Научная статья
УДК 519.17
DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-29-34
https://elibrary.ru/amekjl

# Сильно регулярный граф с параметрами (1666, 105, 0, 7) не существует

**Вероника Игоревна Белоусова[1], Александр Алексеевич Махнев[2], Альбина Аниуаровна Токбаева[3]**

[1] Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
[2] Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия
[3] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия
[1]vkazarina@mail.ru
[2]makhnev@imm.uran.ru
[3]tok2506@mail.ru

**Аннотация.** Заметим, что недвудольный сильно регулярный граф без треугольников с $\mu = 7$ имеет параметры $k = 49s^2 + 49s + 7, s \in \{1, 2, 7\}$. В работе доказано, что двудольный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{105, 104, 98, 7, 1;\ 1, 7, 98, 104, 105\}$ не существует. Как следствие, сильно регулярный граф с параметрами (1666, 105, 0, 7) не существует.

**Ключевые слова:** граф; регулярный граф; сильно регулярный граф; дистанционно регулярный граф; числа пересечений.

**Для цитирования:** Белоусова В. И., Махнев А. А., Токбаева А. А. Сильно регулярный граф с параметрами (1666, 105, 0, 7) не существует // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 29–34. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-29-34. https://elibrary.ru/amekjl.

*Статья поступила в редакцию 26.01.2026; одобрена после рецензирования 06.03.2026; принята к публикации 20.03.2026.*

Research article

# A Strongly Regular Graph With Parameters (1666, 105, 0, 7) Does not Exist

**Veronika I. Belousova[1], Alexander A. Makhnev[2], Albina A. Tokbaeva[3]**

[1] Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia
[2] N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia
[3] Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik, Russia
[1]vkazarina@mail.ru
[2]makhnev@imm.uran.ru
[3]tok2506@mail.ru

**Abstract.** Note that a non-bipartite triangle-free strongly regular graph with $\mu = 7$ has parameters $k = 49s^2 + 49s + 7$, where $s \in \{1,2,7\}$. In this paper, it is proved that a bipartite distance-regular graph with intersection array $\{105, 104, 98, 7, 1;\ 1, 7, 98, 104, 105\}$ does not exist. Consequently, a strongly regular graph with parameters $(1666, 105, 0, 7)$ does not exist.

**Keywords:** *graph; regular graph; strongly regular graph; distance-regular graph; intersection numbers*.

**For citation:** Belousova, V. I., Makhnev, A. A. and Tokbaeva, A. A. (2026), "A Strongly Regular Graph With Parameters (1666, 105, 0, 7) Does not Exist", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 29–34, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-29-34, https://elibrary.ru/amekjl.

*The article was submitted 26.01.2026; approved after reviewing 06.03.2026; accepted for publication 20.03.2026.*

## Введение

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если $a, b$ – вершины графа Г, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между $a$ и $b$, а через $\Gamma_i(a)$ – подграф графа Г, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии $i$ в Г от вершины $a$. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* $a$ и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром $a$.

Граф Г называется *регулярным графом степени* $k$, если $[a]$ содержит точно $k$ вершин для любой вершины $a$ из Г. Граф Г называется *реберно регулярным графом с параметрами* $(v, k, \lambda)$, если Г содержит $v$ вершин, является регулярным степени $k$, и каждое ребро из Г лежит в $\lambda$ треугольниках. Граф Г называется *вполне регулярным графом с параметрами* $(v, k, \lambda, \mu)$, если Г реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит $\mu$ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем ($\mu$-) *$\lambda$-подграфом*.

Если вершины $u, w$ находятся на расстоянии $i$ в Г, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра $d$ называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i = b_i(u, w)$ и $c_i = c_i(u, w)$ не зависит от выбора вершин $u, w$ на расстоянии $i$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение $k_i$ не зависит от выбора вершины $u$). Числа пересечений графа $p^l_{ij}$ и параметры Крейна $q^l_{ij}$ определены в [1] (стр. 43 и 48 соответственно).

Особый интерес представляют сильно регулярные графы без треугольников. Такие графы обладают уникальными свойствами и связаны с классическими объектами комбинаторики, включая графы Мура диаметра 2. Недвудольный сильно регулярный граф без треугольников с $\mu = 7$ имеет степень $k = 49s^2 + 49s + 7$ для $s \in \{1,2,7\}$. Если $s = 1$, то граф имеет параметры (1666, 105, 0, 7) Если $s = 2$, то граф имеет параметры (13202, 301, 0, 7), а если $s = 7$, то граф имеет параметры (1083502, 2751, 0, 7). Исследованию допустимости параметров для сильно регулярных графов без треугольников посвящены работы Биггса [2], в которых уточняются условия существования таких графов и развиваются методы проверки их реализуемости.

Заметим, что сильно регулярный граф с параметрами (1666, 105, 0, 7) существует тогда и только тогда, когда существует его двудольное удвоение (дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{105,104,98,7,1; 1,7,98,104,105\}$). Связь между сильно регулярными графами и их двудольными удвоениями подробно обсуждается в монографии [1], где рассматриваются конструкции двудольных удвоений и их свойства.

**Теорема 1**. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{105,104,98,7,1; 1,7,98,104,105\}$ *не существует.*

**Теорема 2**. *Сильно регулярный граф с параметрами* $(1666, 105, 0, 7)$ *не существует.*

Доказательство этих теорем основано на современных методах теории дистанционно регулярных графов, включая анализ тройных чисел пересечений, как это продемонстрировано, например, в работе [3] для графов с похожими параметрами.

## 1. Тройные числа пересечений

В доказательстве теорем используются тройные числа пересечений. Метод тройных чисел пересечений, развитый в работах [4–6], является эффективным инструментом для доказательства несуществования дистанционно регулярных графов с заданными массивами пересечений.

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра $d$.

Если $u_1, u_2, u_3$ – вершины графа Γ, $r_1, r_2, r_3$ – неотрицательные целые числа, не большие $d$, то $\left\{\begin{matrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{matrix}\right\}$ – множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что

$$d(w, u_i) = r_i, \begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix} = \left|\left\{\begin{matrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{matrix}\right\}\right|.$$

Числа $\begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix}$ называются *тройными числами пересечений*. Для фиксированной тройки вершин $u_1, u_2, u_3$ вместо $\begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix}$ будем писать $[r_1r_2r_3]$.

Пусть $u, v, w$ – вершины графа Γ, $W = d(u, v), U = d(v, w), V = d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x, u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$, где $\delta$ – символ Кронекера.

Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$, и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим:

$$\textstyle\sum_{l=1}^{d}[ljh] = p_{jh}^{U} - [0jh], \sum_{l=1}^{d}[ilh] = p_{ih}^{V} - [i0h], \sum_{l=1}^{d}[ijl] = p_{ij}^{W} - [ij0], \qquad (1).$$

При этом некоторые тройки исчезают.

При $|i - j| > W$ или $i + j < W$ имеем $p_{ij}^{W} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, \dots, d\}$. В работе [4], посвященной исследованию экстремальных 1-кодов в дистанционно регулярных графах диаметра 3, система уравнений (1) в сочетании с условиями симметрии применяется для существенного сокращения перебора возможных конфигураций троек вершин и получения целочисленных решений для тройных чисел пересечений.

Положим $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$. Если параметр Крейна $q_{ij}^{h} = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$. Использование параметров Крейна для получения линейных соотношений между тройными числами пересечений было предложено в работе Кулсета и Юришича [4], где авторы применили равенство в условиях Крейна для доказательства несуществования определенных дистанционно регулярных графов.

Зафиксируем вершины $u, v, w$ дистанционно регулярного графа Γ и положим

$$\{ijh\} = \left\{ {uvw \atop ijh} \right\},$$
$$[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix},$$
$$[ijh]' = \begin{bmatrix} uvw \\ ihj \end{bmatrix},$$
$$[ijh]^* = \begin{bmatrix} uvw \\ jih \end{bmatrix},$$
$$[ijh]^\sim = \begin{bmatrix} uvw \\ hji \end{bmatrix}.$$

Вычисление параметров $[ijh]'$, $[ijh]^*$ и $[ijh]^\sim$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

Для нахождения тройных чисел в статье использовался пакет sage-drg, примененный в статье [5].

## 2. Свойства графа с массивом пересечений {105,104,98,7,1;1,7,98,104,105}

В этом разделе Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{105{,}104{,}98{,}7{,}1; 1{,}7{,}98{,}104{,}105\}$. Антиподальное частное графа Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(1666, 105, 0, 7)$. Далее, Γ имеет $1 + 105 + 1560 + 1560 + 105 + 1 = 3332$ вершины, спектр $105^1, 14^{560}, 7^{1105}, -7^{1105}, -14^{560}, -105^1$ и дуальную матрицу собственных значений:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 560 & 1105 & 1105 & 560 & 1 \\ 1 & \frac{224}{3} & \frac{221}{3} & -\frac{221}{3} & -\frac{224}{3} & -1 \\ 1 & \frac{14}{3} & -\frac{17}{3} & -\frac{17}{3} & \frac{14}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{14}{3} & -\frac{17}{3} & \frac{17}{3} & \frac{14}{3} & -1 \\ 1 & -\frac{224}{3} & \frac{221}{3} & \frac{221}{3} & -\frac{224}{3} & 1 \\ 1 & -560 & 1105 & -1105 & 560 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Лемма 1**. *Числа пересечений графа* Γ *равны:*

$p_{11}^1 = 0$, $p_{12}^1 = 104$, $p_{23}^1 = 1456$, $p_{34}^1 = 104$, $p_{45}^1 = 1$,
$p_{11}^2 = 7$, $p_{12}^2 = 0$, $p_{13}^2 = 98$, $p_{22}^2 = 1461$, $p_{24}^2 = 98$, $p_{33}^2 = 543$, $p_{35}^2 = 1$, $p_{44}^2 = 7$,
$p_{12}^3 = 98$, $p_{23}^3 = 1461$, $p_{34}^3 = 98$, $p_{25}^3 = 1$,
$p_{13}^4 = 104$, $p_{15}^4 = 1$, $p_{22}^4 = 1456$, $p_{15}^4 = 1$, $p_{24}^4 = 104$, $p_{33}^4 = 1456$,
$p_{14}^5 = 105$, $p_{23}^5 = 1560$.

*Доказательство.* Прямые вычисления. □

Пусть $u, v, w$ – вершины графа Γ, $\{ijl\} = \left\{ {uvw \atop ijl} \right\}$, $[ijl] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijl \end{bmatrix}$. Положим $\Sigma = \Gamma_2(u)$, $\Lambda = \Sigma_2$. Тогда Λ – регулярный граф степени $p_{22}^2 = 1461$ на $k_2 = 1560$ вершинах.

**Лемма 2**. *Пусть* $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 4$. *Тогда тройные числа пересечений равны:*

$[113] = [131] = 7$, $[133] = 91$;
$[222] = 1364$, $[224] = [242] = 97$;
$[313] = [331] = 97$, $[333] = 1364$, $[315] = [351] = 1$;
$[422] = 91$, $[424] = [442] = 7$;

$[533] = 1$.

*Доказательство.* Упрощение формул из предыдущего раздела. □

Для числа ребер $d$ между $\Lambda(v)$ и $\Lambda - (\{v\} \cup \Lambda(v))$ в графе $\Lambda$ верно равенство $d = 1364 \cdot 104 = 141856$.

С другой стороны, $d = 1461(1460 - \lambda)$, где $\lambda$ – среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$. Поэтому $1460 - \lambda = 97.095$ и $\lambda = 1362.905$.

**Лемма 3**. *Пусть* $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$. *Тогда тройные числа пересечений равны:*

$[111] = -r_1 + 7$, $[113] = [131] = r_1$, $[133] = -r_1 + 98$;

$[222] = r_1 + 1362$, $[224] = [242] = -r_1 + 98$, $[244] = r_1$;

$[311] = r_1$, $[313] = [331] = -r_1 + 98$, $[333] = r_1 + 1362$, $[335] = [353] = 1$;

$[422] = -r_1 + 98$, $[424] = [442] = r_1$, $[444] = -r_1 + 7$;

$[533] = 1$,

*где* $0 \le r_1 \le 7$.

*Доказательство.* Упрощение формул из предыдущего раздела. □

По лемме 3 имеем $1362 \le [222] = r_1 + 1362 \le 1369$.

Пусть $d(u, v) = 2$. Подсчитаем число $f_4$ пар вершин $y, z$ на расстоянии 4 в графе Г, где $y \in \begin{Bmatrix} uv \\ 24 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} uv \\ 22 \end{Bmatrix}$. С одной стороны, по лемме 2 имеем $[224] = 97$, поэтому $f_4 = 98 \cdot 97 = 9506$. С другой стороны, по лемме 3 имеем $[244] = r_1$, поэтому $9506 = f_4 = \sum_i r_1^i$ и $\sum_i r_1^i / 1560 = 6.09$.

Противоречие с тем, что $\lambda = 1362.905 = \sum_i [222]^i / 1560 = \sum_i r_1^i / 1560 + 1362 = 1368.09$.

Теорема 1 доказана.

### Список источников


1. *Distance-Regular* Graphs / Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 485 p. DOI: 10.1007/978-3-642-74341-2.
2. *Biggs N.* Families of parameters for SRNT graphs // Preprint arXiv:0911.2455. 2009. DOI: 10.48550/arXiv.0911.2455. URL: arxiv.org (дата обращения: 05.03.2024).
3. *Makhnev A. A., Bitkina V. V., Gutnova A. K.* Distance-Regular Graphs with Intersection Arrays {7,6,6;1,1,2} and {42,30,2;1,10,36} Do not Exist // Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal. 2021. Vol. 23, iss. 3. P. 68–76. DOI: 10.46698/y2738-1800-0363-i.
4. *Coolsaet K., Jurišić A.* Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // Journal of Combinatorial Theory. Series A. 2008. Vol. 115, iss. 6. P. 1086–1095. DOI: 10.1016/j.jcta.2007.12.001.
5. *Vidali J.* Using triple intersection numbers to prove non-existence of distance-regular graphs // Electronic Journal of Combinatorics. 2018. Vol. 25, iss. 4. Paper № P4.21. DOI: 10.37236/7763.
6. *Urlep M.* Triple intersection numbers of Q-polynomial distance-regular graphs // European Journal of Combinatorics. 2012. Vol. 33, iss. 6. P. 1246–1252. DOI: 10.1016/j.ejc.2012.02.005.


### References


1. Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A. (1989), *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin, doi: 10.1007/978-3-642-74341-2.
2. Biggs, N. (2009), "Families of parameters for SRNT graphs", *arXiv preprint arXiv:0911.2455*, doi: 10.48550/arXiv.0911.2455, URL: arxiv.org (accessed: 05.03.2024).

3. Makhnev, A. A., Bitkina, V. V. and Gutnova, A. K. (2021), "Distance-Regular Graphs with Intersection Arrays {7,6,6;1,1,2} and {42,30,2;1,10,36} Do not Exist", *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, 23(3), pp. 68–76, doi: 10.46698/y2738-1800-0363-i.
4. Coolsaet, K. and Jurišić, A. (2008), "Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs", *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 115(6), pp. 1086–1095, doi: 10.1016/j.jcta.2007.12.001.
5. Vidali, J. (2018), "Using triple intersection numbers to prove non-existence of distance-regular graphs", *Electronic Journal of Combinatorics*, 25(4), P4.21, doi: 10.37236/7763.
6. Urlep, M. (2012), "Triple intersection numbers of Q-polynomial distance-regular graphs", *European Journal of Combinatorics*, 33(6), pp. 1246–1252, doi: 10.1016/j.ejc.2012.02.005.

**Информация об авторах**:
В. И. Белоусова – кандидат физико-математических наук; доцент Уральского федерального университета первого Президента России Б. Н. Ельцина (620062, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19), AuthorID: 160714;
А. А. Махнев – член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник Института математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН (620077, Россия, г. Екатеринбург, Бокс № 82, ул. С. Ковалевской, 16), AuthorID: 2970;
А. А. Токбаева – кандидат физико-математических наук; доцент Кабардино-Балкарского университета им. Х. М. Бербекова (360004, Россия, г. Нальчик, ул. Чернышевского, № 173), AuthorID: 885243.

**Information about the authors**:
V. I. Belousova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin (19 Mira Street, Yekaterinburg, Russia, 620062), AuthorID: 160714;
A. A. Makhnev – Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Chief Researcher, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (16 S. Kovalevskaya Street, P.O. Box 82, Yekaterinburg, Russia, 620077), AuthorID: 2970;
A. A. Tokbaeva – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov (173 Chernyshevskogo Street, Nalchik, Russia, 360004), AuthorID: 885243.