 9. P. 1052–1058. DOI: 10.1021/ie50261a017.
2. McGeary R. K. Mechanical Packing of Spherical Particles // Journal of the American Ceramic Society. 1961. Vol. 44, № 10. P. 513–522. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1961.tb13716.x.
3. de Larrard F. Concrete Mixture Proportioning: A Scientific Approach. London, New York: E & FN Spon, 1999. 421 p.

4. Flory P. J. Intramolecular Reaction between Neighboring Substituents of Vinyl Polymers // *Journal of the American Chemical Society*. 1939. Vol. 61, № 6. P. 1518–1521. DOI: 10.1021/ja01875a053.
5. Rényi A. On a one-dimensional problem concerning random space filling // *Publicationes Mathematicae Instituti Hungarici Academiae Scientiarum*. 1958. Vol. 3. P. 109–127.
6. Evans J. W. Random and cooperative sequential adsorption // *Reviews of Modern Physics*. 1993. Vol. 65, № 4. P. 1281–1329. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.1281.
7. Talbot J., Tarjus G., Van Tassel P. R., Viot P. From car parking to protein adsorption: an overview of sequential adsorption processes // *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. 2000. Vol. 165, № 1. P. 287–324. DOI: 10.1016/S0927-7757(99)00409-4.
8. Torquato S. *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*. New York: Springer, 2002. 703 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-6355-3.
9. Sergi D., D'Angelo C., Scocchi G., Ortona A. Random Packing of Small Blocks: Pressure Effects, Orientational Correlations and Application to Polymer-Based Composites // *Particle & Particle Systems Characterization*. 2012. Vol. 29, № 1. P. 24–34. DOI: 10.1002/ppsc.201200001.
10. Hart R. C., Aarão Reis F. D. A. Random sequential adsorption of polydisperse mixtures on lattices // *Phys. Rev. E*. 2016. Vol. 94, № 2. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.022802.
11. Эберт К. А., Бузмакова М. М., Русаков С. В. Максимальная случайная упаковка блоков на кубической решетке // *Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование"* (Вестник ЮУрГУ ММП). 2024. Т. 17, № 4. С. 82–93. DOI: 10.14529/mmp240407.
12. Эберт К. А., Бузмакова М. М. Джемминг блоков разного размера на квадратной решетке // *Математическое моделирование в естественных науках: материалы конференции*. 2024. С. 449–452.
13. Эберт К. А., Бузмакова М. М. Моделирование фильтрационных свойств пористой структуры на основе бидисперсного кварцевого песка // *Физико-химические проблемы адсорбции, структуры и химии поверхности нанопористых материалов: сб. тр. XXI всерос. симпозиума с междунар. участием*. 2025. С. 128–130.
14. Эберт К. А., Бузмакова М. М. Модели перколяции и джемминга неточечных объектов на квадратной решетке. Пермь, 2024. 86 с.

References

1. Furnas, C. C. (1931), "Grading Aggregates—I.—Mathematical Relations for Beds of Broken Solids of Maximum Density", *Industrial & Engineering Chemistry*, vol. 23, no 9, pp. 1052–1058, doi: 10.1021/ie50261a017.
2. McGeary, R. K. (1961), "Mechanical Packing of Spherical Particles", *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 44, no 10, pp. 513–522, doi: 10.1111/j.1151-2916.1961.tb13716.x.
3. de Larrard, F. (1999), *Concrete Mixture Proportioning: A Scientific Approach*, E & FN Spon, London, New York, 421 p.
4. Flory, P. J. (1939), "Intramolecular Reaction between Neighboring Substituents of Vinyl Polymers", *Journal of the American Chemical Society*, vol. 61, no 6, pp. 1518–1521, doi: 10.1021/ja01875a053.
5. Rényi, A. (1958), "On a one-dimensional problem concerning random space filling", *Publicationes Mathematicae Instituti Hungarici Academiae Scientiarum*, vol. 3, pp. 109–127.
6. Evans, J. W. (1993), "Random and cooperative sequential adsorption", *Reviews of Modern Physics*, vol. 65, no 4, pp. 1281–1329, doi: 10.1103/RevModPhys.65.1281.

7. Talbot, J., Tarjus, G., Van Tassel, P. R., Viot, P. (2000), "From car parking to protein adsorption: an overview of sequential adsorption processes", *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, vol. 165, no 1, pp. 287–324, doi: 10.1016/S0927-7757(99)00409-4.
8. Torquato, S. (2002), *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*, Springer, New York, 703 p., doi: 10.1007/978-1-4757-6355-3.
9. Sergi, D., D'Angelo, C., Scocchi, G., Ortona, A. (2012), "Random Packing of Small Blocks: Pressure Effects, Orientational Correlations and Application to Polymer-Based Composites", *Particle & Particle Systems Characterization*, vol. 29, no 1, pp. 24–34, doi: 10.1002/ppsc.201200001.
10. Hart, R. C., Aarão Reis, F. D. A. (2016), "Random sequential adsorption of polydisperse mixtures on lattices", *Phys. Rev. E*, vol. 94, no 2, doi: 10.1103/PhysRevE.94.022802.
11. Ebert, K. A., Buzmakova, M. M., Rusakov, S. V. (2024), "Maksimal'naya sluchainaya upakovka blokov na kubicheskoi reshetke" [Jamming coverage of blocks on a cubic lattice], *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye"* [Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)], vol. 17, no 4, pp. 82–93, doi: 10.14529/mmp240407.
12. Ebert, K. A., Buzmakova, M. M. (2024), "Dzhemming blokov raznogo razmera na kvadratnoi reshetke", *Matematicheskoe modelirovanie v estestvennykh naukakh: materialy konferentsii*, pp. 449–452.
13. Ebert, K. A., Buzmakova, M. M. (2025), "Modelirovanie fil'tratsionnykh svoystv poristoi struktury na osnove bidispersnogo kvartseвого песка", *Fiziko-khimicheskie problemy adsorbtsii, struktury i khimii poverkhnosti nanoporistykh materialov: sbornik trudov XXI vserossiiskogo simpoziuma s mezhdunarodnym uchastiem*, pp. 128–130.
14. Ebert, K. A., Buzmakova, M. M. (2024), *Modeli perkolyatsii i dzhemminga netochechnykh ob'ektov na kvadratnoi reshetke*, Perm, 86 p.

Информация об авторах:

К. А. Эберт – аспирант, Пермский государственный национальный исследовательский университет (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), AuthorID: 1037665.

Information about the authors:

K. A. Ebert – postgraduate student, Perm State University (15 Bukireva St., Perm, Russia, 614068), AuthorID: 1037665.