

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 534.18, 534.015, 517.925.42, 621.37

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-41-58

<https://elibrary.ru/ppzuzx>



Маломодовая редукция коллективной динамики ансамбля осцилляторов с асимметричным шумом Коши

Мария Викторовна Агеева¹, Денис Сергеевич Голдобин²

^{1,2} Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

² Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

¹ ageeva_mv00@mail.ru

² denis.goldobin@gmail.com

Аннотация. В работе исследуется влияние, оказываемое индивидуальными асимметричными шумами Коши на ансамбль синусоидально-связанных осцилляторов (как, например, ансамбль Курамото и ансамбль Курамото–Сакагучи). Для построения модели используется разложение по круговым кумулянтам. В рамках маломодовой редуцированной модели выявлен эффект смещения частоты коллективных колебаний, вызванный асимметрией шума. Помимо асимметрии в формирование эффекта вносят вклад более тяжелые "хвосты" распределения шума. Точность теоретических результатов, полученных в рамках маломодовой редукции представления круговых кумулянтов, подтверждается "точным" решением, полученным с помощью метода цепных дробей.

Ключевые слова: асимметричный шум Коши; круговые кумулянты; коллективные колебания; ансамбль Курамото; метод цепных дробей.

Для цитирования: Агеева М. В., Голдобин Д. С. Маломодовая редукция коллективной динамики ансамбля осцилляторов с асимметричным шумом Коши // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 2(73). С. 41–58. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-41-58. <https://elibrary.ru/ppzuzx>.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания, регистрационный номер темы № 124021600038-9.

Статья поступила в редакцию 28.01.2026; одобрена после рецензирования 10.03.2026; принята к публикации 10.06.2026.



© Агеева М. В., Голдобин Д. С., 2026
Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

MECHANICS

Research article

Low-Dimensional Model Reduction of the Collective Dynamics of an Oscillators Ensemble With Asymmetric Cauchy Noise

Maria V. Ageeva¹, Denis S. Goldobin²

^{1, 2} Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

² Perm State University, Perm, Russia

¹ ageeva_mv00@mail.ru

² denis.goldobin@gmail.com

Abstract. In this work, the effect of individual asymmetric Cauchy noises on an ensemble of sin-coupled oscillators (such as, for example, ensemble Kuramoto and ensemble Kuramoto-Sakaguchi) is studied. Circular cumulant expansion is used to build a mathematical model. Within the framework of the low-dimensional model reduction the effect of frequency shift of collective oscillations, produced by the noise asymmetry, is identified. In addition to asymmetry, the heavier "tails" of the noise distribution also contribute to the formation of the effect. The accuracy of theoretical results of the low-dimensional reduction of the circular cumulant representation is validated by the "exact" solution, calculated with the continued fraction method.

Keywords: *asymmetric Cauchy noise; circular cumulant; collective oscillations; Kuramoto ensemble; continued fraction method.*

For citation: Ageeva, M. V. and Goldobin, D. S. (2026), "Low-Dimensional Model Reduction of the Collective Dynamics of an Oscillators Ensemble With Asymmetric Cauchy Noise", Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science, no 2(73), pp. 41–58, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-41-58, <https://elibrary.ru/ppzux>.

Acknowledgments: the work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No 124021600038-9).

The article was submitted 28.01.2026; approved after reviewing 10.03.2026; accepted for publication 10.06.2026.

Введение

Теория Отта–Антонсена (ОА) [1] позволяет точно описывать динамику ансамбля нелинейных осцилляторов под воздействием симметричного шума Коши. Асимметрия же шума, широко встречающаяся в природе, нарушает применимость теории и вынуждает разрабатывать альтернативные подходы к решению задачи. Возможно, наиболее важным из всех является случай индивидуального шума. Например, эндогенный шум является причиной возникновения коллективных колебаний в гамма-диапазоне в сбалансированных сетях синаптически связанных нейронов [2]. Также эффект наблюдался для модели квадратичных нейронов накопления-сброса ("quadratic integrate-and-fire neurons", QIFs [3]), для которой теория ОА верна в случае отсутствия шума. Однако, при наличии шума, в рамках теории ОА, невозможно получить макроскопические автоколебания, что мотивирует разработку расширения теории на случаи слабого отклонения от базового многообразия.

Ранее уже были рассмотрены некоторые задачи в рамках так называемого формализма "круговых кумулянтов" (КК) [4, 5], маломодовые редукции которого уже позволяют включить в модель внешние и внутренние шумы [6–10]. Однако в тех теориях было использовано "диффузионное приближение", для которого шум считался белым и гауссовым [11, 12].

Известно, что гауссов шум обладает уникальным свойством – он не может быть асимметричным, поскольку микроскопические флуктуации лишь сдвигают его среднее значение. Напротив, для негауссова альфа-устойчивого шума микроскопические флуктуации приводят не только к утяжелению хвостов, но и к появлению асимметрии распределения. При этом асимметричный шум оказывается не просто возможным, но и естественным для многих физически и биологически значимых приложений [13–17].

В работе приведена математическая основа, построенная на формализме "круговых кумулянтов", пригодная для теоретического описания макроскопической динамики популяций осцилляторов, подверженных асимметричному шуму Коши. Ключевыми наблюдаемыми для макроскопического описания коллективного поведения являются частота коллективных колебаний и параметр порядка Курамото, модуль которого принимает значение 1 при идеальной синхронизации и 0 – в режимах максимального разупорядочения. В работе представлено описание явления нелинейного смещения частоты коллективных колебаний, которое полностью теряется при подстановке Отта–Антонсена для ансамбля типа Курамото [18] с асимметричным шумом.

1. Редуцированные модели представления круговых кумулянтов для асимметричного шума Коши

Рассмотрим ансамбль синусоидально связанных осцилляторов, подверженных индивидуальным δ -коррелированным шумам:

$$\dot{\phi}_j = \omega(t) + \text{Im}(2h(t)e^{-i\phi_j}) + \sigma \xi_j(t), \quad (1)$$

где ϕ_j – фаза колебаний j -го осциллятора, $\xi_j(t)$ – асимметричный шум Коши. В такой форме уравнение (1) охватывает широкий спектр моделей из теории коллективных явлений; ниже будет подробнее рассмотрен случай ансамбля Курамото, при котором $h = \varepsilon Z_1/2$ и

$$Z_1 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j}.$$

Тем же уравнением (1) может быть описано и множество других парадигматических моделей, поскольку их вид задается в том числе формой среднего поля $h(t)$. К примеру, для шунтированной цепочки джозефсоновских контактов $h = \text{const}$ [19]. Шум Коши является частным случаем α -устойчивого шума, и в силу того, что плотность вероятности для таких шумов не представима в виде элементарных функций, его распределение часто задается через характеристическую функцию F :

$$F_x(k) = \langle e^{ikx} \rangle = \exp[ik\mu - |ck|^\alpha (1 + i\beta \text{sign}(k)\Theta)].$$

где $\alpha \in (0; 2]$. Параметр β отвечает за асимметрию распределения, μ – за сдвиг, c – параметр масштабирования ($c > 0$), задающий ширину распределения, и при $\alpha = 1$ (шум Коши):

$$\Theta = -\frac{2}{\pi} \ln|k|.$$

Для анализа временной динамики системы запишем дробную версию уравнения Фоккера–Планка (см. [20]) для плотности вероятности $w(\phi, t)$ в Фурье-пространстве:

$$\dot{a}_m = im\omega a_m + mha_{m-1} - mh^* a_{m+1} + \sigma \dot{\Phi}^{(\xi)}(m) a_m, \quad (2)$$

где

$$w(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(t) e^{-im\varphi} \quad \text{и} \quad \dot{\Phi}^{(\xi)} = \frac{\Phi_{\xi\Delta}(m, c = \Delta t)}{\Delta t}.$$

Последнее "шумовое" слагаемое является логарифмом характеристической функции $\Phi_{\xi\Delta}(k, c) \equiv \ln F_{\xi\Delta}(k, c)$ и для асимметричного Коши шума принимает форму:

$$\dot{\Phi}^{(\xi)} = -|m| + i \frac{2\beta}{\pi} m \ln |m|.$$

Цепочка уравнений (2) может быть обобщена на случай гетерогенной популяции с лоренцевым распределением собственных частот:

$$G(\omega) = \frac{\pi^{-1} \gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2},$$

где γ – полуширина распределения Лоренца, ω_0 – медианная частота. Интегрируя (2) по собственным частотам, можно воспользоваться Основной теоремой о вычетах. Замыкать контур интегрирования следует через верхнюю полуплоскость комплексного ω , поскольку на нижней полуплоскости уравнение (2) дает бесконечно быстрый экспоненциальный рост аналитического продолжения. Тогда для Фурье-мод получим $Z_m(t) = \int G(\omega) a_m(\omega, t) d\omega = a_m(\omega_0 + i\gamma, t)$ и перейдем от (2) к уравнению динамики параметров порядка Курамото–Дайдо Z_m :

$$\dot{Z}_m = m((i\omega_0 - \gamma)Z_m + hZ_{m-1} - h^*Z_{m+1}) + \sigma \dot{\Phi}^{(\xi)}(m)Z_m. \quad (3)$$

Ряд параметров порядка Z_m определяет степень синхронизации системы: Z_1 отвечает за глобальную синхронизацию (случай $Z_1 = 1$ возникает при полной синхронизации), в то время как старшие порядки описывают систему осцилляторов с точки зрения образования кластеров.

Характеристическая функция, записанная для циклической переменной, аналогична производящей моменты функции и связана с параметрами порядка рядом вида:

$$F(k, t) = \langle e^{ke^{i\varphi}} \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(t) \frac{k^m}{m!}. \quad (4)$$

И, далее, введем в рассмотрение так называемые "круговые кумулянты" (КК), связанные с параметрами порядка через логарифм характеристической функции:

$$\Psi(k, t) = k \frac{\partial}{\partial k} \ln F(k, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \kappa_m k^m. \quad (5)$$

Связь параметров порядка и круговых кумулянтов произвольного порядка задается рекуррентным соотношением вида:

$$\kappa_m = \frac{Z_m}{(m-1)!} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\kappa_n Z_{m-n}}{(m-n)!}. \quad (6)$$

В частности, для первых трех элементов получаем следующие соотношения:

$$\kappa_1 = Z_1, \quad \kappa_2 = Z_2 - Z_1^2, \quad \kappa_3 = \frac{Z_3 - 3Z_2Z_1 + 2Z_1^3}{2}; \quad (7)$$

$$Z_1 = \kappa_1, \quad Z_2 = \kappa_2 + \kappa_1^2, \quad Z_3 = 2\kappa_3 + 3\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^3. \quad (8)$$

Дифференцируя (7) по времени, получим:

$$\dot{\kappa}_1 = \dot{Z}_1, \quad \dot{\kappa}_2 = \dot{Z}_2 - 2\dot{Z}_1 Z_1, \quad \dot{\kappa}_3 = \frac{\dot{Z}_3 - 3(\dot{Z}_2 Z_1 + Z_2 \dot{Z}_1) + 6Z_1^2 \dot{Z}_1}{2}.$$

Подставляя (3) в правую часть выражений для $\dot{\kappa}_n$ и выражая параметры порядка Z_n через κ_n , получим уравнения динамики первых трех КК:

$$\dot{\kappa}_1 = (i\omega_0 - \gamma - \sigma)Z_1 + h - h^*(\kappa_2 + Z_1^2), \quad (9)$$

$$\dot{\kappa}_2 = 2(i\omega_0 - \gamma - \sigma)\kappa_2 - 4h^*(\kappa_3 + Z_1\kappa_2) + i\frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln 4(\kappa_2 + Z_1^2), \quad (10)$$

$$\dot{\kappa}_3 = 3(i\omega_0 - \gamma - \sigma)\kappa_3 - h^*(9\kappa_4 + 3\kappa_2^2 + 6Z_1\kappa_3) + i\frac{3\beta\sigma}{\pi} \left(\ln 9\kappa_3 + \ln \frac{27}{4} \kappa_2 Z_1 + \ln \frac{3}{4} Z_1^3 \right). \quad (11)$$

В отсутствие шума ($\sigma = 0$) или в случае, когда шум симметричен ($\beta = 0$), цепочка уравнений (9)–(11) пропускает решение в виде подстановки Отта–Антонсена (КК второго порядка и старше равны нулю: $\kappa_{m \geq 2} = 0$), а динамика Z_1 регулируется исключительно уравнением (9). Более того, это решение оказывается притягивающим для всех $\gamma + \sigma > 0$ [21–23]. Малое, но конечное $\beta\sigma$ отклоняет притягивающее многообразие от многообразия Отта–Антонсена. С учетом этого, представление круговых кумулянтов может стать полезной основой для неидеальных ситуаций, где кумулянты старших порядков малы, но не равны нулю. Для $\beta\sigma > 0$ справедливым оказывается

$$\kappa_2 \propto \beta\sigma Z_1^2 \ln 4,$$

$$\kappa_3 \propto \beta\sigma \left(Z_1^3 \ln \frac{3}{4} + \kappa_2 Z_1 \ln \frac{27}{4} \right) + O(\kappa_2^2).$$

В рамках задачи выделяется два варианта иерархии малости:

- I. В случае слабой коллективной моды, для которой $|Z_1| \ll 1$, кумулянтный ряд образует простую геометрическую прогрессию $\kappa_m \sim (Z_1)^m$.
- II. В случае слабого шума $\sigma \ll 1$ или слабой его асимметрии $\beta \ll 1$ порядок величины κ_3/κ_2 оказывается приблизительно равным $\kappa_3/\kappa_2 \approx -0.2Z_1$, то есть κ_3 имеет тот же порядок малости, что и κ_2 . Однако, поскольку κ_3 оказывает лишь косвенное влияние на динамику параметра порядка Z_1 , а само $Z_1 \ll 1$, κ_3 все же будет иметь второстепенное влияние на динамику уравнения (9), и задачу можно замкнуть, положив $\kappa_3 = 0$. В некоторых ситуациях это приближение может быть принято в качестве результата строгого асимптотического разложения, в других является грубым приближением, однако в любом из этих случаев использование двухкумулянтной редукции для решения задачи имеет смысл.

2. Цепочка уравнений для круговых кумулянтов

Помимо маломодовой редукции, оказывается возможным вывести и бесконечную цепочку уравнений для динамики круговых кумулянтов. Производная характеристической функции имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(k, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \dot{Z}_m(t) \frac{k^m}{m!} = (i\omega_0 - \gamma)k \frac{\partial}{\partial k} F + h k F - h^* k \frac{\partial^2}{\partial k^2} F + \sigma \Phi^{(\xi)} \left(k \frac{\partial}{\partial k} \right) F.$$

Поскольку $\Psi(k, t) = \frac{k}{F} \frac{\partial F}{\partial k} = k \frac{\partial}{\partial k} \ln F(k, t)$, получим $\dot{\Psi} = k \frac{\partial}{\partial k} \frac{\dot{F}}{F}$, и динамика производящей кумулянты функции описывается уравнением:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = (i\omega_0 - \gamma - \sigma) k \frac{\partial}{\partial k} \Psi + h k - h^* k \frac{\partial}{\partial k} \left(k \frac{\partial}{\partial k} \frac{\Psi}{k} + \frac{\Psi^2}{k} \right) + i \frac{2\beta\sigma}{\pi} k \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{1}{F} k \frac{\partial}{\partial k} \ln \left(k \frac{\partial}{\partial k} \right) F \right).$$

Собирая слагаемые при степени k^m , и с учетом определения Ψ через кумулянтный ряд (4), получим важное рекуррентное соотношение для динамики произвольного κ_m :

$$\dot{\kappa}_m = m(i\omega_0 - \gamma - \sigma) \kappa_m + h \delta_{m1} - h^* \left(m^2 \kappa_{m+1} + m \sum_{n=1}^m \kappa_{m-n+1} \kappa_n \right) + i m \frac{2\beta\sigma}{\pi} \lambda_m^{(\beta)}, \quad (12)$$

где

$$\lambda^{(\beta)} \equiv \frac{1}{F} k \frac{\partial}{\partial k} \ln \left(k \frac{\partial}{\partial k} \right) F \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{(\beta)} k^m.$$

С учетом вида характеристической функции (4), заметим, что коэффициент $k \frac{\partial}{\partial k} \ln \left(k \frac{\partial}{\partial k} \right)$ не влияет на показатель степени в k^m , а лишь добавляет множитель $m \ln(m)$ к слагаемому k^m . Тогда для определения коэффициентов степенного ряда $\lambda_m^{(\beta)}$ получим производную рекуррентного соотношения (6):

$$\dot{\kappa}_m = \frac{\dot{Z}_m}{(m-1)!} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\kappa_n \dot{Z}_{m-n} + \dot{\kappa}_n Z_{m-n}}{(m-n)!}.$$

Подставляя слагаемые при $\beta\sigma$ из уравнений динамики (3) и (12), получим рекуррентное соотношение для коэффициентов $\lambda_m^{(\beta)}$:

$$m \lambda_m^{(\beta)} = \frac{m \ln m Z_m}{(m-1)!} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(\kappa_n (m-n) \ln(m-n) + n \lambda_n^{(\beta)}) Z_{m-n}}{(m-n)!}.$$

Для построения строгой асимптотической теории достаточно ограничиться вычислением κ_1^m -вкладов в $\lambda_m^{(\beta)}$:

$$\lambda_m^{(\beta)} = C_m \kappa_1^m + \dots, \quad \text{где } C_m = \sum_{n=0}^{m-2} \frac{(-1)^n \ln(m-n)}{n!(m-n-1)!}. \quad (13)$$

Изначально вид коэффициентов разложения C_m проще угадать по виду первых нескольких $\lambda_m^{(\beta)}$, нежели строго получить. Однако и вывод формулы (13) вполне возможен. Приведем его ниже.

Пусть $d^+ Z_m = i \frac{2\beta\sigma}{\pi} m \ln m Z_m$ – шумовая часть уравнения (3). В таком случае, для характеристической функции и Ψ -функции имеем:

$$d^+ F = \sum i \frac{2\beta\sigma}{\pi} m \ln m Z_m,$$

$$d^+\Psi = k \frac{\partial}{\partial k} \frac{d^+F}{F} = k \frac{\partial}{\partial k} \frac{\sum \frac{k^m}{m!} i \frac{2\beta\sigma}{\pi} m \ln m Z_1^m}{e^{kZ_1}}. \quad (14)$$

Уравнение (14) написано для случая Отта–Антонсена, где $Z_m = (Z_1)^m$, поскольку вклады κ_1^m -слагаемых в производную $\dot{\kappa}_m$ (или в приращение $d\kappa_m$) не зависят от старших кумулянтов κ_n , $n \geq 2$. То есть, для всех состояний ансамбля с одним и тем же значением κ_1 вклады старших кумулянтов будут идентичными. Следовательно, достаточно вычислить эти вклады для состояний $\kappa_m = \kappa_1 \delta_{m1}$, то есть на множестве ОА. После несложных преобразований уравнения (14), получим

$$d^+\Psi = e^{-kZ_1} \sum_m i \frac{2\beta\sigma}{\pi} \frac{k^m Z_1^m}{(m-1)!} [m \ln m - (m-1) \ln(m-1)].$$

Далее разложим экспоненту в ряд, и для большей ясности последующих действий, перейдем к новому индексу суммирования $m \rightarrow n$:

$$d^+\Psi = \sum_{m'} \frac{(-kZ_1)^{m'}}{m'!} \sum_n i \frac{2\beta\sigma}{\pi} \frac{k^n Z_1^n}{(n-1)!} [n \ln n - (n-1) \ln(n-1)]. \quad (15)$$

Группировкой слагаемых при k^m ранее уже было получено уравнение динамики круговых кумулянтов (12). Соответственно, из всех слагаемых суммы (15) необходимо вычленить такие, для которых справедливо $m' + n = m$, и тогда, сопоставляя полученное с "шумовым" слагаемым уравнения (12), получим:

$$m C_m \kappa_1^m = \sum_{n=m-m'} \frac{(-Z_1)^{m'}}{m'!} \frac{Z_1^n [n \ln n - (n-1) \ln(n-1)]}{(n-1)!}.$$

После замены индексов, с учетом $\kappa_1 = Z_1$, получим промежуточный результат:

$$C_m = \frac{1}{m} \sum_{n=2}^m \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!} \frac{[n \ln n - (n-1) \ln(n-1)]}{(n-1)!}. \quad (16)$$

Суммирование ряда (16) производится при $n \geq 2$, поскольку меньшие n дают ноль и не вносят вклад в сумму. Далее заметим, что в (16) натуральный логарифм $\ln n$ некоторого числа n повторяется дважды. Перепишем ряд в виде суммы логарифмов одного аргумента, также сместив точку начала суммирования:

$$C_m = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n \left(\frac{(n+2) \ln(n+2)}{(m-n-2)!(n+1)!} + \frac{(n+2) \ln(n+2)}{(m-n-3)!(n+2)!} \right).$$

Приводя к общему знаменателю, окончательно получим:

$$C_m = \sum_{n=0}^{m-2} \frac{(-1)^n \ln(n+2)}{(m-n-2)!(n+1)!} = \sum_{n=0}^{m-2} \frac{(-1)^n \ln(m-n)}{(m-n-1)!n!}.$$

Результат вычисления C_m обнаруживает чередование знака и уменьшение пропорционально $1/m!$. Произведение вида $(-1)^m C_m m!$ оказывается зависящим от m медленнее, чем любая степенная функция. Регрессия с дополнительным логарифмическим фактором

$$C_{m \geq 2} \approx \frac{(-1)^m}{m! \ln m} \quad (17)$$

обнаруживает высокую точность (на фоне множителя $m!$, который изменяется быстрее экспоненциальной функции), что можно видеть на рис. 1.

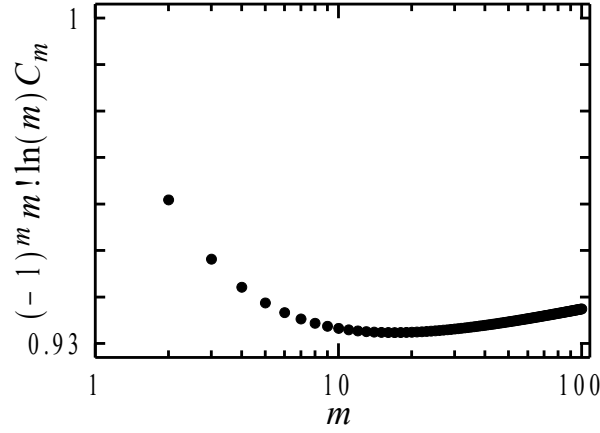


Рис. 1. График зависимости отношения C_m от m

3. Строгая асимптотическая теория для стационарных состояний ансамбля

Далее выведем строгие уравнения возмущений для малого $\beta\sigma$. Если $\gamma + \sigma > 0$ известно, что многообразие ОА является притягивающим. Малое, но конечное $\beta\sigma$ отклоняет решение от многообразия Отта–Антонсена, и это отклонение задается всеми старшими кумулянтами $\kappa_{m \geq 2} \sim \beta\sigma(Z_1)^m$. В уравнении динамики κ_m важно отметить, что порядок малости $\beta\sigma$ идентичен для κ_m и κ_{m+1} , из чего можно сделать вывод о невозможности строгого исключения кумулянта старшего порядка из (12). Тогда, с точностью до первой поправки, динамику системы можно описать следующими уравнениями:

$$\dot{Z}_1 = (i\omega_0 - \gamma - \sigma)Z_1 + h - h^*(\kappa_2 + Z_1^2), \quad (18)$$

$$\dot{\kappa}_m = m(i\omega_0 - \gamma - \sigma - 2h^*Z_1)\kappa_m - h^*m^2\kappa_{m+1} + im\frac{2\beta\sigma}{\pi}C_mZ_1^m, \text{ при } m = 2, 3, 4, \dots \quad (19)$$

Рассмотрим стационарное состояние. Зачастую фазовые системы оказываются инвариантны к сдвигу всех фаз на одну и ту же величину (таким свойством, например, обладают ансамбли Курамoto и Курамoto–Сакагучи). В таком случае, через систему (18)–(19) проходит "вращающееся" решение, которое будет стационарным во вращающейся системе отчета. Чтобы включить такие ситуации в рассмотрение, примем $\dot{\kappa}_m = im\Omega\kappa_m$, где постоянная частота Ω определяется самосогласованно (для систем без инвариантности к повороту, $\Omega = 0$). Тогда сдвиг частоты коллективных колебаний $\tilde{\omega} = \Omega - \omega_0$, возникающий в результате асимметрии шума β , приводит систему (18)–(19) к виду:

$$(i\tilde{\omega} + \gamma + \sigma + h^*Z_1)Z_1 - h = -h^*\kappa_2, \quad (20)$$

$$(i\tilde{\omega} + \gamma + \sigma + 2h^*Z_1)\kappa_m = -h^*m\kappa_{m+1} + i\frac{2\beta\sigma}{\pi}C_mZ_1^m, \text{ при } m = 2, 3, 4, \dots \quad (21)$$

Последнее уравнение, очевидно, представляет собой рекуррентное соотношение, которое в общем виде может быть записано как $\kappa_m = ic_mZ_1^m - mb\kappa_{m+1}$, где

$$c_m = \frac{2\beta\sigma\pi^{-1}C_m}{\gamma + \sigma + 2h^*Z_1 + i\tilde{\omega}}, \quad b = \frac{h^*}{\gamma + \sigma + 2h^*Z_1 + i\tilde{\omega}}.$$

В асимптотической теории оказывается возможным дать общую формулу для кумулянта любого порядка, благодаря этому рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned}\kappa_m &= ic_m Z_1^m - mb\kappa_{m+1} = ic_m Z_1^m - mb(ic_{m+1} Z_1^{m+1} - (m+1)b\kappa_{m+2}) = \dots = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} ic_{m+l} Z_1^{m+l} (-b)^l \frac{(m+l-1)!}{(m-1)!},\end{aligned}$$

справедливую для всех кумулянтов старших порядков ($m \geq 2$). Конкретно для двухкумулянтной редукции получаем:

$$\kappa_2 = i \frac{2\beta\sigma}{\pi} \frac{Z_1}{h^*} \sum_{l=1}^{\infty} C_{l+1} (-1)^{l+1} (bZ_1)^l l! \approx i \frac{2\beta\sigma}{\pi} \frac{Z_1}{h^*} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(l+1) \ln(l+1)} \frac{1}{\left(\frac{\gamma + \sigma + i\tilde{\omega}}{h^* Z_1} + 2 \right)^l}, \quad (22)$$

где была использована аппроксимация (17). Подставляя κ_2 из уравнения (20), получим самосогласованное уравнение для определения Z_1 :

$$\gamma + \sigma + i\tilde{\omega} + h^* Z_1 - \frac{h}{Z_1} = i \frac{2\beta\sigma}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l C_{l+1} l! (bZ_1)^l. \quad (23)$$

Сходимость ряда (22) важна в силу того, что: l -ое слагаемое входит в выражение для κ_{l+1} ; обрывание разложения КК после κ_l эквивалентно обрыванию ряда (22), но после $(l-1)$ -го члена. Ряд (22), с другой стороны, можно рассматривать как геометрическую прогрессию со знаменателем bZ_1 , который можно оценить из (21) с точностью до ведущего порядка по $\beta\sigma \ll 1$. Для этого, выразим из (16):

$$i\tilde{\omega} + \gamma + \sigma = \frac{h}{Z_1} - h^* Z_1 - \frac{h^* \kappa_2}{Z_1} = \frac{h}{Z_1} - h^* Z_1 + O(\beta\sigma),$$

и подставляя это в определение b , получим окончательно:

$$bZ_1 \approx \frac{1}{1 + \frac{hZ_1^*}{h^* Z_1} \frac{1}{|Z_1|^2}}.$$

Можно показать, что абсолютное значение второго слагаемого в знаменателе ≥ 1 , и 1 достигается только для состояний полной синхронности $|Z_1| = 1$. Для состояний низкой синхронизации ($|Z_1| \ll 1$) ряд (22) быстро затухает.

Далее, рассмотрим поведение знаменателя прогрессии подробнее на примере типичного случая – глобальной связи Курамото–Сакагучи:

$$h = \frac{\varepsilon}{2} e^{-i\theta} Z_1,$$

где ε – сила связи, θ – фазовый сдвиг связи ($\theta = 0$: чисто диссипативная связь, $\theta = \pm\pi/2$: чисто консервативная связь, $\cos \theta < 0$: отталкивающая связь (1)). Как для $\beta\sigma \rightarrow 0$ (Иерархия малости), так и вблизи порога синхронизации, где $|\kappa_2| \propto |Z_1|^2 \ll |Z_1|$ (I иерархия малости), κ_2 -слагаемое в уравнении (20) оказывается мало, и им можно пренебречь. В таком случае действительная часть уравнения (20), отнесенного к Z_1 , дает

$$\gamma + \sigma = \frac{\varepsilon}{2} \cos \theta (1 - |Z_1|^2),$$

и коллективный режим, очевидно, существует только при $|Z_1|^2 > 0$, что позволяет найти порог перехода для ансамбля Курамoto: синхронизация возможна при $\varepsilon > \varepsilon_{кр}$, где $\varepsilon_{кр} = 2(\gamma + \sigma)/\cos \theta$, который оказывается не зависим от асимметрии шума β . Выражая параметр порядка через пороговое значение $\varepsilon_{кр}$, получим

$$|Z_1|^2 \Big|_{\beta\sigma \rightarrow 0} = 1 - \frac{\varepsilon_{кр}}{\varepsilon}.$$

В таком случае, нетрудно получить выражение для знаменателя прогрессии bZ_1 :

$$|bZ_1| \approx \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{кр})}{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_{кр})^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_{кр})\cos 2\theta}},$$

который меньше 1 при $\cos(2\theta) > -\varepsilon_{кр}/(2(\varepsilon_{кр} - \varepsilon_{кр}))$. Последнее условие оказывается справедливо при $\varepsilon < 2\varepsilon_{кр}$; в случае более сильной связи (при приближении к $\theta = \pi/2$, т.е. для преимущественно консервативной связи со слабой диссипацией) это условие нарушается. Такой случай имеет значение, поскольку может быть связан с первым аналитически разрешимым примером состояний-"химер" (решенным подстановкой Отта–Антонсена), где связь была слабо неконсервативной [24].

В общем случае можно сделать вывод, что случай быстрой сходимости ряда (20) является типичным, но не обязательным. Множитель $(l+1)\ln(l+1)$ в знаменателе улучшает сходимость ряда при $|bZ_1| \leq 1$, но не способен обеспечить сходимость при $|bZ_1| > 1$.

4. Коллективная динамика ансамбля Курамoto с учетом внутреннего асимметричного шума Коши

Запишем уравнение динамики фазовой переменной для ансамбля Курамoto с шумом:

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{m=1}^N \sin(\varphi_m - \varphi_j) + \sigma \xi_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (24)$$

Связь между коэффициентом ε и $h(t)$ становится очевидной при рассмотрении уравнения (24) вкупе с (1):

$$h(t) = \frac{\varepsilon Z_1}{2}.$$

В термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$, справедливо равномерно вращающееся решение: $\dot{Z}_m = im\Omega Z_m$ или эквивалентное ему $\dot{\kappa}_m = im\Omega \kappa_m$, где $\tilde{\omega} = \Omega - \omega_0$ ненулевое в силу асимметричности шума $\beta \neq 0$. Тогда, уравнение (10) с учетом $\kappa_3 = 0$ переходит к виду:

$$\kappa_2 = \frac{i \frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln 2}{i\tilde{\omega} + \gamma + \sigma + \varepsilon |Z_1|^2 - i \frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln 2} Z_1^2,$$

и после подстановки κ_2 в (9), уравнение для первого параметра порядка приобретает вид:

$$|Z_1|^4 + \left(\frac{3\varepsilon_{кр}}{2\varepsilon} - 1 + i \frac{3\tilde{\omega}}{\varepsilon} \right) |Z_1|^2 + \left(\frac{\varepsilon_{кр}}{\varepsilon} - 1 + i \frac{2\tilde{\omega}}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\varepsilon_{кр}}{2\varepsilon} + i \left[\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} - 2 \frac{\beta\sigma}{\pi\varepsilon} \ln 2 \right] \right) = 0. \quad (25)$$

Для симметричного шума $\beta = 0$ и $\tilde{\omega} = 0$, уравнение (25) представляет собой квадратный трехчлен по $|Z_1|^2$, однако при $\beta \neq 0$ считать (25) просто квадратным уже будет неверно,

поскольку $|Z_1|$ действительно, в то время как коэффициенты уравнения комплексны и значение $\tilde{\omega} \neq 0$ определяется из условия самосогласованности.

Распишем уравнение (25) на действительную и мнимую часть:

$$|Z_1|^4 + \left(\frac{3\varepsilon_{кр}}{2\varepsilon} - 1 \right) |Z_1|^2 - \frac{\varepsilon_{кр}}{2\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon_{кр}}{\varepsilon} \right) - \frac{2\tilde{\omega}}{\varepsilon} \left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} - 2 \frac{\beta\sigma}{\pi\varepsilon} \ln 2 \right) = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} \left(|Z_1|^2 + \frac{2\varepsilon_{кр}}{3\varepsilon} - \frac{1}{3} \right) + \frac{\ln 2}{3} \frac{2\beta\sigma}{\pi\varepsilon} \frac{\varepsilon_{кр} - \varepsilon}{\varepsilon} = 0. \quad (27)$$

Системой (26)–(27) задаются значения действительных ($|Z_1|$, $\tilde{\omega}$). Нетривиальное решение системы единственно для любого надкритического $\varepsilon > \varepsilon_{кр}$ значения силы связи; бифуркация всегда прямая, а решений ниже порога не существует.

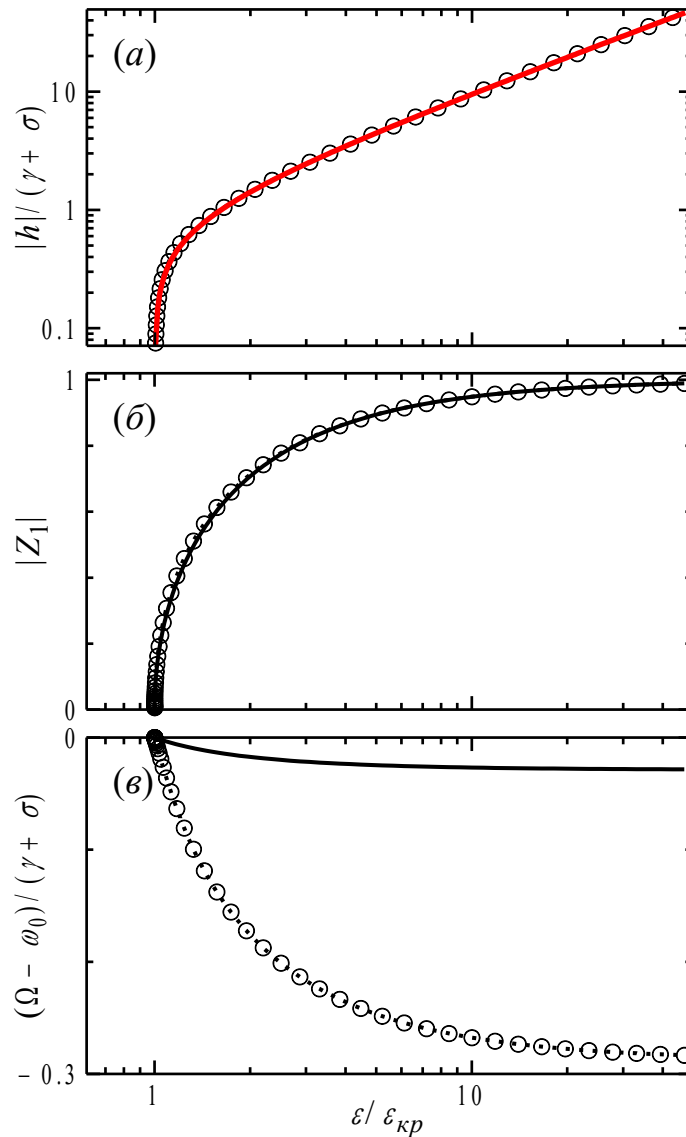


Рис. 2. Зависимость характеристик стационарного решения от силы связи: (а) среднее поле $|h|$ при $\beta = 1$ (круги) и аппроксимация (28) (сплошная линия); параметр порядка Курамото $|Z_1|$ (б) и сдвиг частоты коллективной моды (в) при $\beta = 0.1$ (сплошные линии) и $\beta = 1$ (круги). Пары зависимостей, построенные на графиках (а) и (б), неидентичны, хотя мало отличимы визуально

На рисунке 2 представлены зависимости среднего поля $|h|$ (а), параметра порядка Курамото $|Z_1|$ (б) и сдвига частоты коллективной моды колебаний $\tilde{\omega}$ (в) от силы связи ε , рассчитанные "точно" методом цепных дробей с $M = 2000$ мод Z_m . Захватом частоты отдельных осцилляторов управляет среднее поле h ; асимптотический вид зависимости $\varepsilon(h)$ может быть получен аналитически:

$$|h|_{\infty} = \sqrt{\varepsilon^2 / 4 - \varepsilon(\gamma + \sigma) / 2}, \quad (28)$$

что справедливо при $\varepsilon/\varepsilon_{кр} \gg 1$.

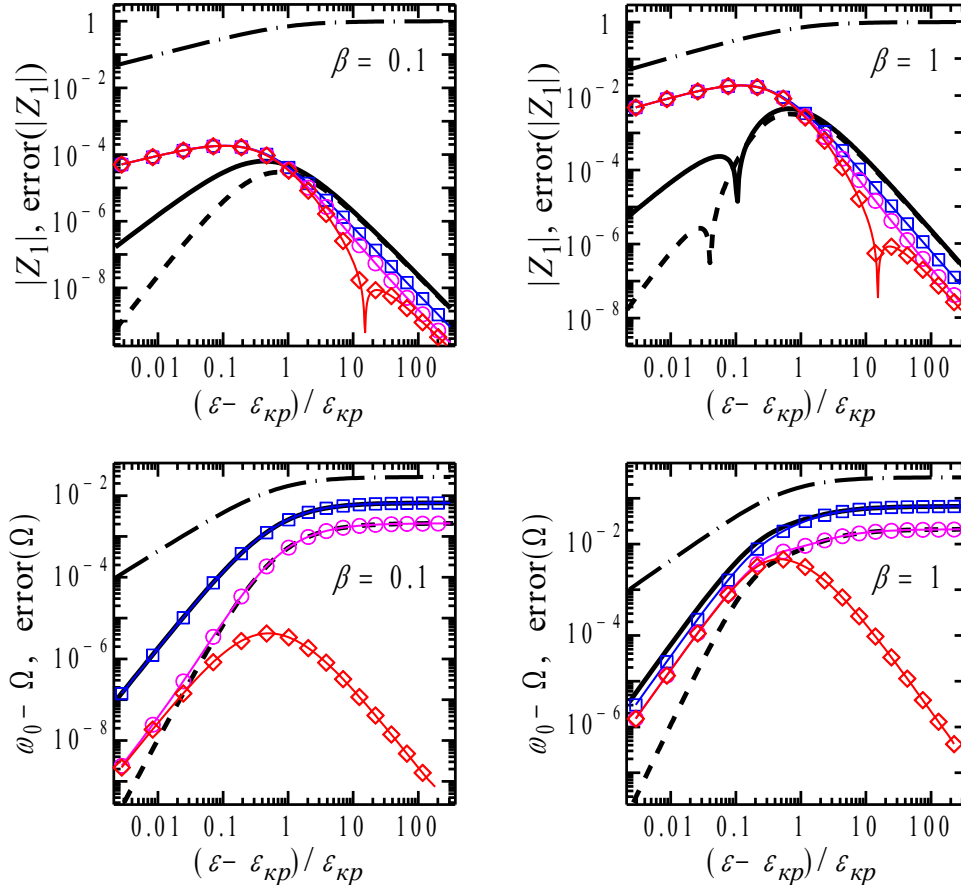


Рис. 3. "Точное" решение, представленное значением параметра порядка Курамото $|Z_1|$ и сдвигом частоты коллективных колебаний, вычислено методом цепных дробей с использованием $M = 2000$ мод и показано штрихпунктирными линиями. Погрешность 2КК и 3КК моделей показана сплошными и штриховыми линиями соответственно; погрешность линейного по $\beta\sigma$ приближения (23) представлена для случаев обрывания суммы после $l = 2$ (квадраты), 3 (круги) и 50 (ромбы). Значения параметра асимметрии шума β указаны на графиках

В верхнем ряду рис. 3 представлены двух- и трехкумулянтные (2КК и 3КК) модели, обеспечивающие хорошую точность вблизи точки перехода Курамото, где иерархия малости принимает вид $|\kappa_m| \sim |Z_1|^m$, в соответствии со случаем I, ранее подробно рассмотренным. Однако для случая сильной глобальной связи, где тип иерархии малости меняется с I на II, наиболее точное решение дает асимптотическое соотношение (23), учитывающее только линейный по $\beta\sigma$ вклад. Точность же 2КК и 3КК моделей не только оказывается ниже асимптотического, но и слабо различается между собой. Двух- и трехкумулянтные модели демонстрируют хорошую точность равномерно по всему пространству параметров, в то

время как асимптотическое решение имеет высокую точность только в случае сильной связи – его погрешность больше при $\beta \sim 1$ и $\varepsilon < 2\varepsilon_{кр}$, где малый параметр $\beta\sigma$ перестает быть малым, а его место занимает другой: $|Z_1| \ll 1$. Тем не менее, даже в этой области параметров точность всех представленных моделей достаточно высока.

5. Метод цепных дробей для решения стационарной задачи

Высокоточное численное решение для стационарных состояний может быть получено с помощью метода цепных дробей [25]. Как уже отмечалось ранее, через уравнения типа (3) проходит не зависящее от времени решение вида $\dot{Z}_m = im\Omega Z_m$, в результате подстановки которого получим:

$$0 = -(i\tilde{\omega} + \gamma + \sigma)Z_m + hZ_{m-1} - h^*Z_{m+1} + i\frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln m Z_m. \quad (29)$$

Уравнение (29) имеет рекуррентный вид: оно объединяет три соседних параметра порядка, что затрудняет вычисления. Для уменьшения количества "соседей", перейдем от переменной Z_m к $B_m = Z_m/Z_{m-1}$:

$$0 = i\left(\frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln m - \tilde{\omega}\right) - \gamma - \sigma + \frac{h}{B_m} - h^*B_{m+1}. \quad (30)$$

Преимущество такой замены очевидно: вместо трех последовательных Z_m в (29), уравнение (30) охватывает только два соседних элемента B_m . Однако теперь зависимость между ними не прямая, а обратная. Перепишем (30) в рекуррентном виде:

$$B_m = \frac{h}{\gamma + \sigma + i\left(\tilde{\omega} - \frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln m\right) + h^*B_{m+1}}.$$

Поскольку $Z_0 = 1$, справедливой оказывается связь $Z_1 = B_1$, что позволяет выразить Z_1 через бесконечную дробь вида:

$$Z_1 = \frac{h}{\gamma + \sigma + i\tilde{\omega} + \frac{|h|^2}{\gamma + \sigma + i\left(\tilde{\omega} - \frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln 2\right) + \frac{|h|^2}{\gamma + \sigma + i\left(\tilde{\omega} - \frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln 3\right) + \frac{|h|^2}{\dots}}}. \quad (31)$$

На практике цепь (31) необходимо оборвать на некотором достаточно большом $m_\infty \gg 1$, для которого справедливо "приближение самоподобия" $B_{m_\infty+1} \approx B_{m_\infty}$ и

$$h^*B_{m_\infty} = \frac{|h|^2}{\gamma + \sigma + i\left(\tilde{\omega} - \frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln m_\infty\right) + h^*B_{m_\infty}}. \quad (32)$$

Решая последнее уравнение, получим приближенно:

$$B_{m_\infty} \approx \frac{2h}{\gamma + \sigma + i\left(\tilde{\omega} - \frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln m_\infty\right)}. \quad (33)$$

Также существует и другой корень уравнения (32), однако он соответствует расходимости ряда Z_m при большом значении m_∞ : для него $|Z_m|/|Z_{m-1}| = |B_m| > 1$.

Для системы Курамото можно вычислить точное решение в параметрической форме следующим образом. При известных параметрах $(\gamma, \sigma, \beta\sigma)$ фиксируем величину среднего поля $|h|^2$, и, далее, поднимаясь от "последнего" (33) к первому (31) элементу Z_1 , получим выражение для величины (h^*Z_1) как функции $\tilde{\omega}$. Поскольку $\text{Im}(h^*Z_1) = 0$, возможным оказывается найти частоту $\tilde{\omega}$. И, таким образом, для фиксированного значения $|h|^2 = \varepsilon^2|Z_1|^2/4$, находим значение $h^*Z_1 = \varepsilon|Z_1|^2/2$, в конце концов приходя к искомым $\varepsilon = 2|h|^2/(h^*Z_1)$ и $|Z_1|^2 = (h^*Z_1)^2/|h|^2$.

Заключение

Были выведены маломодовые редуцированные модели для макроскопической динамики термодинамически больших популяций синусоидально-связанных фазовых осцилляторов, подверженных асимметричному шуму Коши. В отличие от случая симметричного шума, теория Отта–Антонсена оказывается неприменима в чистом виде, поскольку асимметрия приводит к отклонению от многообразия $Z_m = (Z_1)^m$. Было предложено использование разложения по круговым кумулянтам, которое в большинстве случаев затухает достаточно быстро, чтобы удовлетворительно описывать макроскопическую динамику первыми двумя-тремя кумулянтами.

В общем случае разложения вблизи точек бифуркации отличаются худшей сходимостью в силу сингулярности задачи (а именно, линейного оператора). Например, для гауссова шума вопрос о скорости сходимости разложения по круговым кумулянтам и точности 2КК приближения в окрестности точки бифуркации исследован в [26]. Точкой бифуркации выступает граница на оси параметра ω между осцилляторами, синхронизированными со средним полем, и несинхронизированными. Однако в работе [26] рассматривается равномерное распределение собственных частот, тогда как в настоящей работе для лоренцева распределения частот сингулярность снимается точно – интегрирование по частотам проводится с использованием Основной теоремы о вычетах. Далее разложение строится уже для системы уравнений свободной от сингулярностей. Анализ сходимости для точек бифуркаций является большой самостоятельной задачей, требующей отдельного изучения, а свойства скейлинга результатов и погрешностей будут различны для сингулярностей различного типа.

В рамках редукции модели круговых кумулянтов был выявлен и изучен эффект смещения частоты коллективных колебаний, обусловленный асимметрией шума. За формирование этого эффекта отвечают два неразделимых фактора: асимметрия шума и тяжелые хвосты в его распределении. Роль этих факторов нельзя разделить, поскольку асимметрия с одной стороны усиливает утяжеление хвостов, но с другой – не может существовать в их отсутствие. Данный эффект был подробно количественно охарактеризован для ансамбля Курамото. Для случая сильной связи был аналитически выведен асимптотический закон. Точность двух- и трехкумулянтных редукций сравнивались с асимптотическим решением и высокоточным методом цепных дробей. Оказалось, что точность всех приведенных редуцированных моделей достаточно велика, чтобы их использование было оправданным. Однако, в области сильной связи для ансамбля Курамото наибольшей точностью выделяется асимптотическое решение, учитывающее только линейный по асимметрии шума вклад. Величина смещения коллективных колебаний зависит от амплитуды коллективной моды и исчезает вблизи точки перехода Курамото. Изученный эффект оказывается существенно нелинейным.

Список источников

1. Ott E., Antonsen T. M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // *Chaos*. 2008. Vol. 18, № 3. P. 037113. URL: <https://doi.org/10.1063/1.2930766> (дата обращения: 04.03.2026).
2. Di Volo M., Torcini A. Transition from asynchronous to oscillatory dynamics in balanced spiking networks with instantaneous synapses // *Physical Review Letters*. 2018. Vol. 121, № 12. P. 128301. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.128301> (дата обращения: 04.03.2026).
3. Ermentrout G. B., Kopell N. Parabolic Bursting in an Excitable System Coupled with a Slow Oscillation // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1986. Vol. 46, № 2. P. 233–253. URL: <https://doi.org/10.1137/0146017> (дата обращения: 04.03.2026).
4. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A. Dynamics of noisy oscillator populations beyond the Ott Antonsen ansatz // *Physical Review Letters*. 2018. Vol. 120, № 26. P. 264101. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.264101> (дата обращения: 04.03.2026).
5. Goldobin D. S., Dolmatova A. V. Ott-Antonsen ansatz truncation of a circular cumulant series // *Physical Review Research*. 2019. Vol. 1, № 3. P. 033139. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.1.033139> (дата обращения: 04.03.2026).
6. Ratas I., Pyragas K. Noise-induced macroscopic oscillations in a network of synaptically coupled quadratic integrate-and-fire neurons // *Physical Review E*. 2019. Vol. 100, № 5. P. 052211. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.052211> (дата обращения: 04.03.2026).
7. Di Volo M., Segneri M., Goldobin D. S., Politi A., Torcini A. Coherent oscillations in balanced neural networks driven by endogenous fluctuations // *Chaos*. 2022. Vol. 32, № 2. P. 023120. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0075751> (дата обращения: 04.03.2026).
8. Голдобин Д. С., Долматова А. В. Редуцированные кумулянтные модели макроскопической динамики ансамбля Курамото с мультипликативным внутренним шумом // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2021. Т. 29, № 2. С. 288–301. URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-2-288-301> (дата обращения: 04.03.2026).
9. Долматова А. В., Тюлькина И. В., Голдобин Д. С. Описание макроскопической динамики популяций фазовых элементов с белым негауссовым шумом на основе подхода круговых кумулянтов // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2021. № 3. С. 5–12. URL: <https://doi.org/10.17072/1994-3598-2021-3-05-12> (дата обращения: 04.03.2026).
10. Тюлькина И. В., Голдобин Д. С. Влияние шума на синхронность колебаний конвективных течений // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2024. Т. 67, № 4. С. 65–77. URL: <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2024-4-65-77> (дата обращения: 04.03.2026).
11. Capocelli R., Ricciardi L. Diffusion approximation and first passage time problem for a model neuron // *Kybernetik*. 1971. Vol. 8. P. 214–223. URL: <https://doi.org/10.1007/BF00288750> (дата обращения: 04.03.2026).
12. *Introduction to theoretical neurobiology*. Vol. 2: Nonlinear and stochastic theories / Tuckwell H. C. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. 265 p.
13. Klafter J., Blumen A., Shlesinger M. F. Stochastic pathway to anomalous diffusion // *Physical Review A*. 1987. Vol. 35, № 7. P. 3081–3085. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.35.3081> (дата обращения: 04.03.2026).

14. Голдобин Д. С., Долматова А. В. Эффект расхождения частот в ансамблях автоколебательных систем с отталкивающей глобальной связью при синхронизации общим шумом // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27, № 3. С. 33–60. URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-3-33-60> (дата обращения: 04.03.2026).
15. Petrovskii S., Morozov A. Dispersal in a statistically structured population: fat tails revisited // American Naturalist. 2009. Vol. 173, no 2. P. 278–289. URL: <https://doi.org/10.1086/595755> (дата обращения: 04.03.2026)
16. Mandelbrot B. New methods in statistical economics // Journal of Political Economy. 1963. Vol. 71, № 5. P. 421–440. URL: <https://doi.org/10.1086/258792> (дата обращения: 04.03.2026).
17. Simkowitz M. A., Beedles W. L. Asymmetric Stable Distributed Security Returns // Journal of the American Statistical Association. 1980. Vol. 75, no 370. P. 306–312. URL: <https://doi.org/10.2307/2287449> (дата обращения: 04.03.2026).
18. Голдобин Д. С., Долматова А. В., Розенблюм М., Пиковский А. Синхронизация в ансамблях Курамото–Сакагучи при конкурирующем влиянии общего шума и глобальной связи // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 6. С. 5–37. URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2017-25-6-5-37> (дата обращения: 04.03.2026).
19. Watanabe S., Strogatz S. H. Constants of motion for superconducting Josephson arrays // Physica D (Nonlinear Phenomena). 1994. Vol. 74, № 3–4. P. 197–253. URL: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(94\)90196-1](https://doi.org/10.1016/0167-2789(94)90196-1) (дата обращения: 04.03.2026).
20. Ageeva M. V., Goldobin D. S. Nonlinear bias of collective oscillation frequency induced by asymmetric Cauchy noise // Chaos. 2025. Vol. 35, № 2. P. 023126. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0239363> (дата обращения: 04.03.2026).
21. Ott E., Antonsen T. M. Long time evolution of phase oscillator systems // Chaos. 2009. Vol. 19, № 2. P. 023117. URL: <https://doi.org/10.1063/1.3136851> (дата обращения: 04.03.2026).
22. Mirollo R. E. The asymptotic behavior of the order parameter for the infinite-N Kuramoto model // Chaos. 2012. Vol. 22, № 4. P. 043118. URL: <https://doi.org/10.1063/1.4766596> (дата обращения: 04.03.2026).
23. Pietras B., Daffertshofer A. Ott-Antonsen attractiveness for parameter-dependent oscillatory systems // Chaos. 2016. Vol. 26, № 10. P. 103101. URL: <https://doi.org/10.1063/1.4963371> (дата обращения: 04.03.2026).
24. Abrams D. M., Mirollo R., Strogatz S. H., Wiley D. A. Solvable Model for Chimera States of Coupled Oscillators // Physical Review Letters. 2008. Vol. 101, № 8. P. 084103. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.084103> (дата обращения: 04.03.2026).
25. Continued Fractions / Khinchin A. Ya. Chicago and London: University of Chicago Press, 1964. 95 p.
26. Klinshov V. V., Zlobin D. A., Maryshev B. S., Goldobin D. S. Effect of noise on the collective dynamics of a heterogeneous population of active rotators // Chaos. 2021. Vol. 31, № 4. P. 043101. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0030266> (дата обращения: 04.03.2026).

References

1. Ott, E. and Antonsen, T. M. (2008), "Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators", *Chaos*, vol. 18, no 3, pp. 037113, URL: <https://doi.org/10.1063/1.2930766>.

2. Di Volo, M. and Torcini, A. (2018), "Transition from asynchronous to oscillatory dynamics in balanced spiking networks with instantaneous synapses", *Physical Review Letters*, vol. 121, no 12, pp. 128301, URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.128301>.
3. Ermentrout, G. B. and Kopell, N. (1986), "Parabolic Bursting in an Excitable System Coupled with a Slow Oscillation", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 46, no 2, pp. 233–253, URL: <https://doi.org/10.1137/0146017>.
4. Tyulkina, I. V., Goldobin, D. S., Klimenko, L. S. and Pikovsky, A. (2018), "Dynamics of noisy oscillator populations beyond the Ott Antonsen ansatz", *Physical Review Letters*, vol. 120, no 26, pp. 264101, URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.264101>.
5. Goldobin, D. S. and Dolmatova, A. V. (2019), "Ott-Antonsen ansatz truncation of a circular cumulant series", *Physical Review Research*, vol. 1, no 3, pp. 033139, URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.1.033139>.
6. Ratas, I. and Pyragas, K. (2019), "Noise-induced macroscopic oscillations in a network of synaptically coupled quadratic integrate-and-fire neurons", *Physical Review E*, vol. 100, no 5, pp. 052211, URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.052211>.
7. Di Volo, M., Segneri, M., Goldobin, D. S., Politi, A. and Torcini, A. (2022), "Coherent oscillations in balanced neural networks driven by endogenous fluctuations", *Chaos*, vol. 32, no 2, pp. 023120, URL: <https://doi.org/10.1063/5.0075751>.
8. Goldobin, D. S. and Dolmatova, A. V. (2021), "Reduced cumulant models for macroscopic dynamics of Kuramoto ensemble with multiplicative intrinsic noise". *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, vol. 29, no 2, pp. 288–301, URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-2-288-301>.
9. Dolmatova, A. V., Tyulkina, I. V. and Goldobin, D. S. (2021), "Description of the macroscopic dynamics of populations of phase elements with white non-Gaussian noise based on the circular cumulant approach", *Bulletin of Perm University. Physics*, no 3, pp. 05–12, URL: <https://doi.org/10.17072/1994-3598-2021-3-05-12>.
10. Tyulkina, I. V. and Goldobin, D. S. (2024), "The Influence of Noise on the Synchronization of Oscillations of Convective Currents", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, vol. 67, no 4, pp. 65–77, URL: <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2024-4-65-77>.
11. Capocelli, R. and Ricciardi, L. (1971), "Diffusion approximation and first passage time problem for a model neuron", *Kybernetik*, vol. 8, pp. 214–223, URL: <https://doi.org/10.1007/BF00288750>.
12. Tuckwell, H. C. (1988), *Introduction to theoretical neurobiology. Vol. 2: Nonlinear and stochastic theories*, Cambridge University Press, UK, 265 p.
13. Klafter, J., Blumen, A. and Shlesinger, M. F. (1987), "Stochastic pathway to anomalous diffusion", *Physical Review A*, vol. 35, no 7, pp. 3081–3085, URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.35.3081>.
14. Goldobin, D. S. and Dolmatova, A. V. (2019), "Frequency repulsion in ensembles of general limit-cycle oscillators synchronized by common noise in the presence of global desynchronizing coupling", *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, vol. 27, no 3, pp. 33–60, URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-3-33-60>.
15. Petrovskii, S. and Morozov, A. (2009), "Dispersal in a statistically structured population: fat tails revisited", *American Naturalist*, vol. 173, no 2, pp. 278–289. URL: <https://doi.org/10.1086/595755>.
16. Mandelbrot, B. (1963), "New methods in statistical economics", *Journal of Political Economy*, vol. 71, no 5, pp. 421–440, URL: <https://doi.org/10.1086/258792>.
17. Simkowitz, M. A. and Beedles, W. L. (1980), "Asymmetric Stable Distributed Security Returns", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 75, no 370, pp. 306–312, URL: <https://doi.org/10.2307/2287449>.

18. Goldobin, D. S. and Dolmatova, A. V., Rosenblum, M. and Pikovsky, A. (2017), "Synchronization in Kuramoto–Sakaguchi ensembles with competing influence of common noise and global coupling", *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, vol. 25, no 6, pp. 5–37, URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2017-25-6-5-37>.
19. Watanabe, S. and Strogatz S. H. (1994), "Constants of motion for superconducting Josephson arrays", *Physica D (Nonlinear Phenomena)*, vol. 74, no 3–4, pp. 197–253, URL: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(94\)90196-1](https://doi.org/10.1016/0167-2789(94)90196-1).
20. Ageeva, M. V. and Goldobin, D. S. (2025), "Nonlinear bias of collective oscillation frequency induced by asymmetric Cauchy noise", *Chaos*, vol. 35, no 2, pp. 023126, URL: <https://doi.org/10.1063/5.0239363>.
21. Ott, E. and Antonsen, T. M. (2009), "Long time evolution of phase oscillator systems", *Chaos*, vol. 19, no 2, pp. 023117, URL: <https://doi.org/10.1063/1.3136851>.
22. Mirollo, R. E. (2012), "The asymptotic behavior of the order parameter for the infinite-N Kuramoto model", *Chaos*, vol. 22, no 4, pp. 043118, URL: <https://doi.org/10.1063/1.4766596>.
23. Pietras, B. and Daffertshofer, A. (2016), "Ott-Antonsen attractiveness for parameter-dependent oscillatory systems", *Chaos*, vol. 26, no 10, pp. 103101, URL: <https://doi.org/10.1063/1.4963371>.
24. Abrams, D. M., Mirollo, R., Strogatz, S. H. and Wiley, D. A. (2008), "Solvable Model for Chimera States of Coupled Oscillators", *Physical Review Letters*, vol. 101, no 8, pp. 084103, URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.084103>.
25. Khinchin, A. Ya. (1964), *Continued Fractions*, University of Chicago Press, Chicago, USA and London, UK, 95 p.
26. Klinshov, V. V., Zlobin, D. A., Maryshev, B. S. and Goldobin, D. S. (2021), "Effect of noise on the collective dynamics of a heterogeneous population of active rotators", *Chaos*, vol. 31, no 4, pp. 043101, URL: <https://doi.org/10.1063/5.0030266>.

Информация об авторах:

М. В. Агеева – инженер-исследователь, Институт механики сплошных сред УрО РАН (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, д. 1), Author ID: 58119373600, ORCID: 0009-0008-6671-2787;

Д. С. Голдобин – кандидат физико-математических наук; заведующий Лабораторией подземной утилизации углерода Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, д. 1), доцент кафедры теоретической физики Пермского государственного национального исследовательского университета (614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), Author ID: 8368187600, ORCID: 0000-0002-4746-8386.

Information about the authors:

M. V. Ageeva – engineer-researcher in the Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS (1 Akademika Koroleva St., Perm, Russia, 614013), Author ID: 58119373600, ORCID: 0009-0008-6671-2787;

D. S. Goldobin – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Head of Laboratory of underground sequestration of carbon in the Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS (1 Akademika Koroleva St., Perm, Russia, 614013), Associated Professor at Theoretical Physics Department at the Perm State University (15 Bukirev St., Perm, Russia, 614990), Author ID: 8368187600, ORCID: 0000-0002-4746-8386.