

МАТЕМАТИКА

Научная статья

УДК 517.925.7

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-5-17

<https://elibrary.ru/xbhxbo>**Производные числа и устойчивость решений
динамических систем****Геннадий Викторович Алфёров¹, Геннадий Григорьевич Иванов²,
Владимир Степанович Королёв³, Ирина Юрьевна Потоцкая⁴**^{1, 2, 3, 4} Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия¹ g.alferov@spbu.ru² guennadi.ivanov@gmail.com³ v.korolev@spbu.ru,⁴ i.pototskaia@spbu.ru

Аннотация. В настоящей работе решается задача расширения класса исследуемых динамических систем за счет ослабления требований к дифференцируемости их правых частей. Целью является разработка критериев устойчивости для систем, где функции не обладают непрерывными производными. В основе предлагаемого подхода лежит применение аппарата частных производных чисел (ЧПЧ). Данный математический инструмент позволяет анализировать сложные функции нескольких переменных в точках, где обычный градиент не определен. Авторы развивают теорию ЧПЧ, базируясь на ранее опубликованных общетеоретических работах и результатах применения этого аппарата в задачах стабилизации. Важной особенностью исследования является отказ от использования аппарата производных Дини. Это позволило избежать излишнего усложнения доказательств и необходимости введения громоздких вспомогательных конструкций для функций многих переменных. В терминах теории частных производных чисел сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия устойчивости нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В работе представлены соответствующие теоремы и их подробные обоснования. Полученные результаты позволяют эффективно исследовать устойчивость сложных нелинейных систем, не требуя классической гладкости их математических моделей. Данный подход расширяет возможности прикладного анализа динамических процессов в технике и управлении.

Ключевые слова: устойчивость систем обыкновенных дифференциальных уравнений; устойчивость нулевого решения; второй метод Ляпунова; производные числа; частные производные числа.

Для цитирования: Алфёров Г. В., Иванов Г. Г., Королёв В. С., Потоцкая И. Ю. Производные числа и устойчивость решений динамических систем // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 3(74). С. 5–17. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-5-17. <https://elibrary.ru/xbhxbo>.

Статья поступила в редакцию 13.04.2026; одобрена после рецензирования 07.09.2026; принята к публикации 30.09.2026.



© Алфёров Г. В., Иванов Г. Г., Королёв В. С., Потоцкая И. Ю., 2026
Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

MATHEMATICS

Research article

Derivate Numbers and Solution Stability in Dynamical Systems

Gennady V. Alferov¹, Gennady G. Ivanov², Vladimir S. Korolev³, Irina Yu. Pototskaya⁴

^{1, 2, 3, 4} St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

¹ g.alferov@spbu.ru

² guennadi.ivanov@gmail.com

³ v.korolev@spbu.ru,

⁴ i.pototskaia@spbu.ru

Abstract. This paper addresses the problem of expanding the class of investigated dynamical systems by relaxing the differentiability requirements for their right-hand sides. The objective is to develop stability criteria for systems where functions lack continuous derivatives. The proposed approach is based on the application of the framework of partial derivate numbers (PDN). This mathematical tool enables the analysis of complex functions of several variables at points where the conventional gradient is undefined. The authors further develop the theory of PDN, building upon previously published theoretical works and results of applying this framework to stabilization problems. A key feature of this study is deliberate avoidance of Dini derivatives. This approach circumvents excessive complexity in proofs and the need for cumbersome auxiliary constructions for functions of multiple variables. In terms of the theory of partial derivate numbers, necessary and sufficient stability conditions for the zero solution of a system of ordinary differential equations (ODEs) are formulated and proven. The paper presents the relevant theorems along with their detailed substantiations. The obtained results allow for efficient investigation of the stability of complex nonlinear systems without requiring classical smoothness of their mathematical models. This approach extends the capabilities of applied analysis of dynamical processes in engineering and control.

Keywords: *stability of systems of ordinary differential equations; stability of the trivial solution; Lyapunov's second method; derivative numbers; partial derivative numbers.*

For citation: Alferov, G. V., Ivanov, G. I., Korolev, V. S. and Pototskaya, I. Yu. (2026), "Derivate Numbers and Solution Stability in Dynamical Systems", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(74), pp. 5–17, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-5-17, <https://elibrary.ru/xbhxbo>.

The article was submitted 13 Apr 2026; approved after review 07 Sep 2026; accepted for publication 30 Sep 2026.

Введение

При исследовании устойчивости движения одним из основных методов является метод, предложенный А. М. Ляпуновым [1], который сводится к отысканию некоторых функций, обладающих определенными свойствами. Первым вопрос об обратимости метода Ляпунова поставил Н. Г. Четаев [2]. Сформулированная проблема привлекла внимание исследователей еще в 30-е годы XX века. Первый положительный результат в этом направлении был получен К. П. Персидским [3], установившим обратимость теоремы Ляпунова об устойчивости.

Положительное решение вопроса о существовании функций Ляпунова не только обосновало универсальность классических теорем второго метода Ляпунова, но и позволило развить глубокую теорию устойчивости движения.

В последующем, особенно в 1950-е годы, в литературе появилось значительное число работ, посвященных второму методу Ляпунова. Подробное освещение этого вопроса можно найти в монографии Н. Н. Красовского [4] и И. Г. Малкина [5]. Основным вывод, который следует из результатов этих работ, был сформулирован Красовским и заключается в том, что характер поведения возмущенных движений, определенный той или иной функцией из классических теорем второго метода Ляпунова, является необходимым и достаточным условием существования такой функции.

В настоящей работе предлагается новый подход к исследованию устойчивости решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей динамический объект. Он основывается на применении аппарата производных чисел и частных производных чисел [6]. Это математический инструмент, позволяющий исследовать сложные функции нескольких переменных. Его использование позволяет снизить требования к степени гладкости правых частей ОДУ, что расширяет класс исследуемых систем.

Ранее авторами были опубликованы общетеоретические работы [7–16], в которых сформулированы основные определения и положения теории производных чисел для функций одной и нескольких переменных, приведены необходимые обоснования и доказательства, обобщены некоторые классические теоремы математического анализа. В статьях [17–20] рассмотрены возможности применения математического аппарата ЧПЧ в прикладных задачах управления и стабилизации.

Для последовательного и понятного изложения предлагаемого подхода начнем с изложения основных понятий и главных положений аппарата ЧПЧ.

Производные числа функции одной переменной

Пусть f — определенная на открытом интервале (a, b) функция, принимающая значения из множества вещественных чисел R , т. е. $f : (a, b) \rightarrow R$, $a, b \in R$, $a < b$.

Выберем на промежутке (a, b) произвольную точку x_0 .

Определение 1. Число λ будем называть *производным числом функции f в точке x_0* , если существует последовательность $\{x_k\}$ такая, что $x_k \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} = \lambda.$$

Для большей ясности отметим, что справедливы следующие очевидные утверждения: в каждой точке интервала (a, b) функция f имеет по крайней мере одно производное число; функция f дифференцируема в точке $x \in (a, b)$ тогда и только тогда, когда в точке x она имеет только одно производное число.

То обстоятельство, что λ есть производное число функции f в точке x_0 , будем записывать как $\lambda = \lambda[f](x_0)$.

Определение 2. Функция f называется *монотонной*, если из $x < y$ следует $f(x) \leq f(y)$ или $f(x) \geq f(y)$. В первом случае функция f называется *возрастающей*, а во втором – *убывающей*. Если же из $x < y$ следует выполнение строгого неравенства $f(x) < f(y)$ или $f(x) > f(y)$, то f называется *строго монотонной*. Желая подчеркнуть при необходимости, о какой именно монотонности идет речь, говорят, что функция f строго возрастает, если из $x < y$ следует $f(x) < f(y)$, и строго убывает, если реализуется вторая возможность [21].

Теорема 1. Для того чтобы непрерывная функция f была строго монотонной, необходимо и достаточно, чтобы все ее производные числа были одного знака, и не существовало интервала, в каждой точке которого функция f имела бы нулевое производное число.

Доказательство.

Необходимость. Пусть f непрерывна, и для определенности будем считать ее строго возрастающей. Выберем произвольную точку x_0 и сходящуюся к ней последовательность $\{x_k\}$. Не нарушая общности, последовательность $\{x_k\}$ можно выбрать такой, чтобы существовал предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}.$$

По предположению функция f строго возрастает, и потому сразу для всех k будет

$$\frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} > 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} \geq 0,$$

откуда, в силу произвольности выбора точки x_0 и последовательности $\{x_k\}$, и следует, что все производные числа функции f имеют один и тот же знак. Случай, когда f строго убывает, рассматривается аналогично.

Покажем теперь, что если f строго монотонна и непрерывна, то выполняется и второе условие теоремы. Пусть, напротив, существует интервал $[a, b]$, в каждой точке которого функция f имеет нулевое производное число. В силу непрерывности и монотонности f переводит интервал $[a, b]$ в некоторый интервал $[\alpha, \beta]$ с мерой $m[\alpha, \beta] = \beta - \alpha > 0$.

Как известно [1], если для некоторого $p \geq 0$ строго монотонная функция f в каждой точке множества $E \subset [a, b]$ имеет хотя бы одно производное число $\lambda[f](x)$ такое, что

$$|\lambda[f](x)| \leq p,$$

то

$$m^*f(E) \leq p \cdot m^*E,$$

где через m^* обозначается внешняя мера соответствующего множества.

Применяя этот результат к рассматриваемому случаю при $p = 0$, будем иметь

$$m^*f([a, b]) = mf([a, b]) = m[\alpha, \beta] = |\beta - \alpha| = 0 \cdot |\beta - \alpha| = 0.$$

Но это противоречит полученному выше неравенству $|\beta - \alpha| > 0$, и, следовательно, интервала $[a, b]$, в каждой точке которого функция f имеет нулевое производное число, существовать не может.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Покажем, что в этом случае функция f является строго монотонной. Предположим противное, т.е., что f не является монотонной. Тогда она, в частности, не является монотонно возрастающей, следовательно, найдутся две точки x_1 и x_2 , $x_1 < x_2$, такие, что $f(x_1) > f(x_2)$. Через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ проведем прямую $l(x) = qx + r$. Заметим, что так как $f(x_1) > f(x_2)$, то q обязательно меньше нуля.

Рассмотрим все возникающие при таком построении возможности. Предположим сначала, что существует убывающая последовательность $\{x'_k\}$, сходящаяся к x_1 , и такая, что для всех k будет $f(x'_k) \leq l(x'_k)$. Тогда, учитывая, что $f(x_1) = l(x_1)$, имеем

$$\frac{f(x'_k) - f(x_1)}{x'_k - x_1} \leq \frac{l(x'_k) - l(x_1)}{x'_k - x_1} = q < 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$ (его, не нарушая общности, можно считать существующим), заключаем, что функция f в точке x_1 имеет отрицательное производное число, не превосходящее q .

Пусть такой последовательности $\{x'_k\}$ не существует, но существует возрастающая последовательность $\{x''_k\}$, сходящаяся к x_2 , и такая, что для всех k $f(x''_k) \geq l(x''_k)$. Повторяя для последовательности $\{x''_k\}$ рассуждения, которые были приведены для последовательности $\{x'_k\}$, снова придем к заключению, что функция f в точке x_2 имеет производное число, не превышающее q .

Наконец, если не существуют ни последовательность $\{x'_k\}$, ни последовательность $\{x''_k\}$, то это означает, что для всех $x > x_1$ и расположенных в достаточно малой окрестности точки x_1 , $f(x) > l(x)$, а для всех $x < x_2$ и расположенных в достаточно малой окрестности точки x_2 , $f(x) < l(x)$. Тогда, в силу непрерывности функции f , существуют точка $x_0 \in (x_1, x_2)$ и убывающая последовательность $\{x^*_k\}$, сходящаяся к x_0 , такие, что $f(x_0) = l(x_0)$ и для всех значений k выполняется $f(x^*_k) \leq l(x^*_k)$. Но эта ситуация полностью совпадает с ситуацией, в которой рассматривалась последовательность $\{x'_k\}$, следовательно, для точки x_0 справедлив тот же вывод, который был сделан для точки x_1 при наличии последовательности $\{x'_k\}$.

Таким образом, в любой из возможных ситуаций существует хотя бы одна точка, в которой функция f имеет отрицательное производное число.

Далее, функция f , не являясь монотонной, не является и убывающей. Следовательно, найдутся две точки y_1 и y_2 , $y_1 < y_2$, такие, что $f(y_1) < f(y_2)$. Практически повторяя для точек y_1 и y_2 приведенные выше рассуждения, найдем, что существует хотя бы одна точка, в которой функция f имеет положительное производное число.

Итак, если функция f не является монотонной, то она обязательно имеет производные числа разных знаков, что противоречит требованиям теоремы. Следовательно, если выполнены условия теоремы, то функция f является монотонной.

Пусть f – монотонная функция, но не строго монотонная. Тогда найдутся две точки z_1 и z_2 такие, что $f(z_1) = f(z_2)$. Поскольку f – монотонная, то и для всех $x \in [z_1, z_2]$ будет $f(x) = f(z_1)$. В этом случае из определения производных чисел следует, что для всех $x \in (z_1, z_2)$ будет $\lambda[f](x) = 0$, что противоречит предположению теоремы об отсутствии интервалов такого типа.

Таким образом, если выполнены условия теоремы, то функция f обязательно является строго монотонной.

Частные производные числа

Здесь мы дадим определение частных производных чисел для функции нескольких переменных и приведем некоторые результаты, которые понадобятся нам в дальнейшем. Пусть функция f задана в некоторой открытой области пространства R^n , и пусть $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – произвольная точка этой области.

Определение 3. Число λ называется *частным производным числом функции f в точке x по переменной x_i* , если существует сходящаяся к нулю при $k \rightarrow \infty$ последовательность $\{\Delta x_i^k\}$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i^k, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_i^k} = \lambda.$$

То обстоятельство, что λ есть частное производное число функции f в точке x по переменной x_i , мы будем записывать как $\lambda = \lambda_{x_i}[f](x)$.

Пусть функция $u = f(x)$ определена в некоторой области из R^n , причем каждая из переменных x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, в свою очередь, является функцией от переменной t в некотором промежутке: $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть, кроме того, при изменении t вектор x не выходит за пределы области определения функции u .

Подставив значения $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, в функцию u , получим сложную функцию $u = f(x(t))$.

Теорема 2. Пусть все частные производные числа функции u в точке x ограничены, а также ограничены все производные числа функций $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, в точке t . Тогда любое производное число λ сложной функции u в точке t представимо в виде $\lambda[u](t) = \sum_{i=1}^n \lambda_{x_i}[f](x) \lambda[x_i](t)$.

Доказательство. Если $\lambda[u](t)$ есть производное число сложной функции u в точке t , то существует стремящаяся к нулю при $k \rightarrow \infty$ последовательность $\{\Delta t_k\}$, $\Delta t_k \neq 0$, на которой это число реализуется. Тогда, не нарушая общности, можно считать, что на этой последовательности для любого $i \in (1, \dots, n)$ реализуется производное число $\lambda[x_i](t)$.

Положим

$$x^k = x(t + \Delta t_k), \quad \Delta x^k = x^k - x(t).$$

Разность $f(x^k) - f(x)$ запишем в виде:

$$\begin{aligned} f(x^k) - f(x) &= f(x_1 + \Delta x_1^k, \dots, x_n + \Delta x_n^k) - f(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \left[\frac{f(x_1 + \Delta x_1^k, \dots, x_n + \Delta x_n^k) - f(x_1, x_2 + \Delta x_2^k, \dots, x_n + \Delta x_n^k)}{\Delta x_1^k} \right] \Delta x_1^k + \\ &+ \left[\frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2^k, \dots, x_n + \Delta x_n^k) - f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3^k, \dots, x_n + \Delta x_n^k)}{\Delta x_2^k} \right] \Delta x_2^k + \\ &+ \dots + \left[\frac{f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \Delta x_n^k) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_n^k} \right] \Delta x_n^k. \end{aligned}$$

Заметим, что так как функции $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, непрерывны в точке t , в силу предположения, что все производные числа $\lambda[x_i](t), i = 1, 2, \dots, n$, ограничены, то при $k \rightarrow \infty$ $\Delta x^k \rightarrow 0$. Следовательно, можно считать, что каждая из дробей выше приведенного равенства стремится к некоторому частному производному числу $\lambda_{x_i}[f](x)$. Этого всегда можно добиться, переходя, если нужно, к подпоследовательности. Тогда, разделив вышеприведенное равенство на Δt_k и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим, в силу ограниченности всех производных чисел $\lambda[x_i](t), i = 1, 2, \dots, n$, требуемое представление.

Пусть x – внутренняя точка области определения функции f , и l – произвольный единичный вектор.

Определение 4. Число λ будем называть *производным числом функции f в точке x по направлению l* , если существует сходящаяся к нулю при $k \rightarrow \infty$ последовательность $\{t_k\}, t_k \neq 0$, такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x + t_k l) - f(x)}{t_k} = \lambda.$$

То обстоятельство, что λ есть производное число функции f в точке x по направлению l , будем записывать как

$$\lambda = \lambda_l[f](x).$$

Если в точке x все частные производные числа функции f ограничены, то, в силу теоремы 2,

$$\lambda_l[f](x) = \lambda_x[f](x) \cdot l,$$

где через $\lambda_x[f](x)$ обозначен n -мерный вектор, представляющий собой набор частных производных чисел функции f по переменным $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, в точке x , реализуемых на общей последовательности $\{t_k\}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, зависят не от одной переменной t , а от нескольких переменных, например,

$$x_i = x_i(t, s), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

После подстановки функций $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, в функцию f будем иметь некоторую функцию $u(f(x(t, s)))$ от двух переменных t и s . Возникает вопрос, можно ли выразить частные производные числа функции u через частные производные числа функций f и $x_i, i = 1, 2, \dots, n$?

Теорема 3. Пусть все частные производные числа функций f в точке x и функций $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, в точке (t, s) ограничены. Тогда имеют место представления:

$$\begin{aligned} \lambda_t[u](t, s) &= \sum_{i=1}^n \lambda_{x_i}[f](x) \cdot \lambda_t[x_i](t, s), \\ \lambda_s[u](t, s) &= \sum_{i=1}^n \lambda_{x_i}[f](x) \cdot \lambda_s[x_i](t, s). \end{aligned}$$

Доказательство. Придадим переменным t и s произвольные приращения Δt и Δs . Тогда $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, получают соответственные приращения Δx_i . Представим разность $u(t + \Delta t, s + \Delta s) - u(t, s)$ в двух формах:

$$u(t + \Delta t, s + \Delta s) - u(t, s) = \lambda_t[u](t, s; \Delta t, \Delta s)\Delta t + \lambda_s[u](t, s; \Delta t, \Delta s)\Delta s$$

и

$$\begin{aligned} u(t + \Delta t, s + \Delta s) - u(t, s) &= f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_{x_i}[f](x_1, \dots, x_n; \Delta x_1, \dots, \Delta x_n) [\lambda_t[x_i](t, s)\Delta t + \lambda_s[x_i](t, s)\Delta s]. \end{aligned}$$

Вычитая из первого представления второе и приравнявая к нулю коэффициенты при Δt и Δs (это можно делать, так как Δt и Δs произвольны и независимы), получим два соотношения:

$$\begin{aligned} \lambda_t[u](t, s) &= \sum_{i=1}^n \lambda_{x_i}[f](x_1, \dots, x_n) \cdot \lambda_t[x_i](t, s), \\ \lambda_s[u](t, s) &= \sum_{i=1}^n \lambda_{x_i}[f](x_1, \dots, x_n) \cdot \lambda_s[x_i](t, s). \end{aligned}$$

Выбирая теперь сходящуюся к нулю последовательность $\{\Delta t_k, \Delta s_k\}$, на которой реализуются, например, $\lambda_t[u](t, s)$, $\lambda_{x_i}[f](x)$ и $\lambda_t[x_i](t, s)$, и переходя в первом из двух полученных выше равенств к пределу при $k \rightarrow \infty$, убеждаемся в справедливости первого из доказываемых представлений. Справедливость второго представления проверяется аналогично.

Теорема об устойчивости движения

Пусть движение объекта описывается системой дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – n -мерный вектор фазовых переменных, t – время. Сформулируем сначала вспомогательную теорему.

Теорема 4. Пусть функция f в области

$$t \geq 0, \quad |x| < H \quad (H = \text{const} > 0) \quad (2)$$

имеет ограниченные частные производные числа. Тогда решение $x(t; t_0, x_0)$ системы (1), начинающееся в момент $t_0 > 0$ в точке x_0 ($\|x_0\| < H$), имеет ограниченные частные производные числа по начальным данным.

Доказательство. Решение системы (1) запишем в интегральной форме Вольтерры

$$x(t; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau; t_0, x_0)) d\tau.$$

Отсюда, с учетом теорем 2 и 3, имеем

$$\lambda_{x_0}[x](t; t_0, x_0) = \lambda_{x_0}[x_0] + \int_{t_0}^t \lambda_x[f](\tau, x(\tau; t_0, x_0)) \cdot \lambda_{x_0}[x](\tau; t_0, x_0) d\tau.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\|\lambda_{x_0}[x](t; t_0, x_0)\| \leq \|\lambda_{x_0}[x_0]\| + \int_{t_0}^t \|\lambda_x[f](\tau, x(\tau; t_0, x_0))\| \cdot \|\lambda_{x_0}[x](\tau; t_0, x_0)\| d\tau.$$

Применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла [22] и учитывая ограниченность частных производных чисел $\lambda_x[f](t, x)$, убеждаемся в ограниченности частных производных чисел $\lambda_{x_0}[x](t, t_0, x_0)$. Ограниченность частных производных чисел по t_0 доказывается аналогично.

Теперь, используя результаты доказанной выше теоремы, сформулируем и докажем теорему об устойчивости нулевого решения динамической системы (1).

Теорема 5. Если в области (2) функция f имеет ограниченные частные производные числа, тогда для того, чтобы решение $x = 0$ системы (1) было устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы существовала положительно определенная функция $V(t, x)$, частные производные числа которой в силу системы (1) были бы неположительными.

Доказательство.

Необходимость. При доказательстве воспользуемся методом, предложенным К.П. Персидским [3]. Наряду с (1) рассмотрим систему

$$\dot{y} = g(t, y) = f(t, y)\phi(y), \quad (3)$$

где ϕ – скалярная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\phi(y) = \begin{cases} 1: & \|y\| \leq h \\ 0: & H_1 \leq \|y\| \leq H, \end{cases} \quad (0 < h < H_1 < H), 0 \leq \phi \leq 1. \quad (4)$$

Через $y(t; t_0, y_0)$ обозначим решение системы (3), начинающееся в точке y_0 при $t = t_0$.

Из (4), очевидно, следует, что для любой точки (t, x) из области (2) ни при каком $\tau \geq 0$ не может нарушиться неравенство $\|y(\tau; t, x)\| \leq H_1$. Это означает, что функция $y(\tau; t, x)$ определена при всех $\tau \geq 0$, откуда следует, что функция $y(0; t, x)$ определена в области (2).

Положим

$$V(t, x) = \|y(0; t, x)\|^2. \quad (5)$$

Из теоремы 4 следует, что функция $V(t, x)$ имеет ограниченные частные производные числа.

Согласно (4), правые части систем (1) и (3) в области (2) совпадают, а следовательно, в этой области совпадают и частные производные числа функции (5) в силу этих систем.

Отсюда, учитывая формулу

$$\lambda_t[V](t, x) = \{\lambda_\tau[V](\tau, x(\tau; t, x))\}_{\tau=t},$$

которая следует из [8], а также свойство единственности решения, которое следует из ограниченности частных производных чисел функции f ,

$$x(t; \tau, x(\tau; t_0, x_0)) = x(t; t_0, x_0), \quad (6)$$

получаем

$$\lambda_t[V]_{(1)}(t, x) = \lambda_t[V]_{(3)}(t, x) = \{\lambda_\tau[\|y\|^2](0; \tau, y(\tau; t, x))\}_{\tau=t} = \{\lambda_\tau[\|y\|^2](0; t, x)\}_{\tau=t}.$$

Теперь нам осталось показать, что функция (5) положительно определенная. Так как движение $x = 0$ системы (1) устойчиво, а следовательно, и движение $y = 0$ системы (3) устойчиво, то для любого ϵ , $0 < \epsilon \leq h$, существует $\delta(\epsilon) > 0$. такое, что из $\|x\| < \delta$ следует $\|y(t; 0, x)\| < \epsilon$ при всех $t \geq 0$.

Покажем, что если $t \geq 0$, $\epsilon \leq \|x\| \leq h$, то $\|y(0; t, x)\| \geq \delta$.

Пусть, напротив, существует точка (t^*, x^*) , для которой $t^* \geq 0$, $\epsilon \leq \|x^*\| \leq h$, но $\|y(0; t^*, x^*)\| < \delta$. Отсюда, в силу устойчивости движения $y = 0$ системы (3), следует, что выполняется неравенство $\|y(t; 0, y(0; t^*, x^*))\| < \epsilon$ при всех $t \geq 0$, или, согласно (6), $\|y(t; t^*, x^*)\| < \epsilon$. Полагая в этом неравенстве $t = t^*$, получаем

$$\|y(t^*; T^*, x^*)\| = \|x^*\| < \epsilon,$$

что противоречит выбору точки (t^*, x^*) .

Пусть теперь $h > \epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_s > \dots$ – такая последовательность положительных чисел, что $\epsilon_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Согласно предыдущему, существует последовательность $\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_s > \dots, \delta_s > 0, \delta_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, для которой $\|y(0; t, x)\| \geq \delta_s$ при $\epsilon_{s+1} \leq \|x\| \leq \epsilon_s$. Но в таком случае в области (2) выполняется неравенство $\|y(0; t, x)\| \geq \mu(\|x\|)$, $\mu(r) \in \mathcal{H}$, где, например, можно положить

$$\mu(\|x\|) = \delta_{s+1} + \frac{\delta_s - \delta_{s+1}}{\epsilon_s - \epsilon_{s+1}} (\|x\| - \epsilon_{s+1})$$

при $\epsilon_{s+1} \leq \|x\| \leq \epsilon_s$. Следовательно, функция (5) положительно определена.

Достаточность. Пусть имеется функция $V(t, x)$, для которой существует положительно-определенная функция $W(x)$, удовлетворяющая в области (2) ограничению

$$V(t, x) \geq W(x). \quad (7)$$

Выберем произвольные $\epsilon, H > \epsilon > 0$, и обозначим через l точную нижнюю грань функции $W(x)$ на сфере $\|x\| = \epsilon$. Функция $V(t_0, x)$ не зависит явно от времени, непрерывна и $V(t_0, 0) = 0$. Следовательно, для числа $l > 0$ найдется такое $\delta(\epsilon, t_0) > 0$, что при $\|x\| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$V(t_0, x) < l. \quad (8)$$

По условию теоремы $\lambda_t[V](t, x(t; t_0, x_0)) \leq 0$ в области (2). В силу теоремы 1 это означает, что на решениях системы (1) в области (2) функция $V(t, x(t; t_0, x_0))$ не возрастает. Тогда из только что сказанного следует, что если начальное значение x_0 решения $x(t; t_0, x_0)$ выбрано согласно неравенству $\|x_0\| < \delta$, то $V(t, x(t; t_0, x_0))$ не может покинуть ϵ -сферы точки 0, поскольку на основании неравенств (7) и (8) имеем

$$W(x(t; t_0, x_0)) \leq V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) < l.$$

Поскольку l – точная нижняя грань функции $W(x)$ на сфере $\|x\| = \epsilon$, то для всех $t \geq t_0$ будет выполняться условие $\|x(t; t_0, x_0)\| < \epsilon$, что и доказывает устойчивость решения $x = 0$ системы (1).

Заключение

В статье предлагается использовать для анализа поведения решений систем дифференциальных уравнений аппарат производных чисел. Приведенные в работе теоремы и положения позволили сформулировать и доказать необходимые и достаточные условия устойчивости нулевого решения уравнений динамической системы в терминах этой теории. На основании этого можно сделать вывод, что предложенный подход позволяет

ослабить ограничения на степень гладкости исследуемых систем, делая возможным практически классическими методами исследовать более широкий класс систем, не требуя дифференцируемости правых частей исследуемых систем уравнений.

Список источников

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. 3-е изд. М.: Гостехиздат, 1955. 208 с.
3. Персидский К.П. Об одной теореме Ляпунова // ДАН СССР. 1937. Т. 14, № 9. С. 541–544.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
5. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
6. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., Наука, 1974. 480 с.
7. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A. Derived numbers of one variable convex functions // Italian journal of pure and applied mathematics. 2019. Vol. 41. P. 649–662.
8. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A. About stability of selector linear differential inclusions // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 2040. Art. № 150013.
9. Alferov G. V., Ivanov G. G., Efimova P. A., Sharlay A. S. Stability of linear systems with multitask right-hand member (Book Chapter) // Stochastic Methods for estimation and problem solving in engineering. 2018. P. 74–112.
10. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V. Possible solutions of a linear homogeneous system of differential equations // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2293. Art. № 060002.
11. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V. Investigation of the stability of solutions of systems of ordinary differential equations // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2293. Art. № 060004.
12. Иванов Г. Г., Алфёров Г. В., Ефимова П. А. Условия устойчивости линейных однородных систем с переключениями // Вестник Пермского Университета. Математика. Механика. Информатика. 2016. № 3(34). С. 37–48.
13. Иванов Г. Г., Алфёров Г. В., Ефимова П. А. Устойчивость селекторно-линейных дифференциальных включений // Вестник Пермского Университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. № 2(37). С. 25–30.
14. Иванов Г. Г., Алфёров Г. В., Королёв В. С. Об устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений // Вестник Пермского Университета. Математика. Механика. Информатика. 2022, № 2(57). С. 31–39.
15. Иванов Г. Г., Алфёров Г. В., Королёв В. С. Теорема об области асимптотической устойчивости и ее приложения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. № 1(56). С. 5–13.
16. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V. About of the asymptotical stability of solutions of systems of ordinary differential equations // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2293. Art. № 060005.
17. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A. Stabilization of the program motion of control object with elastically connected elements // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 2040. Art. № 150014.
18. Ivanov G., Alferov G., Sharlay A., Efimova P. Conditions of Asymptotic Stability for Linear Homogeneous Switched System // AIP Conference Proceedings (ICNAAM-2017). 2017. Vol. 1863. Art. № 080002. DOI: 10.1063/1.4992263.
19. Иванов Г. Г., Алфёров Г. В., Королёв В. С. Стабилизация программных движений систем переменной структуры // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. № 2(61). С. 16–28.

20. Kulakov F., Kadry S., Alferov G., Sharlay A. Bilateral remote control over space manipulators // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 2040. Art. № 150015.
21. Математическая энциклопедия / гл. ред. И. М. Виноградов. Москва: Советская энциклопедия, 1977–1985. (Энциклопедии. Словари. Справочники). 1982. 1184 с.
22. Богданов Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям. "Высшая Школа", Минск, 1977. 240 с.

References

1. Lyapunov, A. M. (1950), *The General Problem of Stability of Motion* [Obshchaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya], Gostekhizdat, Moscow, 472 p.
2. Chetaev, N. G. (1955), *Stability of Motion* [Ustoychivost dvizheniya], 3rd ed., Gostekhizdat, Moscow, 208 p.
3. Persidskiy, K. P. (1937), "On a Lyapunov Theorem" [Ob odnoy teoreme Lyapunova], *Reports of the USSR Academy of Sciences* [DAN SSSR], no 14(9), pp. 541–544.
4. Krasovskiy, N. N. (1959), *Some Problems of the Theory of Stability of Motion* [Nekotorye zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya], Fizmatgiz, Moscow, 211 p.
5. Malkin, I. G. (1966), *Theory of Stability of Motion* [Teoriya ustoychivosti dvizheniya], Nauka, Moscow, 530 p.
6. Natanson, I. P. (1974), *Theory of Functions of a Real Variable* [Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy], Nauka, Moscow, 480 p.
7. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Sharlay, A. (2019), "Derived numbers of one variable convex functions", *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, no 41, pp. 649–662.
8. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Sharlay, A. (2018), "About stability of selector linear differential inclusions", *AIP Conference Proceedings*, no 2040, Art. no 150013.
9. Alferov, G. V., Ivanov, G. G., Efimova, P. A. and Sharlay, A. S. (2018), "Stability of linear systems with multitask right-hand member (Book Chapter)", in *Stochastic Methods for Estimation and Problem Solving in Engineering*, pp. 74–112.
10. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Korolev, V. (2020), "Possible solutions of a linear homogeneous system of differential equations", *AIP Conference Proceedings*, no 2293, Art. no 060002.
11. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Korolev, V. (2020), "Investigation of the stability of solutions of systems of ordinary differential equations", *AIP Conference Proceedings*, no 2293, Art. no 060004.
12. Ivanov, G. G., Alferov, G. V. and Efimova, P. A. (2016), "Stability Conditions for Linear Homogeneous Systems with Switching" [Usloviya ustoychivosti lineynykh odnorodnykh sistem s pereklyucheniymi], *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics* [Vestnik Permskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika], no 3(34), pp. 37–48.
13. Ivanov, G. G., Alferov, G. V. and Efimova, P. A. (2017), "Stability of Selector-Linear Differential Inclusions" [Ustoychivost selektorno-lineynykh differentsialnykh vklucheniye], *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics* [Vestnik Permskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika], no 2(37), pp. 25–30.
14. Ivanov, G. G., Alferov, G. V. and Korolev, V. S. (2022), "On the Stability of Solutions of a System of Linear Differential Equations" [Ob ustoychivosti resheniy sistemy lineynykh differentsialnykh uravneniy], *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics* [Vestnik Permskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika], no 2(57), pp. 31–39.

15. Ivanov, G. G., Alferov, G. V. and Korolev, V. S. (2022), "A Theorem on the Domain of Asymptotic Stability and Its Applications" [Teorema ob oblasti asimptoticheskoy ustoychivosti i ee prilozheniya], *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics* [Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika], no 1(56), pp. 5–13.
16. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Korolev, V. (2020), "About of the asymptotical stability of solutions of systems of ordinary differential equations", *AIP Conference Proceedings*, no 2293, Art. no 060005.
17. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Sharlay, A. (2018), "Stabilization of the program motion of control object with elastically connected elements", *AIP Conference Proceedings*, no 2040, Art. no 150014.
18. Ivanov, G., Alferov, G., Sharlay, A. and Efimova, P. (2017), "Conditions of Asymptotic Stability for Linear Homogeneous Switched System", *AIP Conference Proceedings* (IC-NAAM-2017), no 1863, Art. no 080002, DOI: 10.1063/1.4992263.
19. Ivanov, G. G., Alferov, G. V. and Korolev, V. S. (2023), "Stabilization of Program Motions of Variable Structure Systems" [Stabilizatsiya programmnykh dvizheniy sistem peremennoy struktury], *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics* [Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika], no 2(61), pp. 16–28.
20. Kulakov, F., Kadry, S., Alferov, G. and Sharlay, A. (2018), "Bilateral remote control over space manipulators", *AIP Conference Proceedings*, no 2040, Art. no 150015.
21. Vinogradov, I. M. (ed.) (1977–1985), *Mathematical Encyclopedia* [Matematicheskaya entsiklopediya], Moscow: Soviet Encyclopedia [Sovetskaya entsiklopediya], 1184 p.
22. Bogdanov, Yu. S. (1977), *Lectures on Differential Equations* [Lektsii po differentsialnym uravneniyam], Minsk: Vysshaya Shkola ["Vyssheshnaya Shkola"], 240 p.

Информация об авторах:

Г. В. Алфёров – кандидат физико-математических наук; старший преподаватель кафедры механики управляемого движения факультета ПМ-ПУ Санкт-Петербургского государственного университета (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), eLibrary AuthorID: 11754, ORCID: 0000-0002-3989-7850, Scopus Author ID: 56651918300;

Г. Г. Иванов – кандидат физико-математических наук; научный сотрудник кафедры механики управляемого движения факультета ПМ-ПУ Санкт-Петербургского государственного университета (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), eLibrary AuthorID: 818451, ORCID: 0000-0003-2808-7913, Scopus Author ID: 57193393962;

В. С. Королёв – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры механики управляемого движения факультета ПМ-ПУ Санкт-Петербургского государственного университета (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), eLibrary AuthorID: 11786, ORCID: 0000-0001-5812-1794, Scopus Author ID: 56651788200;

И. Ю. Потоцкая – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры механики управляемого движения факультета ПМ-ПУ Санкт-Петербургского государственного университета (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), eLibrary AuthorID: 11794, ORCID: 0000-0002-3012-9740, Scopus Author ID: 56652325100.

Information about the authors:

G. V. Alferov – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Senior Lecturer at the Department of Mechanics of Controlled Motion, Faculty of PM-PU (Applied Mathematics

and Control Processes), St. Petersburg State University (35, Universitetskiy prospekt, Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russia), eLibrary AuthorID: 11754, ORCID: 0000-0002-3989-7850, Scopus Author ID: 56651918300;

G. G. Ivanov – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Researcher at the Department of Mechanics of Controlled Motion, Faculty of PM-PU (Applied Mathematics and Control Processes), St. Petersburg State University (35, Universitetskiy prospekt, Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russia), eLibrary AuthorID: 818451, ORCID: 0000-0003-2808-7913, Scopus Author ID: 57193393962;

V. S. Korolev – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Associate Professor of the Department of Mechanics of Controlled Motion, Faculty of PM-PU (Applied Mathematics and Control Processes), St. Petersburg State University (35, Universitetskiy prospekt, Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russia), eLibrary AuthorID: 11786, ORCID: 0000-0001-5812-1794, Scopus Author ID: 56651788200;

I. Y. Pototskaya – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Associate Professor at the Department of Mechanics of Controlled Motion, Faculty of PM-PU (Applied Mathematics and Control Processes), St. Petersburg State University (35, Universitetskiy prospekt, Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russia), eLibrary AuthorID: 11794, ORCID: 0000-0002-3012-9740, Scopus Author ID: 56652325100.