

Научная статья

УДК 519.17

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-20-29

<https://elibrary.ru/xxbfyj>



О графах Шилла диаметра 4

Александр Алексеевич Махнев¹, Мариана Малиловна Исакова²

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

¹makhnev@imm.uran.ru

²Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, Россия

²isakova2206@mail.ru

Аннотация. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и θ_1 – второе собственное значение графа. Тогда θ_1 не меньше $\min \left\{ \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}, a_3 \right\}$, причем $\theta_1 \geq$

$\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$, если $d \geq 4$. Кулен и Пак назвали графом Шилла дистанционно регуляр-

ный граф диаметра 3 с $\theta_1 = a_3$. В этом случае $\theta_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$ и a_3 делит k . Дистанционно регулярный граф назовем графом Шилла диаметра d , если $d \geq 4$ и $\theta_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$. В случае $a_1 = 0$ имеем $\theta_1 = \sqrt{k}$. Заметим, что для дистанционно регуляр-

ных графов Шилла диаметра 5 и примитивных графов Шилла диаметра 4 с числом вершин, не большим 4096, допустимых массивов пересечений нет. В настоящей работе рассматриваются антиподальные графы Шилла диаметра 4. Доказано, что дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{20, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$ и $\{25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25\}$ не существуют.

Ключевые слова: граф Шилла; дистанционно регулярный граф.

Для цитирования: Махнев А. А., Исакова М. М. О графах Шилла диаметра 4 // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 2(73). С. 20–29. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-20-29. <https://elibrary.ru/xxbfyj>.

Благодарности: исследование выполнено при поддержке Естественного научного фонда Китая (проект № 12171126).

Статья поступила в редакцию 29.04.2026; одобрена после рецензирования 10.06.2026; принята к публикации 25.06.2026.



© Махнев А. А., Исакова М. М., 2026
Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Research article

On Shilla Graphs of Diameter 4

Alexander A. Makhnev¹, Mariana M. Isakova²

¹N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia

¹makhnev@imm.uran.ru

²Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik, Russia

²isakova2206@mail.ru

Abstract. Let Γ be a distance-regular graph with diameter $d \geq 3$ and θ_1 is the second eigenvalue of the graph. Then $\theta_1 \geq \min \left\{ \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}, a_3 \right\}$ and $\theta_1 \geq \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$ if $d \geq 4$.

Koolen and Park called Shilla graph a distance-regular graph with diameter 3 and $\theta_1 = a_3$.

In this case $\theta_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$ and a_3 divides k . Distance-regular graph with diameter $d \geq 4$

and $\theta_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$ we call Shilla graph of diameter d . In the case $a_1 = 0$ we have $\theta_1 = \sqrt{k}$. Note that Shilla graphs of diameter 5 and primitive Shilla graphs of diameter 4 with at most 4096 vertices do not exist. In the paper it is considered Shilla graphs of diameter 4. It is proved that distance-regular graphs with intersection arrays $\{20, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$ and $\{25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25\}$ do not exist.

Keywords: Shilla graph; distance-regular graph.

For citation: Makhnev, A. A. and Isakova, M. M. (2026), "On Shilla Graphs of Diameter 4", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 2(73), pp. 20–29, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-20-29, <https://elibrary.ru/xxbfyj>.

Acknowledgments: the study was supported by the Natural Science Foundation of China (project No 12171126).

The article was submitted 29.04.2026; approved after reviewing 10.06.2026; accepted for publication 25.06.2026.

Введение

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и θ_1 — второе собственное значение графа. Тогда θ_1 не меньше $\min \left\{ \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}, a_3 \right\}$, причем $\theta_1 \geq \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$, если $d \geq 4$. Дж. Кулен и Дж. Пак назвали графом Шилла дистанционно регулярный граф диаметра 3 с $\theta_1 = a_3$. В этом случае $\theta_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$ и a_3 делит k [1, теорема 7].

Дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 4$ назовем графом Шилла диаметра d , если $\theta_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$. В случае $a_1 = 0$ имеем $\theta_1 = \sqrt{k}$.

По предложению 3.5 [2] $\theta_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$ тогда и только тогда, когда Γ является графом Шилла или антиподальным графом диаметра 4.

В работе рассмотрены антиподальные графы Шилла диаметра 4.

Перечислим допустимые массивы пересечений антиподальных графов Шилла Γ диаметра 4 из [3, стр. 421 – 422]. Через Γ' обозначим антиподальное частное (свернутый граф) Γ .

1. $\{5, 4, 1, 1; 1, 1, 4, 5\}$ граф Уэлса, число вершин $v = 1 + 5 + 20 + 5 + 1 = 32$, спектр $5^1, \sqrt{5}^8, 1^{10}, -\sqrt{5}^8, -3^5$.

2. $\{6, 4, 2, 1; 1, 1, 4, 6\}$ граф 3. $Sut_6.2$, число вершин $v = 1 + 6 + 24 + 12 + 2 = 45$, спектр $6^1, 3^{12}, 1^9, -2^{18}, -3^5$.

3. $\{10, 6, 4, 1; 1, 2, 6, 10\}$ локально Петерсеновский граф, число вершин $v = 1 + 10 + 30 + 20 + 2 = 63$, спектр $10^1, 5^{12}, 1^{14}, -2^{30}, -4^6$, Γ' имеет параметры $(21, 10, 1, 4)$.

4. $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$ число вершин $v = 1 + 20 + 120 + 20 + 1 = 162$, спектр $20^1, 5^{36}, 2^{60}, -4^{45}, -7^{20}$, граф $\Gamma_{3,4}$ сильно регулярен с параметрами $(162, 21, 0, 3)$, Γ' имеет параметры $(81, 20, 1, 6)$.

5. $\{20, 18, 4, 1; 1, 2, 18, 20\}$ граф смежных классов укороченного тернарного кода Голея, число вершин $v = 1 + 20 + 180 + 40 + 2 = 243$, спектр $20^1, 5^{72}, 2^{20}, -4^{90}, -7^{20}$.

6. $\{20, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$, число вершин $v = 1 + 20 + 360 + 100 + 5 = 486$, спектр $20^1, 5^{180}, 2^{60}, -4^{225}, -7^{20}$, Γ' имеет параметры $(81, 20, 1, 6)$.

7. $\{21, 20, 2, 1; 1, 1, 20, 21\}$ число вершин $v = 1 + 21 + 420 + 42 + 2 = 486$, спектр $21^1, \sqrt{21}^{162}, 3^{105}, -\sqrt{21}^{162}, -6^{56}$, Γ' имеет параметры $(162, 21, 0, 3)$.

8. $\{22, 21, 3, 1; 1, 3, 21, 22\}$ число вершин $v = 1 + 22 + 154 + 22 + 1 = 200$, спектр $22^1, \sqrt{22}^{50}, 2^{77}, -\sqrt{22}^{50}, -8^{22}$, Γ' имеет параметры $(100, 22, 0, 6)$.

9. $\{22, 21, 4, 1; 1, 2, 21, 22\}$ число вершин $v = 1 + 22 + 231 + 44 + 2 = 300$, спектр $22^1, \sqrt{22}^{100}, 2^{77}, -\sqrt{22}^{100}, -8^{22}$.

10. $\{22, 21, 5, 1; 1, 1, 21, 22\}$ число вершин $v = 1 + 22 + 462 + 110 + 5 = 600$, спектр $22^1, \sqrt{22}^{250}, 2^{77}, -\sqrt{22}^{250}, -8^{22}$.

Графы под номерами 8 – 10 являются антиподальными расширениями графа Хигмена–Симса.

11. $\{25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25\}$ число вершин $v = 1 + 25 + 300 + 25 + 1 = 352$, спектр $25^1, 5^{88}, 3^{120}, -5^{88}, -7^{55}$, граф $\Gamma_{3,4}$ сильно регулярен с параметрами $(352, 26, 0, 2)$, Γ' имеет параметры $(176, 25, 0, 4)$.

12. $\{25, 24, 3, 1; 1, 1, 24, 25\}$ число вершин $v = 1 + 25 + 600 + 75 + 3 = 704$, спектр $25^1, 5^{264}, 3^{120}, -5^{264}, -7^{55}$.

13. $\{26, 25, 1, 1; 1, 1, 25, 26\}$ число вершин $v = 1 + 26 + 1050 + 26 + 1 = 704$, спектр $26^1, \sqrt{26}^{176}, 4^{208}, -\sqrt{26}^{176}, -6^{143}$, Γ' имеет параметры $(352, 26, 0, 2)$.

14. $\{27, 20, 6, 1; 1, 3, 20, 27\}$ число вершин $v = 1 + 27 + 180 + 54 + 2 = 264$, спектр $27^1, 9^{44}, 3^{55}, -3^{132}, -6^{32}$, Γ' имеет параметры $(88, 27, 6, 9)$.

15. $\{28, 15, 6, 1; 1, 6, 15, 28\}$ половинный 8-куб, число вершин $v = 1 + 28 + 70 + 28 + 1 = 128$, спектр $28^1, 14^8, 4^{28}, -2^{56}, -4^{35}$, Γ' имеет параметры $(64, 28, 12, 12)$.

16. $\{32, 27, 6, 1; 1, 6, 27, 32\}$ число вершин $v = 1 + 32 + 144 + 32 + 1 = 210$, спектр $32^1, 8^{35}, 2^{84}, -4^{70}, -10^{20}$, граф $\Gamma_{3,4}$ сильно регулярен с параметрами $(210, 33, 0, 6)$, Γ' имеет параметры $(105, 32, 4, 12)$.

17. $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$ граф Сойчера, число вершин $v = 1 + 32 + 216 + 64 + 2 = 315$, спектр $32^1, 8^{70}, 2^{84}, -4^{140}, -10^{20}$.

18. $\{32, 27, 9, 1; 1, 3, 27, 32\}$ число вершин $v = 1 + 32 + 288 + 96 + 3 = 420$, спектр $32^1, 8^{105}, 2^{84}, -4^{210}, -10^{20}$.

19. $\{32, 27, 10, 1; 1, 2, 27, 32\}$ число вершин $v = 1 + 32 + 432 + 32 + 1 = 630$, спектр $32^1, 8^{175}, 2^{84}, -4^{350}, -10^{20}$.

Графы под номерами 16 и 18 не существуют по [4].

20. $\{33, 32, 3, 1; 1, 3, 32, 33\}$ число вершин $v = 1 + 33 + 352 + 33 + 1 = 420$, спектр $26^1, \sqrt{33}^{105}, 3^{154}, -\sqrt{33}^{105}, -9^{55}$, Γ' имеет параметры $(210, 33, 0, 6)$.

21. $\{33, 32, 5, 1; 1, 1, 32, 33\}$ число вершин $v = 1 + 33 + 1056 + 165 + 5 = 1260$, спектр $26^1, \sqrt{33}^{525}, 3^{154}, -\sqrt{33}^{525}, -9^{55}$.

22. $\{36, 35, 2, 1; 1, 2, 35, 36\}$ число вершин $v = 1 + 36 + 630 + 36 + 1 = 704$, спектр $36^1, 6^{176}, 4^{231}, -6^{176}, -8^{120}$, граф $\Gamma_{3,4}$ сильно регулярен с параметрами $(704, 37, 0, 2)$, Γ' имеет параметры $(352, 36, 0, 4)$.

23. $\{36, 35, 3, 1; 1, 1, 35, 36\}$ число вершин $v = 1 + 36 + 1260 + 108 + 3 = 1408$, спектр $36^1, 6^{528}, 4^{231}, -6^{528}, -8^{120}$.

24. $\{37, 36, 1, 1; 1, 1, 36, 37\}$ число вершин $v = 1 + 37 + 1332 + 37 + 1 = 1408$, спектр $37^1, \sqrt{37}^{352}, 5^{407}, -\sqrt{37}^{352}, -7^{296}$.

25. $\{45, 32, 12, 1; 1, 6, 32, 45\}$ $AT4(3, 3, 3)$ -граф $3.O_6^-(3)$, число вершин $v = 1 + 45 + 240 + 90 + 2 = 378$, спектр $45^1, 15^{42}, 3^{90}, -3^{210}, -9^{45}$, Γ' имеет параметры $(126, 45, 12, 18)$.

Для $AT4(3, 3, r)$ -графа параметр r равен 2, 3, 6. Но в случаях $r = 2, 6$ граф не существует [5].

26. $\{45, 40, 6, 1; 1, 6, 40, 45\}$ число вершин $v = 1 + 45 + 300 + 45 + 1 = 392$, спектр $45^1, 9^{70}, 3^{150}, -5^{126}, -11^{45}$, граф Q -полиномиальный, $\Gamma_{3,4}$ сильно регулярен с параметрами $(392, 46, 0, 6)$, Γ' имеет параметры $(196, 45, 4, 12)$.

27. $\{45, 40, 8, 1; 1, 4, 40, 45\}$ число вершин $v = 1 + 45 + 450 + 90 + 2 = 588$, спектр $45^1, 9^{140}, 3^{150}, -5^{252}, -11^{45}$.

28. $\{45, 40, 9, 1; 1, 3, 40, 45\}$ число вершин $v = 1 + 45 + 600 + 135 + 3 = 784$, спектр $45^1, 9^{210}, 3^{150}, -5^{378}, -11^{45}$.

29. $\{45, 40, 10, 1; 1, 2, 40, 45\}$ число вершин $v = 1 + 45 + 900 + 135 + 3 = 1176$, спектр $45^1, 9^{350}, 3^{150}, -5^{630}, -11^{45}$.

30. $\{45, 40, 11, 1; 1, 1, 40, 45\}$ число вершин $v = 1 + 45 + 1800 + 495 + 11 = 2352$, спектр $45^1, 9^{770}, 3^{150}, -5^{1386}, -11^{45}$.

31. $\{45, 44, 6, 1; 1, 3, 44, 45\}$ число вершин $v = 1 + 45 + 660 + 90 + 2 = 798$, спектр $45^1, 3\sqrt{5}^{266}, 3^{209}, -3\sqrt{5}^{266}, -12^{56}$, Γ' имеет параметры $(266, 45, 0, 9)$.

32. $\{45, 44, 8, 1; 1, 1, 44, 45\}$ число вершин $v = 1 + 45 + 1980 + 360 + 8 = 2394$, спектр $45^1, 3\sqrt{5}^{1064}, 3^{209}, -3\sqrt{5}^{1064}, -12^{56}$.

33. $\{46, 45, 3, 1; 1, 3, 45, 46\}$ число вершин $v = 1 + 46 + 690 + 46 + 1 = 784$, спектр $46^1, \sqrt{46}^{266}, 4^{276}, -\sqrt{46}^{266}, -10^{115}$, Γ' имеет параметры $(392, 46, 0, 6)$.

34. $\{46, 45, 4, 1; 1, 2, 45, 46\}$ число вершин $v = 1 + 46 + 1035 + 92 + 2 = 1176$, спектр $46^1, \sqrt{46}^{392}, 4^{276}, -\sqrt{46}^{392}, -10^{115}$.

35. $\{46, 45, 5, 1; 1, 5, 45, 46\}$ число вершин $v = 1 + 46 + 2070 + 46 + 1 = 2352$, спектр $46^1, \sqrt{46}^{980}, 4^{276}, -\sqrt{46}^{980}, -10^{115}$.

36. $\{49, 48, 2, 1; 1, 2, 48, 49\}$ число вершин $v = 1 + 49 + 1176 + 49 + 1 = 1276$, спектр $49^1, 7^{319}, 5^{406}, -7^{319}, -9^{231}$, граф Q -полиномиальный, $\Gamma_{3,4}$ сильно регулярен с параметрами $(1276, 50, 0, 2)$, Γ' имеет параметры $(638, 49, 0, 4)$.

37. $\{49, 48, 3, 1; 1, 1, 48, 49\}$ число вершин $v = 1 + 49 + 2352 + 147 + 3 = 2552$, спектр $49^1, 7^{957}, 5^{406}, -7^{957}, -9^{231}$.

В настоящей работе доказывается несуществование графов с некоторыми массивами пересечений из нашего списка.

Теорема 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{20, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$ не существует.*

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25\}$ не существует.*

1. Тройные числа пересечений

В доказательстве теорем используются тройные числа пересечений [6].

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра d . Если u_1, u_2, u_3 – вершины графа Γ , r_1, r_2, r_3 – неотрицательные целые числа, не большие d . Через $\left\{ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right\}$ обозначим множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, а через $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$ – число вершин в $\left\{ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right\}$. Числа $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$ будем писать $[r_1 r_2 r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1 r_2 r_3]$ нет общих формул. Однако, в [7] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1 r_2 r_3]$.

Пусть u, v, w – вершины графа Γ , $W = d(u, v), U = d(v, w), V = d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x, u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jw} \delta_{hv}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iw} \delta_{hu}$ и $[ij0] = \delta_{iu} \delta_{jv}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$ и сосчитав число вершин, находящихся на всех возможных расстояниях от третьей:

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^d [ljh] = p_{jh}^u - [0jh] \\ \sum_{l=0}^d [ilh] = p_{ih}^v - [i0h] \\ \sum_{l=0}^d [ijl] = p_{ij}^w - [ij0] \end{cases} \quad (+)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i - j| > W$ или $i + j < W$ имеем $p_{ij}^w = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, \dots, d\}$.

Положим

$$S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix},$$

где Q_{ij} – элементы дуальной матрицы собственных значений Q .

Если параметр Крейна $q_{ij}^h = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\} = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$, $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$, $[ijh]' = \begin{bmatrix} uvw \\ ihj \end{bmatrix}$, $[ijh]^* = \begin{bmatrix} uvw \\ jih \end{bmatrix}$ и $[ijh]^\sim = \begin{bmatrix} uvw \\ hji \end{bmatrix}$. Вычисление параметров $[ijh]'$, $[ijh]^*$ и $[ijh]^\sim$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

2. Граф с массивом пересечений $\{20, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{20, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$ имеет спектр $20^1, 5^{180}, 2^{60}, -4^{225}, -7^{20}, 1 + 20 + 360 + 100 + 5 = 486$ вершин и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 180 & 60 & 225 & 20 \\ 1 & 45 & 6 & -45 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -9 & 6 & 9 & -7 \\ 1 & -36 & 60 & -45 & 20 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. Числа пересечений графа Γ равны

$$\begin{aligned} p_{11}^1 &= 1, p_{12}^1 = 18, p_{23}^1 = 90, p_{22}^1 = 252, p_{33}^1 = 5, p_{34}^1 = 5, \\ p_{11}^2 &= 1, p_{12}^2 = 14, p_{13}^2 = 5, p_{22}^2 = 270, p_{23}^2 = 70, p_{24}^2 = 5, p_{33}^2 = 25; \\ p_{12}^3 &= 18, p_{22}^3 = 252, p_{13}^3 = 1, p_{14}^3 = 1, p_{23}^3 = 90, p_{33}^3 = p_{34}^3 = 4; \\ p_{13}^4 &= 20, p_{22}^4 = 360, p_{24}^4 = 1, p_{33}^4 = 80. \end{aligned}$$

Доказательство. Прямые вычисления по [2, лемма 4.1.7].

Пусть u, v, w – вершины графа Γ , $[ihl] = \begin{bmatrix} uvw \\ ihl \end{bmatrix}$, $\Delta = \Gamma_2(u)$ и $\Lambda = \Gamma_2(\Delta)$. Тогда Λ – регулярный граф степени $p_{22}^2 = 270$ на $k_2 = 360$ вершинах. Заметим, что для нашего графа $\Lambda = \Delta_2$.

Лемма 2. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 1$. Тогда верны равенства:

$$[111] = r_1, [112] = [121] = -r_1 + 1, [122] = r_1 + r_2 + 8, [123] = [132] = -r_2 + 5, [133] = r_2;$$

$$[211] = -r_1 - r_2 + 1, [212] = [221] = r_1 + r_2 + 12, [222] = -6r_1 - 6r_2 + 198, [223] = [232] = 5r_1 + 5r_2 + 60, [233] = -5r_1 - 5r_2 + 5, [234] = [243] = 5;$$

$$[311] = r_2, [312] = [321] = -r_2 + 5, [322] = 5r_1 + 5r_2 + 40, [323] = [332] = -5r_1 - 4r_2 + 25, [333] = 5r_1 + 4r_2;$$

$$[422] = 5,$$

где $r_1 + r_2 \leq 1$.

Доказательство. Решая систему линейных уравнений, заданных формулами (+), и вводя независимые переменные $[111] = r_1, [133] = r_2$, получим равенства из заключения леммы. Учитывая неотрицательность тройных чисел пересечений, получим неравенство $r_1 + r_2 \leq 1$.

По лемме 2 имеем $192 \leq [222] = -6r_1 - 6r_2 + 198 \leq 198$.

Лемма 3. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 3$. Тогда верны равенства:

$$[112] = r_{10}/4 + r_{11}, [113] = -r_{10}/4 - r_{11} + 1, [121] = -r_{10} + r_9 - 20, [122] = -r_{10}/4 + 9, [123] = 5r_{10}/4 - r_9 + 25, [131] = r_{10} - r_9 + 21, [132] = -r_{11} + 5, [133] = -r_{10} + r_{11} + r_9 - 21;$$

$$[212] = [221] = -r_{10}/4 + 13, [213] = [231] = r_{10}/4, [214] = [241] = 1, [222] = 3r_{10}/2 + 192, [223] = [232] = -5r_{10}/4 + 65, [233] = r_{10}, [234] = [243] = 4;$$

$$[312] = -r_{11} + 5, [313] = r_{11}, [321] = 5r_{10}/4 - r_9 + 25, [322] = -5r_{10}/4 + 25, [323] = r_9, [331] = -5r_{10}/4 + r_9 - 20, [332] = 5r_{10}/4 + r_{11} + 20, [333] = -r_{11} - r_9 + 25;$$

$$[422] = 5,$$

где $20 \leq r_9 \leq 25, r_{10}/4 + r_{11} \leq 1, r_{10}$ делится на 4.

Доказательство. Упрощение формул (+) как в доказательстве леммы 2.

По лемме 3 имеем $192 \leq [222] = 3r_{10}/2 + 192 \leq 198$.

Лемма 4. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 4$. Тогда верны равенства:

$$[113] = [131] = 1, [122] = 14;$$

$$[213] = [231] = 14, [222] = 270, [244] = 4;$$

$$[313] = [331] = 5, [322] = 70, [333] = 20;$$

$$[422] = 5.$$

Доказательство. Упрощение формул (+) как в доказательстве леммы 2.

Напомним, что $p_{12}^2 = 14, p_{22}^2 = 270, p_{23}^2 = 70, p_{24}^2 = 5$. Для числа ребер e между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$ в графе Λ выполняются неравенства $17478 = 84 \cdot 192 + 1350 \leq e \leq 84 \cdot 198 + 1350 = 17982$. С другой стороны, имеем $e = 270(269 - \lambda)$, где λ – среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$, следовательно, $64.73 \leq (269 - \lambda) \leq 66.6$ и $202.4 \leq \lambda \leq 204.27$.

Лемма 5. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$. Тогда верны равенства:

$$[111] = r_5, [112] = -r_4 + r_6 + r_8 + 9, [113] = r_4 - r_5 - r_6 - r_8 - 8, [121] = -r_5 - r_6 + r_7 - r_8 + 1, [122] = r_4, [123] = -r_4 + r_5 + r_6 - r_7 + r_8 + 13, [131] = r_6 - r_7 + r_8, [132] = -r_6 - r_8 + 5, [133] = r_7;$$

$$[211] = -r_5 - r_6 + 1, [212] = [221] = r_4, [213] = [231] = -r_4 + r_5 + r_6 + 13, [222] = -6r_4 + 264, [223] = [232] = 5r_4, [224] = [242] = 5, [233] = -4r_4 - r_5 - r_6 + 57;$$

$$[311] = r_6, [312] = -r_6 - r_8 + 5, [313] = r_8, [321] = -r_4 + r_5 + r_6 - r_7 + r_8 + 13, [322] = 5r_4, [323] = -4r_4 - r_5 - r_6 + r_7 - r_8 + 57, [331] = r_4 - r_5 - 2r_6 + r_7 - r_8 - 8, [332] = -5r_4 + r_6 + r_8 + 65, [333] = 4r_4 + r_5 + r_6 - r_7 - 32;$$

$$[422] = 5$$

где $r_5 + r_6 \leq 1, r_6 + r_8 \leq 5, 8 \leq r_4 \leq 14, 0 \leq r_7 \leq 5$.

Доказательство. Упрощение формул (+) как в доказательстве леммы 2.

Если $r_4 = 8$, то равенство $[113] = r_4 - r_5 - r_6 - r_8 - 8$ влечет $r_5 = r_6 = r_8 = 0$, $[131] = r_6 - r_7 + r_8$ влечет $r_7 = 0$.

Если $r_5 = 1$, то равенство $[113] = r_4 - r_5 - r_6 - r_8 - 8$ влечет $r_4 = r_6 + r_8 + 9$, $[211] = -r_5 - r_6 + 1$ влечет $r_6 = 0$, $[121] = -r_5 - r_6 + r_7 - r_8 + 1$ влечет $r_7 = r_8$. Далее, $[132] = [312]^* = -r_8^* + 5, r_8^* = r_7$ $[132] = [123]' = -r_4' + 14$, поэтому $-r_4 + 14 = -r_7 + 5$ и $r_4 = r_7 + 9$.

По лемме 5 имеем $180 \leq [222] \leq 216$.

Если $d(u, v) = 2, \{z\} = [u] \cap [v]$, то число вершин w с $[111] = 1$ равно 16.

Пусть $d(u, v) = 2$.

Подсчитаем число f_1 пар вершин u, z на расстоянии 1 в графе Δ , где $u \in \begin{Bmatrix} uv \\ 21 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} uv \\ 22 \end{Bmatrix}$. С одной стороны, по лемме 2 имеем $[221] = r_1 + r_2 + 12$, где $r_1 + r_2 \leq 1$, поэтому $168 = 14 \cdot 12 \leq f_1 \leq 14 \cdot 13 = 182$. С другой стороны, по лемме 5 имеем $[211] = -r_5 - r_6 + 1$, поэтому $168 \leq -\sum_i (r_5^i + r_6^i) + 270 \leq 182$, $88 \leq \sum_i (r_5^i + r_6^i) \leq 102$ и $0.3259 \leq \sum_i (r_5^i + r_6^i)/270 \leq 0.378$.

Подсчитаем число f_2 пар вершин u, z на расстоянии 2 в графе Δ , где $u \in \begin{Bmatrix} uv \\ 21 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} uv \\ 22 \end{Bmatrix}$. С одной стороны, по лемме 3 имеем $192 \leq [222] \leq 198$, поэтому $2688 = 14 \cdot 192 \leq f_2 \leq 14 \cdot 198 = 2772$. С другой стороны, по лемме 5 имеем $[212] = r_4$, поэтому $2688 \leq \sum_i r_4^i \leq 2772$ и $9.955 \leq \sum_i r_4^i/270 \leq 10.267$.

Подсчитаем число g_1 пар вершин u, z на расстоянии 1 в графе Δ , где $u \in \begin{Bmatrix} uv \\ 23 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} uv \\ 22 \end{Bmatrix}$. С одной стороны, по лемме 3 имеем $[221] = -r_{10}/4 + 13$, где $r_{10}/4 \leq 1$, поэтому $840 = 70 \cdot 12 \leq g_1 \leq 70 \cdot 13 = 910$. С другой стороны, по лемме 5 имеем $[233] = -4r_4 - r_5 - r_6 + 57$, поэтому $840 \leq -\sum_i (4r_4^i + r_5^i + r_6^i) + 15390 \leq 910$, $14480 \leq \sum_i (4r_4^i + r_5^i + r_6^i) \leq 14550$ и $53.629 \leq \sum_i (4r_4^i + r_5^i + r_6^i)/270 \leq 53.889$.

Таким образом, $9.955 \leq \sum_i r_4^i/270 \leq 10.267$, $0.3259 \leq \sum_i (r_5^i + r_6^i)/270 \leq 0.378$ и $40.1459 \leq \sum_i (4r_4^i + r_5^i + r_6^i)/270 \leq 41.446$, противоречие.

Теорема 1 доказана.

3. Граф с массивом пересечений {25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25}

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений {25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25} имеет спектр $25^1, 5^{88}, 3^{120}, -5^{88}, -7^{55}$, $1 + 25 + 300 + 25 + 1 = 352$ вершин и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 88 & 120 & 88 & 55 \\ 1 & \frac{88}{5} & 72/5 & -\frac{88}{5} & -77/5 \\ 1 & 0 & -16/5 & 0 & 11/5 \\ 1 & -\frac{88}{5} & 72/5 & \frac{88}{5} & -77/5 \\ 1 & -88 & 120 & -88 & 55 \end{pmatrix}.$$

Лемма 6. Числа пересечений графа Γ равны

$$\begin{aligned} p_{11}^1 &= 0, p_{12}^1 = 24, p_{23}^1 = 24, p_{22}^1 = 252, p_{33}^1 = 0, p_{34}^1 = 1, \\ p_{11}^2 &= 2, p_{12}^2 = 21, p_{13}^2 = 2, p_{22}^2 = 258, p_{23}^2 = 21, p_{24}^2 = 1, p_{33}^2 = 2; \\ p_{12}^3 &= 24, p_{22}^3 = 252, p_{13}^3 = 0, p_{14}^3 = 1, p_{23}^3 = 24; \\ p_{13}^4 &= 25, p_{22}^4 = 300. \end{aligned}$$

Доказательство. Прямые вычисления по [2, лемма 4.1.7].

Пусть u, v, w – вершины графа Γ , $[ihl] = \begin{Bmatrix} uvw \\ ihl \end{Bmatrix}$, $\Delta = \Gamma_2(u)$ и $\Lambda = \Gamma_2(\Delta)$. Тогда Λ – регулярный граф степени $p_{22}^2 = 258$ на $k_2 = 300$ вершинах. Заметим, что для нашего графа $\Lambda = \Delta_2$.

Лемма 7. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 1$. Тогда верны равенства:

$$\begin{aligned} [112] &= [121] = 2, [122] = 17, [123] = [132] = 2; \\ [212] &= [221] = 20, [222] = 216, [223] = [232] = 20, [234] = [243] = 1; \\ [312] &= [321] = 2, [322] = 17, [323] = [332] = 2; \\ [422] &= 1. \end{aligned}$$

Доказательство. Решая систему линейных уравнений, заданных формулами (+), получим равенства из заключения леммы.

По лемме 7 имеем $[222] = 216$.

Лемма 8. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 3$. Тогда верны равенства:

$$[112] = [121] = 2, [122] = 17, [123] = [132] = 2;$$

$$[212] = [221] = 20, [214] = [241] = 1, [222] = 216, [223] = [232] = 20;$$

$$[312] = [321] = 2, [322] = 17, [323] = [332] = 4;$$

$$[422] = 1.$$

Доказательство. Упрощение формул (+) как в доказательстве леммы 7.

По лемме 8 имеем $[222] = 216$.

Лемма 9. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 4$. Тогда верны равенства:

$$[113] = [131] = 1, [122] = 21;$$

$$[213] = [231] = 21, [222] = 256;$$

$$[313] = [331] = 2, [322] = 21;$$

$$[422] = 10$$

Доказательство. Упрощение формул (+) как в доказательстве леммы 7.

Напомним, что $p_{12}^2 = 21, p_{22}^2 = 258, p_{23}^2 = 21, p_{24}^2 = 1$. Для числа ребер e между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$ в графе Λ выполняются равенства $e = 42 \cdot 216 + 256 = 9328$.

С другой стороны, имеем $e = 258(257 - \lambda)$, где λ – среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$, следовательно, $257 - \lambda = 36.155$ и $\lambda = 220.845$.

Лемма 10. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$. Тогда верны равенства:

$$[111] = r_2, [112] = -r_2 - r_3 + 2, [113] = r_3, [121] = -r_2 - r_4 + 2, [122] = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + 17, [123] = -r_1 - r_3 + 2, [131] = r_4, [132] = -r_1 - r_4 + 2, [133] = r_1;$$

$$[211] = -r_1 - r_2 + 2, [212] = [221] = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + 17, [213] = [231] = -r_3 - r_4 + 2, [222] = -2r_1 - 2r_2 - 2r_3 - 2r_4 + 220, [223] = [232] = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + 17, [224] = [242] = 1, [233] = -r_1 - r_2 + 2;$$

$$[311] = r_1, [312] = -r_1 - r_4 + 2, [313] = r_4, [321] = -r_1 - r_3 + 2, [322] = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + 17, [323] = -r_2 - r_4 + 2, [331] = r_3, [332] = -r_2 - r_3 + 2, [333] = r_2;$$

$$[422] = 1,$$

$$\text{где } r_2 + r_4 \leq 2, r_2 + r_3 \leq 2, r_1 + r_3 \leq 2, r_1 + r_4 \leq 2, r_1 + r_2 \leq 2, r_3 + r_4 \leq 2.$$

Доказательство. Упрощение формул (+) как в доказательстве леммы 7.

По лемме 10 имеем $212 \leq [222] \leq 220$. Противоречие с тем, что $\lambda = 220.845$.

Теорема 2 доказана.

Список источников

1. Koolen J.H., Park J. Shilla distance-regular graphs // European Journal of Combinatorics. 2010. Vol. 31, № 8. P. 2064–2073.
2. Koolen J., Park J., Yu H. An inequality involving the second largest and smallest eigenvalue of a distance-regular graph // Linear Algebra and Appl. 2011. Vol. 434:12, P. 2404–2412.
3. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
4. Soicher L. The uniqueness of a distance-regular graph with intersection array $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$ and related results // Des. Codes Cryptogr. 2012. Vol. 84. P. 101–108.
5. Jurishich A., Koolen J. Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4 // Discrete Mathematics. 2002. Vol. 244. P. 181–202.

6. Coolsaet K., Jurishich A. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // *J. Comb. Theory, Series A*. 2008. Vol. 115. P. 1086–1095.
7. Jurishich A., Vidali J. Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // *Des. Codes Cryptogr.* 2012. Vol. 65. P. 29–47.

References

1. Koolen, J.H. and Park, J. (2010), "Shilla distance-regular graphs", *European Journal of Combinatorics*, vol. 31, no 8, p. 2064–2073.
2. Brouwer, A.E., Cohen, A.M. and Neumaier, A. (1989), *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 495 p.
3. Koolen, J., Park, J. and Yu, H. (2011), "An inequality involving the second largest and smallest eigenvalue of a distance-regular graph", *Linear Algebra and Appl.*, vol. 434:12, p. 2404–2412.
4. Soicher, L. (2012), "The uniqueness of a distance-regular graph with intersection array $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$ and related results", *Des. Codes Cryptogr.*, vol. 84, p. 101–108.
5. Jurishich, A. and Koolen, J. (2002), "Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4", *Discrete Mathematics*, vol. 244, p. 181–202.
6. Coolsaet, K. and Jurishich, A. (2008), "Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs", *J. Comb. Theory, Series A*, vol. 115, p. 1086–1095.
7. Jurishich, A. and Vidali, J. (2012), "Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3", *Des. Codes Cryptogr.*, vol. 65, p. 29–47.

Информация об авторах:

А. А. Махнев – член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник Института математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН (620077, Россия, г. Екатеринбург, Бокс № 82, ул. С. Ковалевской, 16), AuthorID: 2970;

М. М. Исакова – кандидат физико-математических наук; доцент Кабардино-Балкарского университета им. Х. М. Бербекова (360004, Россия, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173), AuthorID: 885233.

Information about the authors:

A. A. Makhnev – Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Chief Researcher, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (16 S. Kovalevskaya Street, P.O. Box 82, Yekaterinburg, Russia, 620077), AuthorID: 2970;

M. M. Isakova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov (173 Chernyshevskogo Street, Nalchik, Russia, 360004), AuthorID: 885233.