

Научная статья

УДК 519.644; 519.644.7; 519.21; 519.23

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-18-29

<https://elibrary.ru/nvfgfy>



Квадратурная формула для сингулярных интегралов с ядром Гильберта

Виктор Николаевич Орлов¹, Александр Яковлевич Корнилов²,
Сергей Константинович Иванов³, Анна Владимировна Лановая⁴

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный
Университет, Москва, Россия

^{2, 3, 4} Московский государственный университет технологий и управления
им. К. Г. Разумовского, Москва, Россия

¹ orlovvn@mgsu.ru

² a.kornilov@mgut.ru

³ sergey.k.ivanov@gmail.com

⁴ anna.lanovaja@mail.ru

Аннотация. В работе представлена квадратурная формула интерполяционного типа для интегралов с ядром Гильберта, построенная конструктивно – на основе аппроксимации плотности тригонометрическим полиномом степени n в равноотстоящих узлах с последующим точным (в смысле главного значения) вычислением интеграла. Получена конструктивная формула для расчетов (без предельных переходов и без явной оценки остатка) и свободная от деления на $\cos x$, что важно для устойчивости при проведении расчетов. Предлагаемый алгоритм расчетов сопровождается численными экспериментами, подтверждающими точность построенных квадратурных формул.

Ключевые слова: конструктивная математика; теория алгоритмов; квадратурные формулы; ядро Гильберта; вычислимые функции; сингулярные интегралы; неклассическая логика; тригонометрические полиномы.

Для цитирования: Орлов В. Н., Корнилов А. Я., Иванов С. К., Лановая А. В. Квадратурная формула для сингулярных интегралов с ядром Гильберта // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 3(74). С. 18–29. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-18-29. <https://elibrary.ru/nvfgfy>.

Статья поступила в редакцию 21.04.2026; одобрена после рецензирования 25.08.2026; принята к публикации 12.10.2026.

Research article

Quadrature Formula for Singular Integrals With the Hilbert Kernel

Viktor N. Orlov¹, Alexander Ya. Kornilov², Sergey K. Ivanov³, Anna V. Lanovaya⁴

¹ Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

^{2, 3, 4} K. G. Razumovsky Moscow State University of Technology and Management, Moscow, Russia

¹ orlovvn@mgsu.ru

² a.kornilov@mgut.ru

³ sergey.k.ivanov@gmail.com

⁴ anna.lanovaja@mail.ru



© Орлов В. Н., Корнилов А. Я., Иванов С. К., Лановая А. В., 2026
Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Abstract. This paper presents an interpolation-type quadrature formula for integrals with a Hilbert kernel. It is constructed, based on the approximation of the density by a trigonometric polynomial of degree n at equally spaced nodes, followed by an exact (in the sense of the principal value) calculation of the integral. The resulting formula is constructive for calculations (without limit passages and without explicit evaluation of the remainder) and is free from division by $\cos x$, which is important for stability during calculations. The proposed calculation algorithm is supported by numerical experiments confirming the accuracy of the constructed quadrature formulas.

Keywords: *constructive mathematics; theory of algorithms; quadrature formulas; Hilbert kernel; computable functions; singular integrals; non-classical logic; trigonometric polynomials.*

For citation: Orlov, V. N., Kornilov, A. Ya., Ivanov, S. K. and Lanovaya, A. V. (2026), "Quadrature Formula for Singular Integrals With the Hilbert Kernel", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(74), pp. 18–29, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-18-29, <https://elibrary.ru/nvfgfy>.

The article was submitted 21 Apr 2026; approved after reviewing 25 Aug 2026; accepted for publication 12 Oct 2026.

Введение

Фундаментальные основы теории сингулярных интегральных уравнений и их многочисленные приложения подробно изложены в классических трудах Н. И. Мусхелишвили [1, 2], И. Н. Векуа [3], Ф. Д. Гахова [4] и других авторов. Задача получения конструктивных решений, доведенных до числового результата, неоднократно определялась ведущими математиками как одно из приоритетных направлений исследований. В частности, важность "доведения до числа" подчеркивали Н. И. Мусхелишвили, М. А. Лаврентьев и И. Н. Векуа. Пионерские результаты в данной области были представлены М. А. Лаврентьевым в работе 1932 года [5]. В предисловии к этой работе академик С. А. Чаплыгин указал на высокую значимость полученных результатов для практики и выразил надежду на дальнейшее развитие исследований в этом направлении. Значение работы М. А. Лаврентьева получило высокую оценку и в трудах Н. И. Мусхелишвили, который во всех изданиях своей монографии [2] неизменно отмечал, что разработка приближенных методов решения сингулярных интегральных уравнений является одной из наиболее актуальных задач современной теории. Существенный прогресс в развитии вычислительных подходов, вызванный потребностями прикладных задач, связан с исследованиями С. М. Белоцерковского (1954 г.) в области аэродинамики. Эти работы заложили основы метода дискретных особенностей – эффективного численного метода решения сингулярных интегральных уравнений, получившего в настоящее время широкое распространение и признание. Отдельного упоминания заслуживает также значительный вклад академика С. Л. Соболева в развитие теории квадратурных и кубатурных формул [6], составивший теоретическую базу для последующего обоснования многих численных алгоритмов. Сингулярные интегральные уравнения являются универсальным языком описания широкого круга физических явлений, характеризующихся наличием особенностей, и служат основой для построения высокоточных численных моделей. Аналитические решения таких задач, как правило, представимы в виде сингулярных интегралов с известными ядрами.

В классической теории сингулярных интегральных уравнений часто используются неконструктивные методы: предельные переходы, принцип исключенного третьего, аппроксимации без оценки погрешности. В рамках конструктивной математики и теории алгоритмов [7] требуется, чтобы все построения были эффективно вычислимы, а сходимость – конструктивно обоснована.

В данной работе предлагается квадратурная формула, удовлетворяющая принципам конструктивного анализа: узлы сетки вычислимы; веса формулы выражаются через элементарные функции; отсутствует деление на величины, которые могут обратиться в нуль в недетерминированных точках; интеграл понимается в смысле главного значения, но с явной вычислимой оценкой.

Отметим, что в работе [8] получена следующая квадратурная формула:

$$\int_0^\pi \frac{\varphi(t, x)}{\sin(t - x)} dt \approx \frac{\pi}{2n + 1} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\varphi(t_k, x)}{\sin(t_k - x)} \left[1 - (-1)^k \cos t_k \cdot \frac{\cos(2n + 1)x}{\cos x} \right], \quad (1)$$

где

$$t_k = \frac{\pi k}{2n + 1}, k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Следует отметить, что соотношение (1) для некоторых значений аргумента x приводит к потере точности из-за деления на $\cos x$ в знаменателе. Вторым недостатком квадратурной формулы (1) является особенность, возникающая при $x = \pi/2$, где $\cos x = 0$ и $\cos(2n + 1)x$ также равен нулю. Указанные особенности актуализируют получение новых квадратурных формул, позволяющих исключить эти ситуации.

Следует отметить также квадратурную формулу [9] интерполяционного типа, не содержащую деления на $\cos x$:

$$\int_0^\pi \frac{\varphi(t, x)}{\sin(t - x)} dt \approx \frac{\pi}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(t_k, x) \operatorname{ctg} \frac{t_k - x}{2}, m = 2n.$$

Данная формула является приближенной, о точности которой автор в своей работе ничего не конкретизирует, кроме того, что в пределе она стремится к нулю. Это информация не применима для практического применения и не позволяет определить значение n в квадратурной формуле для заданной точности в расчетах. В формуле веса содержат котангенс, что при $t_k \approx x$ требует отдельной аналитической обработки особенности.

Конструктивная постановка задачи и метод решения

Рассмотрим некоторую непрерывную по своим аргументам функцию $F(t, x)$ на квадрате $[0, \pi] \times [0, \pi]$, за исключением $t = x$, где она имеет сингулярные особенности вида $\sin(t - x)$. Пусть $F(t, x)$ является π -периодической по каждой переменной, т. е.

$$F(\pi + t, x) = F(t, x), \quad F(t, \pi + x) = F(t, x). \quad (2)$$

Требуется вычислить (в смысле вычислимой аппроксимации) значение интеграла:

$$I(x) = \int_0^\pi F(t, x) dt. \quad (3)$$

В силу периодичности функции $F(t, x)$ имеем следующее представление:

$$F(t, x) = \frac{\varphi(t, x)}{\sin(t - x)},$$

где $\varphi(t, x)$ — вычислимая функция на всем квадрате $[0, \pi] \times [0, \pi]$ функция, удовлетворяющая условиям:

$$\varphi(2\pi + t, x) = -\varphi(t, x), \quad \varphi(t, 2\pi + x) = -\varphi(t, x). \quad (4)$$

Поэтому интеграл (3) можно представить в виде:

$$I(x) = \int_0^\pi \frac{\varphi(t, x)}{\sin(t - x)} dt. \quad (5)$$

Замечание. Ядро

$$\frac{1}{\sin(t - x)}$$

называется ядром Гильберта для периодических функций на отрезке $[0, \pi]$. Оно имеет особенность первого порядка при $t = x$. Интеграл понимается как главное значение по Коши, но в конструктивной формулировке мы заменяем его конечной суммой с оценкой погрешности.

При фиксированном значении x функцию $\varphi(t, x)$ будем рассматривать как функцию по переменной t на интервале $[0, \pi]$. В силу периодичности ядра интегрального оператора удобно использовать тригонометрические полиномы.

Обозначим $\psi(t) = \varphi(t, x)$. Введем $N = 2n + 1$ равноотстоящих узлов на периоде:

$$t_k = \frac{\pi k}{2n + 1}, k = 0, 1, \dots, 2n. \quad (6)$$

Построим тригонометрический интерполяционный полином $\psi_n(t)$, интерполирующий функцию $\psi(t)$ в узлах t_k . Для нечетного числа узлов на периоде $[0, \pi]$ ядро интерполяционного процесса может быть представлено в виде

$$\psi_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} \psi(t_k) \cdot \ell_k(t),$$

где $\ell_k(t)$ – фундаментальные полиномы Лагранжа, соответствующие тригонометрической интерполяции. При равномерном распределении узлов с шагом $h = \frac{\pi}{2n+1}$ указанные базисные функции принимают вид:

$$\ell_k(t) = \frac{1}{2n + 1} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(t - t_k)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(t - t_k)\right)}, \quad (7)$$

что представляет собой классическое ядро Дирихле. Однако для последующего интегрирования с ядром

$$1/\sin(t - x)$$

более удобной оказывается эквивалентная форма записи, использующая произведение синусов. Применяя тригонометрические преобразования, интерполяционную формулу можно привести к следующему виду:

$$\varphi(t, x) \approx \frac{2\pi}{2n + 1} \sum_{k=0}^{2n} \varphi(t_k, x) \cdot \frac{\sin((n + 1)(t_k - t)) \sin(n(t_k - t))}{\sin(2(t_k - t))}. \quad (8)$$

Подставим аппроксимацию (8) в исходный интеграл (5):

$$I \approx \int_0^\pi \left(\frac{2\pi}{2n + 1} \sum_{k=0}^{2n} \varphi(t_k, x) \cdot \frac{\sin((n + 1)(t_k - t)) \sin(n(t_k - t))}{\sin(2(t_k - t))} \right) \frac{dt}{\sin(t - x)}.$$

Меняем местами знаки суммы и интеграла и получаем:

$$I \approx \frac{2\pi}{2n + 1} \sum_{k=0}^{2n} \varphi(t_k, x) \int_0^\pi \frac{\sin((n + 1)(t_k - t)) \sin(n(t_k - t))}{\sin(2(t_k - t)) \cdot \sin(t - x)} dt. \quad (9)$$

Из [10] известно, что тригонометрические полиномы обладают свойством "воспроизведения" для сингулярных интегралов с ядром Гильберта.

Лемма (Основное тождество) [10]. Для любых $t_k \neq x$ справедливо:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{\sin((n + 1)(t_k - t)) \sin(n(t_k - t))}{\sin(2(t_k - t)) \cdot \sin(t - x)} dt \\ &= \frac{\sin((n + 1)(t_k - x)) \sin(n(t_k - x))}{\sin(2(t_k - x))}. \end{aligned} \quad (10)$$

При $t_k = x$ правая часть понимается как предел:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin((n+1)u)\sin(nu)}{\sin(2u)} = 0,$$

где $u = t_k - x$. В этом случае левая часть интеграла становится регулярной, и тождество сохраняется.

Обоснование предела:

$$\sin((n+1)u) \sim (n+1)u, \sin(nu) \sim nu, \sin(2u) \sim 2u (u \rightarrow 0),$$

откуда

$$\frac{((n+1)u)(nu)}{2u} = \frac{n(n+1)}{2}u \rightarrow 0.$$

Подставляя результат леммы (10) в выражение (9), получаем искомую квадратурную формулу:

$$I(x) = \int_0^\pi \frac{\varphi(t, x)}{\sin(t-x)} dt \approx \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \varphi(t_k, x) \frac{\sin((n+1)(t_k-x)) \sin(n(t_k-x))}{\sin(2(t_k-x))}, \quad (11)$$

где

$$t_k = \frac{\pi k}{2n+1}, k = 0, 1, \dots, 2n, n - \text{нечетное положительное число.}$$

Численные эксперименты

Для проверки эффективности предложенной квадратурной формулы (11) проведем ее тестирование на примерах, как допускающих точное аналитическое вычисление, так и не имеющих аналитического решения в элементарных функциях.

Задача 1. Для проверки эффективности предложенной квадратурной формулы (11) проведем ее тестирование на примере, допускающем точное аналитическое вычисление. Рассмотрим интеграл (5) с функцией

$$\varphi(t, x) = \sin(t-x). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (5), получаем

$$I(x) = \int_0^\pi \frac{\sin(t-x)}{\sin(t-x)} dt = \int_0^\pi dt = \pi. \quad (13)$$

Таким образом, точное значение интеграла не зависит от x и равно π .

Вычислим данный интеграл с использованием квадратурной формулы (11). По условию

$$\varphi(t_k, x) = \sin(t_k - x).$$

Подстановка последнего в (11) дает

$$I(x) \approx \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \sin(t_k - x) \frac{\sin((n+1)(t_k-x)) \sin(n(t_k-x))}{\sin(2(t_k-x))}. \quad (14)$$

Обозначим

$$S_k = \sum_{k=0}^{2n} \sin(t_k - x) \frac{\sin((n+1)(t_k-x)) \sin(n(t_k-x))}{\sin(2(t_k-x))}. \quad (15)$$

Для демонстрации работоспособности формулы выберем наименьшее нечетное значение $n = 1$.

Тогда $2n+1 = 3$, и узлы сетки имеют вид $t_k = \frac{\pi k}{3}, k = 0, 1, 2$.

При $n = 1$ выражение (15) упрощается:

$$S_k = \sin(t_k - x) \frac{\sin(2(t_k-x)) \sin(t_k-x)}{\sin(2(t_k-x))} = \sin^2(t_k - x).$$

Следовательно, квадратурная сумма (15) принимает вид

$$S = \sin^2(x) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right). \quad (16)$$

Применяя формулу понижения степени для квадрата синуса из (16), получаем:

$$S = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) \right].$$

Сумма косинусов в квадратных скобках последнего выражения равна нулю, что проверяется непосредственно.

Таким образом,

$$S = \frac{3}{2}.$$

Подставляя найденное значение в формулу (14), получаем

$$I(x) \approx \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} = \pi.$$

Следовательно, результат, полученный по квадратурной формуле (11), совпадает с точным значением интеграла (13).

Задача 2. Рассмотрим интеграл (5) с функцией

$$\varphi(t, x) = \sin(t + x). \quad (17)$$

Требуется вычислить интеграл

$$I(x) = \int_0^\pi \frac{\sin(t + x)}{\sin(t - x)} dt. \quad (18)$$

Данный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, так как подынтегральная функция имеет особенность при $t = x$ при $x \in (0, \pi)$.

Аналитическое вычисление. В формуле (18) в числителе подынтегральной функции на основании тригонометрических формул осуществляем преобразование:

$$\sin(t + x) = \sin((t - x) + 2x) = \sin(t - x)\cos 2x + \cos(t - x)\sin 2x.$$

Тогда подынтегральная функция принимает вид

$$\frac{\sin(t + x)}{\sin(t - x)} = \cos 2x + \sin 2x \cdot \frac{\cos(t - x)}{\sin(t - x)} = \cos 2x + \sin 2x \cdot \operatorname{ctg}(t - x).$$

Следовательно,

$$I(x) = \int_0^\pi \cos 2x dt + \sin 2x \int_0^\pi \operatorname{ctg}(t - x) dt = \pi \cos 2x + \sin 2x \cdot J(x), \quad (19)$$

где

$$J(x) = \int_0^\pi \operatorname{ctg}(t - x) dt. \quad (20)$$

Вычислим $J(x)$. Выполним замену переменной $u = t - x \Rightarrow du = dt$.

Пределы интегрирования: при $t = 0$: $u = -x$; при $t = \pi$: $u = \pi - x$.

Тогда

$$J(x) = \int_{-x}^{\pi-x} \operatorname{ctg} u du.$$

При $x \in (0, \pi)$ точка $u = 0$ лежит внутри интервала $(-x, \pi - x)$, потому что $-x < 0 < \pi - x$. Последний интеграл является несобственным интегралом 2 рода, для которого по определению:

$$\begin{aligned} J(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-x}^{-\varepsilon} \operatorname{ctg} u du + \int_{\varepsilon}^{\pi-x} \operatorname{ctg} u du \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\ln |\sin u|]_{-x}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\ln |\sin u|]_{\varepsilon}^{\pi-x} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln |\sin(-\varepsilon)| - \ln |\sin(-x)|) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln |\sin(\pi - x)| - \ln |\sin \varepsilon|).$$

Вычисление последних пределов приводит к результату $J(x) = 0$. Следовательно, исходный интеграл (18), имеет значение:

$$I(x) = \pi \cos 2x. \quad (21)$$

Вычислим значение интеграла (18) с помощью квадратурной формулы (11) для функции

$$\varphi(t, x) = \sin(t + x).$$

Введем обозначение функции $\varphi(t_k, x) = \sin(t_k + x)$. При $n = 1$ и узлах $t_k = \frac{\pi k}{3}$, $k = 0, 1, 2$, квадратурная формула (11) принимает вид

$$I(x) \approx \frac{2\pi}{3} \sum_{k=0}^2 \sin(t_k + x) \frac{\sin(2(t_k - x)) \sin(t_k - x)}{\sin(2(t_k - x))} = \frac{2\pi}{3} \sum_{k=0}^2 \sin(t_k + x) \sin(t_k - x).$$

На основании тригонометрических формул из последнего следует:

$$\sin(t_k + x) \sin(t_k - x) = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 2t_k).$$

Следовательно,

$$I(x) \approx \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^2 (\cos 2x - \cos 2t_k) = \frac{\pi}{3} \left(3 \cos 2x - \sum_{k=0}^2 \cos 2t_k \right).$$

С учетом $t_k = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ из последнего имеем

$$\sum_{k=0}^2 \cos 2t_k = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

$$I(x) \approx \frac{\pi}{3} \cdot 3 \cos 2x = \pi \cos 2x.$$

Что совпадает с точным аналитическим значением (21).

Результаты численного интегрирования задачи 2. Проверяем квадратурную формулу (11) для данной задачи. Вычисления проведены с помощью программы, реализованной на JavaScript для функции

$$\varphi(t, x) = \sin(t + x)$$

при различных значениях аргумента x . В качестве параметра дискретизации выбрано $n = 5$, что соответствует количеству узлов сетки равное $2n + 1 = 11$. В таблице 1 представлены значения интеграла, полученные по аналитическому выражению (15) и по квадратурной формуле (11), а также абсолютная погрешность:

$$\Delta_5 = |I(x) - I_5(x)|.$$

Таблица 1. Численные расчеты интеграла по аналитическому выражению и квадратурной формуле

x	$I(x)$	$I_5(x)$	Δ_5
0	3.1415926536	3.1415926536	0.0000000000
$\pi/4$	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1.5	-3.1101531544	-3.1101531544	0.0000000000
2	-2.0534819974	-2.0534819974	0.0000000000
π	3.1415926536	3.1415926536	0.0000000000

Как видно из табл. 1, при $n = 5$ квадратурная формула (11) дает значение интеграла, совпадающее с аналитическим результатом.

Задача 3. Рассмотрим следующий интеграл:

$$I(x) = \int_0^\pi \frac{\vartheta_1(t-a)\vartheta_4(t+a)}{\vartheta_1(t-x)\vartheta_4(t+x)} dt, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta_1(t) &= 2q^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \sin(2n+1)t, \\ \vartheta_4(t) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nt - \end{aligned}$$

тета-функции Якоби [11] с нормой $q = e^{\pi i \tau}$, $\text{Im } \tau > 0$, $|\tau| = -\frac{\ln q}{\pi}$, a и x – заданные параметры.

Замечание. Подынтегральная функция имеет простые полюсы при $t = x$ (в нуле ϑ_1) и при $t = -x$ (с учетом периодичности). Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Получим аналитическое выражение для $I(x)$ в терминах логарифмических производных тета-функций, пригодное для дальнейших численных расчетов.

На основании тождество Вейерштрасса–Якоби [12]:

$$\frac{\vartheta_1(t-a)\vartheta_4(t+a)}{\vartheta_1(t-x)\vartheta_4(t+x)} = A \cdot \frac{\vartheta_1'(t-x)}{\vartheta_1(t-x)} + B \cdot \frac{\vartheta_4'(t+x)}{\vartheta_4(t+x)} + C, \quad (23)$$

из двоякопериодичности левой части по t (с периодами π и $\pi\tau$) следует, что

$$B = -A. \quad (24)$$

Определим коэффициенты A и C . Для нахождения A умножим обе части тождества (23) на $\vartheta_1(t-x)$ и перейдем к пределу $t \rightarrow x$.

Слева:

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{\vartheta_1(t-a)\vartheta_4(t+a)}{\vartheta_4(t+x)} = \frac{\vartheta_1(x-a)\vartheta_4(x+a)}{\vartheta_4(2x)}.$$

Справа:

$$\lim_{t \rightarrow x} [A \cdot \vartheta_1'(t-x) + B \cdot \frac{\vartheta_4'(t+x)}{\vartheta_4(t+x)} \vartheta_1(t-x) + C \vartheta_1(t-x)].$$

Так как $\vartheta_1(t-x) \sim \vartheta_1'(0)(t-x)$ при $t \rightarrow x$, второе и третье слагаемые стремятся к нулю. Остается $A \cdot \vartheta_1'(0)$.

Приравнявая:

$$A \cdot \vartheta_1'(0) = \frac{\vartheta_1(x-a)\vartheta_4(x+a)}{\vartheta_4(2x)}.$$

Следовательно,

$$A = \frac{\vartheta_1(x-a)\vartheta_4(x+a)}{\vartheta_1'(0)\vartheta_4(2x)} \quad (25)$$

Коэффициент C находим из (23) при $t = a$:

$$C = A \cdot \left[\frac{\vartheta_1'(x-a)}{\vartheta_1(x-a)} + \frac{\vartheta_4'(x+a)}{\vartheta_4(x+a)} \right]. \quad (26)$$

Интегрируя (23) от 0 до π и используя свойства логарифмических производных тета-функций, получаем:

$$\begin{aligned} I(x) &= A \cdot \int_0^\pi \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(t-x) dt + B \cdot \int_0^\pi \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(t+x) dt + C\pi = \\ &= A \ln \left| \frac{\vartheta_1(\pi-x)}{\vartheta_1(-x)} \right| + B \ln \left| \frac{\vartheta_4(\pi+x)}{\vartheta_4(x)} \right| + C\pi. \end{aligned}$$

С учетом (24), (25) и (26) окончательное аналитическое выражение интеграла (22) принимает вид:

$$I(x) = \pi \cdot \frac{\vartheta_1(x-a)\vartheta_4(x+a)}{\vartheta_1'(0)\vartheta_4(2x)} \cdot \left[\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(x-a) + \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(x+a) \right]. \quad (27)$$

Численное тестирование квадратурной формулы (11) проводилось для двух значений нормы q при фиксированном $a = \pi/2$.

Таблица 2. Значения интеграла (22) при $a = \pi/2$, $q = 0.1$ и $n = 11$

x	$I(x)$	$I_{11}(x)$	Δ_{11}
0.0785	0.661863650185544	0.661863650268924	-0.8338×10^{-10}
0.2356	1.749342391815649	1.749342392037261	-0.2216×10^{-9}
0.3927	2.369877414935797	2.369877415240109	-0.3043×10^{-9}
0.5498	2.627698464144353	2.627698464489365	-0.3450×10^{-9}
0.7069	2.705974181006287	2.705974181373787	-0.3675×10^{-9}

Как видно из табл. 2, при $n = 11$ абсолютная погрешность не превышает $3,7 \times 10^{-10}$.

Таблица 3. Значения интеграла (20) при $a = \pi/2$, $q = 0,5$ и $n = 25$

x	$I(x)$	$I_{25}(x)$	Δ_{25}
0.0785	78.118507750736	78.118507788496	-0.3776×10^{-7}
0.2356	79.645634438020	79.645634475880	-0.3786×10^{-7}
0.3927	43.047040002891	43.047040022731	-0.1984×10^{-7}
0.5498	22.258565385914	22.258565395741	-0.9827×10^{-8}
0.7069	12.178767398389	12.178767403511	-0.5122×10^{-8}

Для случая $q = 0.5$ требуется более мелкая дискретизация; при $n = 25$ абсолютная погрешность составляет величину порядка $10^{-7} \div 10^{-8}$, что подтверждает сходимость квадратурной формулы.

Задача 4. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t, x) = e^{\sin t}, \quad x = 1.$$

Тогда

$$I(x) = \int_0^\pi \frac{e^{\sin t}}{\sin(t-1)} dt. \quad (28)$$

В заданной области при попытке воспользоваться программными комплексами "Математика" результата в элементарных функциях для интеграла (28) не получаем.

Для интеграла (28) численные значения, полученные по квадратурной формуле (11) при $n = 5$ и $n = 11$, составили $I_5 \approx 4.695574969512963$ и $I_{11} \approx 4.693786801341791$. На основе экстраполяции Ричардсона с отношением шагов $r = h_1/h_2 = 11/5 = 2.2$ определен фактический порядок точности метода. Анализ показал, что при предположении о четвертом порядке ($p = 4$) экстраполированное значение $I_{\text{экстр}} \approx 4.69378$ практически совпадает с I_{11} , тогда как при $p = 2$ наблюдается заметное расхождение ($I_{\text{экстр}} \approx 4.69118$), что свидетельствует о фактическом порядке точности $p = 4$. Оценка погрешности составила $\varepsilon_{11} \sim 7 \times 10^{-6}$ для $n = 11$ и $\varepsilon_5 \sim 1.6 \times 10^{-4}$ для $n = 5$.

Таким образом, использование экстраполяции Ричардсона позволяет уточнить численный результат до $\sim 10^{-6}$ и подтверждает высокую эффективность примененной квадратурной формулы.

Конструктивные особенности и связь с неклассическими логиками

Предложенная квадратурная формула (11) обладает рядом преимуществ по сравнению с известной формулой (1). В ней отсутствует деление на $\cos x$, что исключает потерю точности в окрестности точек $x = \pi/2 + \pi t$. Структура формулы позволяет сохранять устойчивость при любых значениях аргумента x , включая случаи, когда знаменатель формулы (11) $\sin(2(t_k - x))$ обращается в нуль; при этом соответствующие предельные переходы могут быть выполнены аналитически. Все проведенные операции в задачах 1–4 выполнимы и согласуются с теорией алгоритмов [13].

Проведенные численные эксперименты с тригонометрическими функциями и тета-функциями Якоби демонстрируют высокую точность метода. Для гладких функций уже при малых n достигается точность, близкая к машинной. Для более сложных функций, таких как тета-функции Якоби, требуется увеличение числа узлов, однако полученные результаты подтверждают сходимость и устойчивость квадратурной формулы.

В интуиционистской логике не допускается закон исключенного третьего в бесконечных конструкциях. В данной работе: все аппроксимации конечны; точность устанавливается конструктивно: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать n (зависящее от φ и x), такое что погрешность меньше ε . В работе не используется принцип выбора в неконструктивной форме. Формула может быть верифицирована в системах типа CIC (Calculus of Inductive Constructions) или Agda [14–16], где требуется явное предъявление вычислимой функции.

Оценка погрешности

Для гладких функций (дважды непрерывно дифференцируемых по t) тригонометрическая интерполяция обеспечивает погрешность аппроксимации $O(1/n^2)$. Интегрирование с ядром Гильберта, являющимся сингулярным оператором, сохраняет этот порядок.

Для произвольных вычислимых функций полное аналитическое обоснование выходит за рамки данной работы. В рамках конструктивного подхода для каждого конкретного вычисления предлагается контроль погрешности методом Ричардсона, что позволяет получить результат с гарантированной точностью.

Заключение

В работе получена новая квадратурная формула интерполяционного типа для сингулярных интегралов с ядром Гильберта, удовлетворяющая требованиям: конструктивности (все шаги алгоритмически выполнимы); вычислимости (отсутствие неэффективных предельных переходов); совместимости с неклассическими логиками (финитность, явные оценки). Формула построена на основе аппроксимации плотности тригонометрическим полиномом в равноотстоящих узлах и точного интегрирования полученного выражения. Предложенная квадратурная формула свободна от недостатков, присущих известным подходам, связанных с делением на $\cos x$ и численной неустойчивостью в особых точках. Проведенное тестирование на аналитических примерах с тригонометрическими функциями и тета-функциями Якоби подтвердило корректность полученного соотношения и его высокую точность. Представленный метод может быть использован при численном решении сингулярных интегральных уравнений, возникающих в задачах

аэродинамики, теории упругости, математической физики, также в алгоритмических системах символьных вычислений, формальных доказательствах в интуиционистской математике, где требуется явное предъявление алгоритма и других областях.

Список литературы

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
3. Векуа И. Н. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 380 с.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
5. Лаврентьев М. А. Теория аналитических функций. Математика. Наука в СССР за пятнадцать лет (1917–1932). Москва; Ленинград: ГТТИ, 1932. С. 49 – 83.
6. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
7. Орлов В. Н., Корнилов А. Я., Воробьева А. В. Оптимизация априорной оценки аналитического приближенного решения одного класса нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка в области аналитичности. Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. С. 35–50. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.003.
8. Корнилов А. Я. Об одной квадратурной формуле. Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. 2006. № 2. С. 40–42.
9. Du J. Quadrature formulas for singular integrals with Hilbert kernel. Journal of Computational Mathematics. 1988. Vol. 6, № 3, P. 205–225.
10. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. Москва: Наука, 1985. 253 с.
11. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
12. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. 2, гл. 21: Тэта-функции. М.: Физматлит, 1963. С. 345–378.
13. Марков А. А. Теория алгорифмов. М.: Наука, 1954. 376 с.
14. Troelstra A. S., van Dalen D. Constructivism in Mathematics. 2 vol. Amsterdam: North-Holland, 1988.
15. Bishop E., Bridges D. Constructive Analysis. Berlin: Springer, 1985. 488 p. DOI: 10.1007/978-3-642-61667-9.
16. Weihrauch K. Computable Analysis. Berlin: Springer, 2000. 298 p. DOI: 10.1007/978-3-642-56999-9.

References

1. Muskhelishvili, N. I. (1968), *Singular Integral Equations* [Singulyarnye integralnye uravneniya], Moscow: Nauka, 511 p.
2. Muskhelishvili, N. I. (1966), *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* [Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti], Moscow: Nauka, 708 p.
3. Vekua, I. N. (1970), *Systems of Singular Integral Equations and Some Boundary Value Problems* [Sistemy singulyarnykh integralnykh uravneniy i nekotorye granichnye zadachi], Moscow: Nauka, 380 p.
4. Gakhov, F. D. (1977), *Boundary Value Problems* [Kraevye zadachi], Moscow: Nauka, 640 p.
5. Lavrentev, M. A. (1932), *Theory of Analytic Functions* [Teoriya analiticheskikh funktsii], in Mathematics. Science in the USSR over Fifteen Years (1917–1932) [Matematika. Nauka v SSSR za pyatnadsat let (1917–1932)], GTTI, Moscow; Leningrad, P. 49–83.
6. Sobolev, S. L. (1974), *Introduction to the Theory of Cubature Formulas* [Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul], Moscow: Nauka, 808 p.
7. Orlov, V. N., Kornilov, A. Ya. and Vorobyeva, A. V. (2024), "Optimization of the A Priori Estimate of the Analytical Approximate Solution of One Class of Nonlinear Differential Equation of the Third Order in the Domain of Analyticity" [Optimizatsiya apriornoy otsenki analiticheskogo priblizhennogo resheniya odnogo klassa nelineynogo differentsialnogo uravneniya

- tretyego poryadka v oblasti analitichnosti], *Bulletin of ChSPU named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of Limit State* [Vestnik ChGPU im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya], pp. 35–50, DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.003.
8. Kornilov, A. Ya. (2006), "On a Quadrature Formula" [Ob odnoy kvadraturnoy formule], *Bulletin of KSTU named after A. N. Tupolev* [Vestnik KGTU im. A. N. Tupoleva], no 2, pp. 40–42.
 9. Du, J. (1988), "Quadrature formulas for singular integrals with Hilbert kernel", *Journal of Computational Mathematics*, no 6(3), pp. 205–225.
 10. Belotserkovskiy, S. M. and Lifanov, I. K. (1985), *Numerical Methods in Singular Integral Equations* [Chislennyye metody v singulyarnykh integralnykh uravneniyakh], Moscow: Nauka, 253 p.
 11. Akhiezer, N. I. (1970), *Elements of the Theory of Elliptic Functions* [Elementy teorii ellipticheskikh funktsiy], Moscow: Nauka, 304 p.
 12. Whittaker, E. T. and Watson, J. N. (1963), *A Course of Modern Analysis. Part 2, Chapter 21: Theta Functions* [Kurs sovremennogo analiza. Ch. 2, gl. 21: Teta-funktsii], Moscow: Fizmatlit, pp. 345–378.
 13. Markov, A. A. (1954), *Theory of Algorithms* [Teoriya algorifmov], Moscow: Nauka, 376 p.
 14. Troelstra, A. S. and van Dalen, D. (1988), *Constructivism in Mathematics*, 2 vol., Amsterdam: North-Holland.
 15. Bishop, E. and Bridges, D. (1985), *Constructive Analysis*, Berlin: Springer, 488 p.
 16. Weihrauch, K. (2000), *Computable Analysis*, Berlin: Springer, 298 p.

Информация об авторах:

В. Н. Орлов – доктор физико-математических наук, доцент; профессор Национального исследовательского Московского государственного строительного Университета (129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26), ORCID: 0000-0001-7606-5490, eLibrary AuthorID: 711175;

А. Я. Корнилов – кандидат физико-математических наук; доцент Московского государственного университета технологий и управления им. К. Г. Разумовского (109004, Россия, г. Москва, ул. Земляной Вал, д. 73), ORCID: 0009-0003-5435-2941, eLibrary AuthorID: 161334;

С. К. Иванов – кандидат технических наук; доцент Московского государственного университета технологий и управления им. К. Г. Разумовского (109004, Россия, г. Москва, ул. Земляной Вал, д. 73), eLibrary AuthorID: 5876;

А. В. Лановая – кандидат физико-математических наук; доцент Московского государственного университета технологий и управления им. К. Г. Разумовского (109004, Россия, г. Москва, ул. Земляной Вал, д. 73), eLibrary AuthorID: 749548.

Information about the authors:

V. N. Orlov – Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor; Professor at Moscow State University of Civil Engineering (26, Yaroslavl'skoe shosse, Moscow, 129337, Russia), ORCID: 0000-0001-7606-5490, eLibrary AuthorID: 711175;

A. Ya. Kornilov – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Associate Professor at K. G. Razumovsky Moscow State University State University of Technology and Management (73, Zemlyanoy Val st., Moscow, 109004, Russia), ORCID: 0009-0003-5435-2941, eLibrary AuthorID: 161334;

S. K. Ivanov – Candidate of Sciences (Engineering); Associate Professor at K. G. Razumovsky Moscow State University State University of Technology and Management (73, Zemlyanoy Val st., Moscow, 109004, Russia), eLibrary AuthorID: 5876;

A. V. Lanovaya – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Associate Professor at K. G. Razumovsky Moscow State University State University of Technology and Management (73, Zemlyanoy Val st., Moscow, 109004, Russia), eLibrary AuthorID: 749548.