Научная статья

УДК 512.55

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-35-42

https://elibrary.ru/uugmzp

О пирсовских слоях полуколец с нормальной инволюцией

Никита Сергеевич Протасов
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, Сыктывкар, Россия
protasownikita@yandex.ru

Аннотация. В работе исследуется связь локальных и глобальных условий (полу)нормальности инволюций в $*$-полукольцах. Под нормальной инволюцией понимается такая инволюция, при которой из равенства $aa^* = 0$ следует $a = 0$; полунормальная инволюция определяется более слабым условием: $aSa^* = 0$ влечет $a = 0$. Установлено, что в риккартовых $*$-полукольцах любая инволюция является нормальной, а в pq-бэровских – полунормальной. Доказано, что при наличии полунормальной инволюции множество центральных дополняемых идемпотентов совпадает с множеством центральных проекций, что может быть использовано при изучении пирсовского пучка $*$-полуколец. Основной результат работы – доказательство следующих результатов: 1) инволюция в $*$-полукольце S является нормальной тогда и только тогда, когда она нормальна во всех слоях пирсовского пучка $*$-полукольца S; 2) инволюция в $*$-полукольце S, булева алгебра центральных проекций которого конечна, является полунормальной тогда и только тогда, когда она полунормальна во всех слоях пирсовского пучка $*$-полукольца S.

Ключевые слова: *$*$-полукольцо; полукольцо с инволюцией; нормальная инволюция; полунормальная инволюция; риккартово полукольцо с инволюцией; pq-бэровское полукольцо с инволюцией; проекция; булева алгебра центральных проекций; пирсовский пучок; самосопряженный элемент.*

Для цитирования: Протасов Н. С. О пирсовских слоях полуколец с нормальной инволюцией // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 35–42. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-35-42. https://elibrary.ru/uugmzp.

Статья поступила в редакцию 09.11.2025; одобрена после рецензирования 20.02.2026; принята к публикации 20.03.2026.

Research article

On the Pierce Stalks of Semirings With Proper Involution

Nikita S. Protasov
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia
protasownikita@yandex.ru

Abstract. In this paper, we study the relationship between local and global conditions for proper and semiproper involutions in $*$-semirings. An involution is said to be proper if $aa^* = 0$ implies $a = 0$. A semiproper involution is defined by a weaker condition: $aSa^* = 0$ implies

$a = 0$. It is established that in Rickart (pq-Baer) $*$-semirings any involution is proper (semiproper). It is proved that in the presence of a semiproper involution, the set of all central complemented idempotents coincides with the set of all central projections, which can be used in the study of the Pierce sheaf of $*$-semirings. The main result of the paper is the proof of the following results: 1) an involution in a $*$-semiring S is proper if and only if it is proper in all stalks of the Pierce sheaf of $*$-semiring S; 2) an involution in a $*$-semiring S whose Boolean algebra of central projections is finite is semiproper if and only if it is semiproper in all stalks of the Pierce sheaf of $*$-semiring S.

Keywords: *$*$-semiring; semiring with involution; proper involution; semiproper involution; Rickart semiring with involution; pq-Baer semiring with involution; projection; Boolean algebra of central projections; Pierce sheaf; selfadjoint element.*

For citation: Protasov, N. S. (2026), "On the Pierce Stalks of Semirings With Proper Involution", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 35–42, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-35-42, https://elibrary.ru/uugmzp.

The article was submitted 09.11.2025; approved after reviewing 20.02.2026; accepted for publication 20.03.2026.

Введение

Следуя Дж. Голану [1], под *полукольцом* нами понимается алгебраическая структура $< S, +, \cdot >$, если $< S, + >$ – коммутативная полугруппа, $< S, \cdot >$ – полугруппа, операция умножения дистрибутивна относительно сложения с обеих сторон. В статье мы рассматриваем полукольца с аддитивным нулем 0, причем $0s = 0 = s0$ для любого $s \in S$, и единицей 1.

Пусть $e \in S$. Элемент $e^{\perp}$ называется *дополнением* к e, если $e + e^{\perp} = 1$ и $e \cdot e^{\perp} = e^{\perp} \cdot e = 0$. Множество всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца S обозначается через BS. Если положить $e \oplus f = e^{\perp} f + e f^{\perp}$, то $< BS, \oplus, \cdot >$ становится булевым кольцом. Если же положить $e \vee f = e f^{\perp} + f = e^{\perp} f + e$ и $e \wedge f = ef$, то получим булеву решетку $< BS, \vee, \wedge >$.

Определение 1. Полукольцо S называется *$*$-полукольцом* (или *полукольцом с инволюцией*), если существует антиавтоморфизм $*: a \mapsto a^*$ полукольца S:

$$a^{**} = a,\ (a + b)^* = a^* + b^*,\ (ab)^* = b^* a^*.$$

Далее S – произвольное $*$-полукольцо.

Определение 2. Дополняемый идемпотент $e \in S$ называется *проекцией*, если $e = e^*$; множество всех проекций $*$-полукольца S обозначим через $\tilde{S}$.

Образ элемента $a \in S$ относительно инволюции $*$ будем называть *сопряжением* элемента a.

Элемент $a \in S$ называется *самосопряженным*, если он совпадает со своим сопряжением, то есть если $a^* = a$. Элементы $a, b \in S$ называются *ортогональными*, если $ab = ba = 0$.

Очевидно, 0 и 1 являются проекциями, а произведение самосопряженных элементов является самосопряженным в точности тогда, когда элементы коммутируют.

Укажем далее некоторые примеры $*$-полуколец.

Пример 1. Любое коммутативное полукольцо является $*$-полукольцом с инволюцией $*$ такой, что $a^* = a$ (тождественная инволюция) для любого элемента полукольца.

Пример 2. Полукольцо матриц над произвольным коммутативным полукольцом является $*$-полукольцом, в котором под инволюцией понимается операция транспонирования.

Пример 3. Поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел с обычными операциями сложения и умножения, в котором в качестве инволюции выступает операция комплексного сопряжения.

В частных случаях инволюция обладает тем свойством, что условие $aa^* = 0$ влечет $a = 0$.

Действительно, в условиях примера 1 рассмотрим полукольцо натуральных чисел. Тогда условие $aa^* = 0$ означает $a^2 = 0$, а значит $a = 0$.

В условиях примера 3 условие $z \cdot \bar{z} = 0$ для данного числа $z = a + bi$ означает $(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = 0$, откуда получим, что $a = b = 0$.

В условиях примера 2 рассмотрим полукольцо матриц над полукольцом натуральных чисел. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AA^T = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + \cdots + a_{1n}^2 & \cdots & a_{11} \cdot a_{n1} + \cdots + a_{1n} \cdot a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \cdot a_{11} + \cdots + a_{nn} \cdot a_{1n} & \cdots & a_{n1}^2 + \cdots + a_{nn}^2 \end{pmatrix}.$$

Согласно условию, $AA^T = 0$, что означает, в частности, что элементы указанной матрицы, стоящие на главной диагонали, равны нулю. Следовательно, $b_{ii} = a_{i1}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 0$, откуда получим, что все элементы i-ой строки исходной матрицы равны нулю, поэтому нулевой окажется и матрица A.

Определение 3 [2]. Если в полукольце S с инволюцией $*$ выполняется импликация $aa^* = 0 \Rightarrow a = 0$, то инволюция $*$ называется *нормальной* (*proper*).

Основываясь лишь на приведенном определении, можно заключить, что если в полукольце нет делителей нуля, то любая инволюция в нем является нормальной. Действительно, пусть в полукольце S без делителей нуля задана инволюция $*$ и пусть для некоторого $a \in S$ выполнено $aa^* = 0$. Тогда ввиду отсутствия делителей нуля можно заключить, что $a = 0$ или $a^* = 0$. Во втором случае, действуя инволюцией на указанное равенство, получим требуемое условие, а значит $*$ – нормальная инволюция.

Исходя из этого, можно получить пример $*$-полукольца, в котором инволюция не является нормальной. Действительно, рассмотрим $*$-полукольцо $\mathbb{N}[x]/(x^2)$ с тривиальной инволюцией – факторполукольцо полукольца $\mathbb{N}[x]$ по конгруэнции, при которой сравнимыми являются многочлены, имеющие равные коэффициенты при первой и нулевой степени переменной x. Для ненулевого элемента x указанного полукольца верно, что $xx^* = x^2 = 0$, а значит указанная импликация не выполняется.

Однако это не означает, что нормальность инволюции влечет за собой отсутствие делителей нуля в полукольце. Достаточно рассмотреть полукольцо матриц с транспонированием над множеством натуральных чисел. При этом, например, матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ является делителем нуля, так как $A^2 = 0$.

Таким образом, условие нормальности инволюции позволяет гарантировать, что в $*$-полукольце отсутствуют ненулевые самосопряженные нильпотентные элементы (определяются так же, как и для колец). Предположим, что в полукольце S с нормальной инволюцией нашелся нильпотентный самосопряженный элемент a, отличный от нуля. Тогда для некоторого n верно, что $a^n = 0$. Предположим, что $n = 2k$, тогда $a^n = a^k \cdot a^k = a^k \cdot (a^k)^* = 0$, что влечет $a^k = 0$, противоречие. Предположим, что $n = 2k + 1$, тогда рассмотрим $b = a^{k+1}$. Заметим, что $b^* = b$. Тогда $bb^* = b^2 = a^{n+1} = a^n a = 0a = 0$, откуда, согласно тому, что $*$ является нормальной, получим $b = 0$. Следовательно, $a^{k+1} = 0$ для $k + 1 < 2k + 1$, противоречие.

Определение 4 [3]. Если в полукольце S с инволюцией $*$ выполняется импликация $aSa^* = 0 \Rightarrow a = 0$, то инволюция $*$ называется *полунормальной* (*semiproper*).

Отметим также, что если в полукольце S задана полунормальная инволюция $*$, то $xSx = 0$ влечет $x = 0$. Пусть $xSx = 0$. Тогда $xsx^*Sxs^*x^* = xsx^*S(xsx^*)^* = 0$ для любого $s \in S$. Следовательно, в силу полунормальности инволюции $*$ получим, что $xSx^* = 0$, а значит $x = 0$.

Определение 5. Полукольцо S называется *коммутативным в нуле*, если в нем выполняется импликация $ab = 0 \Rightarrow ba = 0$.

Утверждение 1. *В полукольце S любая нормальная инволюция является полунормальной. В коммутативных в нуле полукольцах указанные понятия совпадают.*

Доказательство. Пусть в полукольце S задана нормальная инволюция $*$. Предположим, что для некоторого элемента $a \in S$ верно, что $aSa^* = 0$. Тогда, в частности, при $s = a^*a$ получим, что $0 = aa^*aa^* = (aa^*)(aa^*)^*$ откуда, в силу нормальности инволюции, можем заключить, что $aa^* = 0$, а значит и $a = 0$.

Покажем вторую часть утверждения. Пусть в коммутативном в нуле полукольце S задана полунормальная инволюция $*$. Пусть нашелся такой элемент $a \in S$, что $aa^* = 0$. Тогда для любого $s \in S$ верно, что $0 = 0s = aa^*s = a(a^*s) = (a^*s)a = a^*s(a^*)^*$. Следовательно, $a^*S(a^*)^* = 0$, откуда, в силу полунормальности инволюции, можно заключить, что $a^* = 0$, а значит и $a = 0$.

Для рассмотрения менее очевидных примеров полуколец с (полу)нормальной инволюцией $*$ введем следующие определения.

Определение 6. Полукольцо S с инволюцией называется *риккартовым* (*pq-бэровским*) $*$-полукольцом, если для любого $a \in S$ найдется такая проекция $e \in S$, что $\mathrm{ann_r}(a) = eS$ ($\mathrm{ann_r}(aS) = eS$).

Через $\mathrm{ann_r}(a)$ обозначен правый аннулятор элемента a, то есть множество таких элементов $s \in S$, что $as = 0$. Через $\mathrm{ann_r}(aS)$ обозначен правый аннулятор главного правого идеала, порожденного элементом a, то есть множество элементов $t \in S$ таких, что для любого $s \in S$ выполняется условие $ast = 0$.

Утверждение 2. *Любая инволюция в риккартовом полукольце является нормальной.*

Доказательство. Пусть в риккартовом полукольце задана инволюция $*$ и пусть для некоторого элемента $a \in S$ выполнено условие $aa^* = 0$. Тогда $a^* \in \mathrm{ann_r}(a) = eS$, а значит $a^* = ea^*$. Действуя инволюцией на указанное равенство, получим $a = ae$. Согласно определению, $e \in \mathrm{ann_r}(a)$, а значит $a = ae = 0$.

Аналогично можно установить, что верно и следующее.

Утверждение 3. *Любая инволюция, заданная в pq-бэровском полукольце, является полунормальной.*

Доказательство. Пусть в pq-бэровском полукольце задана инволюция $*$ и пусть для некоторого элемента $a \in S$ выполнено условие $aSa^* = 0$. Тогда $a^* \in \mathrm{ann_r}(aS) = eS$, а значит $a^* = ea^*$. Действуя инволюцией на указанное равенство, получим $a = ae$. Согласно определению, $e \in \mathrm{ann_r}(aS)$, а значит $a = ae = 0$.

Отметим также, что в [4] установлено, что для произвольного полукольца S с инволюцией возникают упорядоченное множество всех проекций $\tilde{S}$ и две булевы решетки – всех центральных дополняемых идемпотентов BS и всех центральных проекций B^*S соответственно. Понятно, что указанные булевы решетки связаны равенством $B^*S = BS \cap \tilde{S}$ в любом полукольце с заданной инволюцией $*$. В случае полуколец с (полу)нормальной инволюцией строение указанных решеток можно уточнить, о чем говорит следующее

Утверждение 4. *Если в полукольце S задана (полу)нормальная инволюция $*$, то множества BS и B^*S совпадают.*

Доказательство. Очевидно, что $B^*S \subseteq BS$, поэтому достаточно показать лишь обратное включение. Учитывая утверждение 1, проведем доказательство лишь для случая, если в полукольце задана полунормальная инволюция. Выберем для этого произвольный центральный дополняемый идемпотент $e \in BS$, рассмотрим элемент $h = e(e^{\perp})^*$ и сопряженный с ним элемент $h^* = e^*e^{\perp}$. Пользуясь условием дополняемости элемента e, нетрудно показать, что $(e^{\perp})^* = (e^*)^{\perp}$. Тогда $hSh^* = e(e^{\perp})^*Se^*e^{\perp} = e(e^*)^{\perp}Se^*e^{\perp} = ee^{\perp}Se^*(e^*)^{\perp} = 0 \cdot S \cdot 0 = 0$. Изменение порядка множителей в третьем равенстве допустимо согласно условию центральности элемента e. Поскольку инволюция является полунормальной, получим $h = 0$, следовательно, и $h^* = 0$. Таким образом, $e^* = e^*(e + e^{\perp}) = e^*e + e^*e^{\perp} = e^*e$. Действуя инволюцией на полученное равенство, имеем $e = (e^*e)^* = e^*e = e^*$, а значит e – самосопряженный элемент.

Как следствие, укажем, что в риккартовых и pq-бэровских $*$-полукольцах любой центральный дополняемый идемпотент является центральной проекцией.

Обратное утверждение при этом неверно. Рассмотрим трехэлементное полукольцо, где $0 < a < 1$, сложение – выбор максимального элемента с нейтральным элементом 0. Коммутативное умножение имеет поглощающий элемент 0, нейтральный элемент 1, элемент a – нильпотентный элемент индекса 2. Зададим в полукольце S тривиальную инволюцию. Поскольку $aa^* = aa = 0$ при $a \neq 0$, а в силу коммутативности умножения, можно заключить, что $0 = 0S = aaS = aSa = aSa^*$ при $a \neq 0$, получим пример инволюции, которая не является ни нормальной, ни полунормальной. Однако в указанном полукольце множества центральных дополняемых идемпотентов и центральных проекций совпадают.

Центральные проекции в теории $*$-полуколец являются удобным инструментом для построения фактор-полуколец, инволюция в которых сохраняется. Обозначим через $\mathrm{Max}\,BS$ множество максимальных идеалов булева кольца BS. Для любого $M \in \mathrm{Max}\,BS$ определим конгруэнцию θ_M:

$$a \equiv b \ (\mathrm{mod}\,\theta_M) \Leftrightarrow ae = be \text{ для некоторого } e \in BS \setminus M.$$

Действуя инволюцией на указанное равенство, получим, что $a^*e^* = b^*e^*$. Следовательно, элементы, сопряженные с a и b, эквивалентны по модулю указанной конгруэнции лишь в случае, если максимальный идеал M замкнут относительно инволюции. Это выполняется, в частности, когда $BS = B^*S$. Будем называть конгруэнцию θ, для которой выполняется импликация $a\theta b \Rightarrow a^*\theta b^*$, конгруэнцией, *устойчивой относительно инволюции* $*$ (*$*$-конгруэнцией*). Фактор-полукольцо по $*$-конгруэнции будем называть *фактор-$*$-полукольцом*. Для каждого $M \in \mathrm{Max}\, BS$ полукольцо S/θ_M называется *пирсовским слоем* [5]. Заметим, что в $*$-полукольцах с (полу)нормальной инволюцией любая конгруэнция, согласно утверждению 5, устойчива относительно инволюции, а значит любой пирсовский слой является $*$-полукольцом.

Определение 7. Тройка (Π, π, X) называется *пучком $*$-полуколец*, если выполняются следующие условия:

1) Π, X – топологические пространства;

2) $\pi\colon \Pi \to X$ – локальный гомеоморфизм;

3) для любого $x \in X$ $\Pi_x = \pi^{-1}(x)$ – полукольцо с инволюцией;

4) сложение, умножение и инволюция, определенные поточечно, непрерывны;

5) отображения, сопоставляющие каждому $x \in X$ нуль и единицу из Π_x, непрерывны.

Пространства Π и X, указанные в определении, называются *накрывающим* и *базисным* соответственно, $*$-полукольца Π_x называются *слоями*. Непрерывное отображение $f\colon X \to \Pi$, определенное на всем базисном пространстве, и такое, что $f(x) \in \Pi_x$ для любого $x \in X$, называется *глобальным сечением*.

Пусть базисным пространством пучка является $\mathrm{Max}\, B^*S$, а накрывающим – дизъюнктное объединение фактор-$*$-полуколец S/θ_M, где $M \in \mathrm{Max}\, B^*S$. Такой пучок $*$-полуколец называется *пирсовским пучком $*$-полуколец* [5]. В указанной работе установлено, что любое $*$-полукольцо $*$-изоморфно $*$-полукольцу глобальных сечений своего пирсовского пучка.

Нормальность инволюции может быть охарактеризована соответствующими свойствами инволюции в пирсовских слоях, о чем говорит следующая

Теорема 1. *Инволюция в полукольце S является нормальной тогда и только тогда, когда она является нормальной в каждом пирсовском слое.*

Доказательство. Докажем прямую импликацию. Пусть S – полукольцо с нормальной инволюцией. Пусть для некоторого максимального идеала $M \in \mathrm{Max}\, B^*S$ и некоторого $a_M \in S/\theta_M$ верно, что $a_M a_M^* = 0$. Это означает, что для некоторого $e \in B^*S \setminus M$ выполнено $aa^*e = 0$. Тогда $0 = aa^*e = aa^*ee = (ae)(ae)^*$. Поскольку инволюция $*$ является нормальной, получим, что $ae = 0$, а значит $a_M = 0$. Прямая импликация установлена.

Обратно, пусть все пирсовские слои $*$-полукольца S являются полукольцами с нормальной инволюцией. Рассмотрим $s \in S$ такой, что $ss^* = 0$. Поскольку $*$-полукольцо S $*$-изоморфно $*$-полукольцу глобальных сечений своего пирсовского пучка, указанному элементу соответствует глобальное сечение $\hat{s} \in \Gamma$, для которого выполняется $\hat{s} \cdot (\hat{s})^* = 0$. Отметим, что $\hat{s}(M) = s_M$ для любой точки M базисного пространства $\mathrm{Max}\, B^*S$. Также укажем, что инволюция в $*$-полукольце глобальных сечений определена поточечно, поэтому $\left(\hat{s}(M)\right)^* = \widehat{s^*}(M) = s_M^*$. Тогда, для любого $M \in \mathrm{Max}\, B^*S$ верно, что $\hat{s}(M) \cdot \left(\hat{s}(M)\right)^* = \hat{s}(M) \cdot \widehat{s^*}(M) = s_M \cdot s_M^* = 0$, откуда, в силу нормальности инволюции в пирсовских слоях, получим $s_M = \hat{s}(M) = 0$. Следовательно, глобальное сечение $\hat{s}$ совпадает с нулевым сечением в каждой точке, а значит $s = 0$, поэтому инволюция в S является нормальной. Теорема доказана.

Попытки установить похожую взаимосвязь для полунормальной инволюции приводят к дополнительным ограничениям на структуру булевой алгебры центральных проекций.

Теорема 2. *Рассмотрим следующие условия для инволюции* $*$*:*

1) *инволюция* $*$ *является полунормальной в* S*;*
2) *инволюция* $*$ *является полунормальной в каждом пирсовском слое* $*$*-полукольца* S.

Тогда импликация $2) \Rightarrow 1)$ *выполняется всегда, выполнение импликации* $1) \Rightarrow 2)$ *возможно в случае, когда булева алгебра* B^*S *конечна.*

Доказательство. Покажем выполнение импликации $2) \Rightarrow 1)$. Пусть для любого $M \in \operatorname{Max} BS$ инволюция $*$ в полукольце S/θ_M является полунормальной. Рассмотрим $a \in S$ такой, что $aSa^* = 0$. Указанному элементу соответствует глобальное сечение $\hat{a} \in \Gamma$ такое, что $\hat{a}\Gamma(\hat{a})^* = 0$. Тогда $a_M S/\theta_M a_M^* = 0$, в силу полунормальности инволюции в пирсовских слоях, получим, что $a_M = 0$ для любого $M \in \operatorname{Max} B^*S$. Следовательно, $\hat{a} = 0$, а значит и $a = 0$. Обратная импликация показана.

Покажем выполнение импликации $1) \Rightarrow 2)$ при условии конечности булевой алгебры B^*S. Предположим, что для некоторого $M \in \operatorname{Max} B^*S$ нашелся такой $a_M \in S/\theta_M$, что $a_M \cdot (S/\theta_M) \cdot a_M^* = 0$ при $a_M \neq 0$. Тогда для любого $s \in S$ найдется такая центральная проекция $e_s \in B^*S \setminus M$, что $asa^*e_s = 0$. Рассмотрим произвольный атом $f \in B^*S \setminus M$. Такой существует, поскольку M – собственный идеал решетки B^*S. Для любого $s \in S$ проекция $e_s^\perp$ лежит в M, и $fe_s^\perp = 0$. Заметим, что $asa^* = asa^*e_s^\perp$, поэтому $asa^*f = 0$. Получаем $(af)s(af)^* = 0$ для любого $s \in S$, откуда $af = 0$ и $a_M = 0$. Следовательно, прямая импликация выполняется. Теорема доказана.

Полученные в работе результаты естественным образом порождают ряд вопросов, требующих дальнейшего исследования. При доказательстве импликации $1) \Rightarrow 2)$ требуется локализовать элемент $a \in S$ в отдельных слоях пирсовского пучка. Конечность булевой алгебры – достаточно сильное условие, открытым остается вопрос, можно ли ослабить предложенное условие? Можно ли охарактеризовать все полукольца, в которых любая инволюция (полу)нормальна? Являются ли риккартовы (pq-бэровские) полукольца с инволюцией максимальным таким классом?

Автор искренне благодарит научного руководителя, доктора физико-математических наук Чермных В. В., за постановку задачи, внимание к работе, конструктивные замечания при выполнении исследования.

Список источников

1. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ,1999. XII, 382 p. doi: 10.1007/978-94-015-9333-5
2. *Sterling K.* Berberian Baer *-Rings. Heidelberg: Springer Berlin. Publ, 1972. XIII, 301 p. doi: 10.1007/978-3-642-15071-5.
3. *Birkenmeier G.F., Park J.K., Rizvi S.T.* A Theory of Hulls for Rings and Modules // In: Albu, T., Birkenmeier, G.F., Erdoğgan, A., Tercan, A. (eds) Ring and Module Theory. Trends in Mathematics. Springer, Basel. 2010. doi: 10.1007/978-3-0346-0007-1_2

4. *Протасов Н. С., Чермных В. В.* О пучковом представлении pq-бэровского полукольца с инволюцией // Тр. ИММ УрО РАН. 2024. Т. 30, № 1. С. 190–202. DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-190-202.
5. *Марков Р. В.* Пирсовское представление полуколец с инволюцией // Изв. вузов. Матем. 2014. № 4. С. 18–24. DOI: 10.3103/S1066369X14040033.

References

1. Golan, J. S. (1999), *Semirings and their applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, xii, 382 p., doi: 10.1007/978-94-015-9333-5.
2. Sterling, K. (1972), *Berberian Baer *-rings, Springer Berlin*, Heidelberg, xiii, 301 p. doi: 10.1007/978-3-642-15071-5.
3. Birkenmeier, G. F., Park, J. K. and Rizvi, S. T. (2010), "A theory of hulls for rings and modules", in Albu, T., Birkenmeier, G. F., Erdoğan, A. and Tercan, A. (eds), Ring and module theory. Trends in mathematics, Springer, Basel, doi: 10.1007/978-3-0346-0007-1_2.
4. Protasov, N. S. and Chermnykh, V. V. (2024), "O puchkovom predstavlenii pq-berovskogo polukol'tsa s involyutsiey" [On the sheaf representation of a pq-Baer semiring with involution], *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences], vol. 30, no 1, pp. 190–202, doi: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-190-202.
5. Markov, R. V. (2014), "Pirsovskoe predstavlenie polukoltsev s involyutsiey' [Pirs representation of semirings with involution], *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika* [Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)], no 4, pp. 18–24, doi: 10.3103/S1066369X14040033.

Информация об авторе:
Н. С. Протасов – преподаватель кафедры физико-математического и информационного образования Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина (167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр-т, д. 55).

Information about the author:
N. S. Protasov – lecturer at the department of physico-mathematical and information education, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University (55 Oktyabrsky prospect, Syktyvkar, Russia, 167001).