Научная статья
УДК 517.5
DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-43-50
https://elibrary.ru/swhmjy

Оценка оператора Чезаро в линейно-инвариантных семействах аналитических функций в круге

Елизавета Сергеевна Шмидт
Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск, Россия
shmidt@petrsu.ru

Аннотация. В данной статье понятие обобщенного оператора Чезаро перенесено на линейно-инвариантное семейство функций, аналитических в единичном круге. Получена оценка модуля этого оператора.

Ключевые слова: *оператор Чезаро; обобщенный оператор Чезаро; линейно-инвариантное семейство.*

Для цитирования: Шмидт Е. С. Оценка оператора Чезаро в линейно-инвариантных семействах аналитических функций в круге // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 43–50. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-43-50. https://elibrary.ru/swhmjy.

Статья поступила в редакцию 27.08.2025; одобрена после рецензирования 15.11.2025; принята к публикации 20.03.2026.

Research article

The Cesaro Operator Estimation in Linearly Invariant Families of Analytic Functions in the Circle

Elizaveta S. Shmidt
Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russia
shmidt@petrsu.ru

Abstract. In this article, the concept of the averaging Cesàro operator is extended to a linearly invariant family of functions analytic on the unit disk. An estimate for the modulus of this operator is obtained.

Keywords: *Cesàro operator; averaging Cesàro operator; linearly invariant family.*

For citation: Shmidt, E. S. (2026), "The Cesaro Operator Estimation in Linearly Invariant Families of Analytic Functions in the Circle", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 43–50, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-43-50, https://elibrary.ru/swhmjy.

The article was submitted 27.08.2025; approved after reviewing 15.11.2025; accepted for publication 20.03.2026.

1. Введение и постановка задачи

Итальянский математик Эрнесто Чезаро в 1890 году [1] предложил новый эффективный метод суммирования расходящихся рядов. Приведенный метод усреднения лег в основу многих научных работ. Х. Поммеренке в [2] занимался исследованием оператора, который при некотором условии является классическим оператором Чезаро. Л. Фейер в [3] для получения сходящегося функционального ряда переходил к последовательности среднеарифметических заданной функциональной последовательности. Среди работ, посвященных обобщению метода усреднения Чезаро, можно отметить [4] и [5]. В данной работе будет использоваться определение обобщенного (averaging) оператора Чезаро, данное в 1994 году в [4].

Свойства оператора Чезаро и различных его обобщений играют важную роль при изучении сингулярных и функционально-дифференциальных уравнений. Такие уравнения возникают в химическом реакторе [6, с. 176–179], в левой части однородного уравнения Эйлера [7, с. 154], в уравнении Шрёдингера для одномерной частицы [8, с. 116] и других задачах. Здесь удобно осуществить переход от функционально-дифференциальных уравнений к операторным, такой прием избавляет от громоздких расчетов. Отсюда вытекает важность исследования свойств операторов в разных функциональных пространствах и установление условий их ограниченности. Переход от функционально-дифференциальных уравнений к операторным можно увидеть в работах [9], [10] и [11], в них авторы используют описанный выше переход для доказательства достаточных условий разрешимости задачи Коши и для доказательства существования единственного решения. В [12] оператор Чезаро используется в изучении свойств модельной задачи, которая возникает в некоторых химических реакциях. Еще об одном интересном приложении можно прочесть в [13].

Одним из важнейших свойств оператора Чезаро является свойство ограниченности. Наличие этого свойства изучалось в различных пространствах. В предлагаемой работе рассматривается вопрос об ограниченности оператора Чезаро для аналитических функций в $\Delta = \{z \colon |z| < 1\}$, которые принадлежат линейно-инвариантным семействам.

Понятие линейно-инвариантного семейства дал Х. Поммеренке в 1964 году в [14, с. 109].

Множество $\mathfrak{M}$ аналитических и локально однолистных функций в круге Δ

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(g) z^n \tag{1}$$

называется линейно-инвариантным семейством (л.и.с.), если для любой функции $g(z) \in \mathfrak{M}$ и для любого конформного автоморфизма Φ круга Δ функция

$$g_{\Phi}(z) = \frac{g\big(\Phi(z)\big) - g\big(\Phi(0)\big)}{g'\big(\Phi(0)\big)\Phi'(0)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$$

также принадлежит $\mathfrak{M}$.

Число $\operatorname{ord} \mathfrak{M} = \sup\limits_{g \in \mathfrak{M}} |a_2(g)|$ называется *порядком линейно-инвариантного семейства.*

Множество U_α, которое состоит из объединения всех л.и.с. $\mathfrak{M}$ для которых $\operatorname{ord} \mathfrak{M} \le \alpha$ называется универсальным линейно-инвариантным семейством порядка α.

Известно, что порядок $\operatorname{ord} \mathfrak{M} \ge 1$ [14] для любого л.и.с. $\mathfrak{M}$. Порядок семейства, которому принадлежат аналитические и локально однолистные функции, оказывает влияние на ряд свойств этих функций. Примеры л.и.с. приведены в [15, с. 8]. Среди них известные классы аналитических в Δ функций с разложением (1): $U_1 = K$ – класс выпуклых функций, отображающих Δ на выпуклые области, класс $S = U_2$ – класс всех однолистных функций, по теореме Бибербаха $\operatorname{ord} S = 2$ [16], и другие примеры. Далее рассматриваются только л.и.с. конечного порядка.

В силу того, что функции из л.и.с. имеют разложение (1), это позволяет уточнить вид оператора Чезаро в данном классе и получить условия его ограниченности.

2. Оператор Чезаро в линейно-инвариантных семействах функций

Для любого комплексного числа b далее используем символ Похгаммера:

$$(b)_n \coloneqq b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1) = \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

и обозначим $A_n^{\beta} \coloneqq \frac{(\beta+1)_n}{(1)_n}$, причем, $(1)_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (1+n-1) = n!$ и $(b)_0 = 1$.

Пусть $\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n z^n$ аналитическая функция в Δ. В [4] (см. также [17]) для $\beta \in \mathbb{C}$ с $\mathcal{R}e\beta > -1$ для функций $\psi(z)$ обобщенный оператор Чезаро был определен следующим образом:

$$C^{\beta}\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta+1}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta}\,\xi_{k-1}\right)z^{n-1}. \qquad (2)$$

При $\beta = 0$ в (2) получаем классический оператор Чезаро:

$$C^{0}\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_{k-1}\right)z^{n-1}.$$

Уточним (2) для аналитических функций в Δ, имеющих разложение $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Рассмотрим тождество:

$$\frac{z}{1-z}\cdot\frac{1}{(1-z)^{\beta}} = \frac{z}{(1-z)^{\beta+1}}, \qquad (3)$$

в котором каждую дробь представим в виде степенных рядов:

$$\frac{1}{(1-z)^{\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_n}{n!}z^n = \sum_{n=1}^{\infty}A_{n-1}^{\beta-1}z^{n-1}.$$

Поскольку

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \qquad \text{и} \qquad \frac{z}{(1-z)^{\beta+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}A_{n-1}^{\beta}z^n,$$

получаем выражение, эквивалентное (3):

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_{n-1}^{\beta-1}z^{n-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}A_{n-1}^{\beta}z^n. \qquad (4)$$

Раскроем скобки левой части (4), выполним группировку и получим следующее выражение:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_{n-1}^{\beta-1}z^{n-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}A_{k-1}^{\beta-1}\right)z^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{\beta-1}\right)z^n.$$

Отсюда следует, что (4) эквивалентно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{\beta-1}\right)z^n = \sum_{n=1}^{\infty}A_{n-1}^{\beta}z^n.$$

Приравнивая коэффициенты при z^{n}, получим

$$\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} = A_{n-1}^{\beta}, \text{ т.е. } \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} = 1.$$

Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ аналитическая функция в Δ. Определяем оператор Чезаро порядка $\beta > 0$ в пространстве аналитических функций в Δ следующим образом:

$$C^{\beta} f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} a_k\right) z^n. \tag{5}$$

В частности, при $\beta = 1$ получаем классический оператор Чезаро.

Таким образом, получен уточненный вид обобщенного оператора Чезаро порядка β (или β – оператора Чезаро), который можно применять к функциям из л.и.с.

3. Оценка модуля оператора Чезаро

Пусть $\mathfrak{M}$ – л.и.с. конечного порядка. Обозначим $\mathcal{L}\mathfrak{M}$ класс аналитических функций в Δ:

$$\mathcal{L}\mathfrak{M} = \left\{ f(z) = log\, g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) z^n : g \in \mathfrak{M} \right\},$$

здесь $log\, w$ обозначает главную ветвь комплексного логарифма.

Теорема 1. Для любой функции $f(z) \in \mathcal{L}U_{\alpha}, \alpha > 1, \beta > 0,$ β – оператор Чезаро ограничен и

$$\left|C^{\beta} f(z)\right| \leq 2\alpha\beta r \Phi(r, 1, \beta) + r^2 e\left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right)\left(\frac{1}{1-r} - \beta\Phi(r, 1, \beta + 1)\right),$$

где $|z| = r$ и $\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s}$ – трансцендентная функция Лерха.

Доказательство: Для доказательства используем оценки коэффициентов в классе $\mathcal{L}\mathrm{U}_{\alpha}$. Обозначим $A_n(\alpha) = \sup_{f \in \mathcal{L}U_{\alpha}} |a_n(f)|$, для $\alpha > 1$ и $n \geq 2$ в классе $\mathcal{L}U_{\alpha}$ в [18] (см. также [15, с. 102], [19]) были доказаны следующие оценки:

$$\frac{(\alpha - 1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \leq A_n(\alpha) \leq \frac{2\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}} \leq e\left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right).$$

Также из определения U_{α} следует, что $A_1(\alpha) = \sup_{f \in \mathcal{L}U_{\alpha}} |a_1(f)| \leq 2\alpha$.

Обозначим $r = |z|$, $\beta > 0$. Оценим модуль оператора Чезаро:

$$\left|C^{\beta} f(z)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} a_k\right) z^n\right| =$$

$$= \left|a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} A_{n-1}^{\beta-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}}\sum_{k=2}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} a_k\right) z^n\right| \leq$$

$$\leq |a_1| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} A_{n-1}^{\beta-1} r^n + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}}\sum_{k=2}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} |a_k|\right) r^n \leq$$

$$\leq 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} A_{n-1}^{\beta-1} r^n + e\left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right) \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}}\sum_{k=2}^{n} A_{n-k}^{\beta-1}\right) r^n.$$

Так как для любого $\beta > 0$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{A_{n-1}^{\beta-1}}{A_{n-1}^{\beta}} = \frac{(\beta)_{n-1}(1)_{n-1}}{(1)_{n-1}(\beta+1)_{n-1}} = \frac{\Gamma(\beta+n-1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta+1+n-1)} =$$
$$= \frac{\Gamma(\beta+n-1)\beta\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta)(\beta+n-1)\Gamma(\beta+n-1)} = \frac{\beta}{(\beta+n-1)}$$

и

$$\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} = 1,$$

следовательно,

$$\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}}\sum_{k=2}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} = 1 - \frac{\beta}{(\beta+n-1)}.$$

Таким образом,

$$2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}}A_{n-1}^{\beta-1}r^n + e\left(\alpha-\frac{1}{4\alpha}\right)\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}}\sum_{k=2}^{n}A_{n-k}^{\beta-1}\right)r^n =$$
$$= 2\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta}{(\beta+n-1)}r^n + e\left(\alpha-\frac{1}{4\alpha}\right)\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{\beta}{(\beta+n-1)}\right)r^n =$$
$$= 2\alpha\beta r\Phi(r,1,\beta) + r^2 e\left(\alpha-\frac{1}{4\alpha}\right)\left(\frac{1}{1-r} - \beta\Phi(r,1,\beta+1)\right).$$

Теорема доказана.

Список источников

1. *Cesàro E.* Sur la multiplication des séries // Bulletin des Sciences Mathématiques. 1890. T. 14, № 2. P. 114–120. URL: https://zbmath.org/22.0248.01 (дата обращения: 07.11.2025).
2. *Pommerenke Ch.* Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mitt-lerer Oszillation // Commentarii Mathematici Helvetici. 1977. T. 52. P. 591–602. URL: https://doi.org/10.1007/BF02567392 (дата обращения: 07.11.2025).
3. *Fejér L.* Untersuchungen über Fouriersche Reihen // Mathematische Annalen. 1903. T. 58. P. 51–69. URL: https://doi.org/10.1007/BF01447779 (дата обращения: 07.11.2025).
4. *Stempak K.* Cesaro averaging operators // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1994. Vol. 124. P. 121–126. URL: https://doi.org/10.1017/S030821050002922X (дата обращения: 07.11.2025).
5. *Rhaly H. C.* Discrete generalized Cesaro operator // Proceedings of the American Mathematical Society. 1982. Vol. 86, № 3. P. 405–409. URL: https://doi.org/10.2307/2044437 (дата обращения: 07.11.2025).
6. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с. ISBN: 5–93972–112–5.
7. *Симонов Н. И.* Прикладные методы анализа у Эйлера. М.: Государственное издание технико-теоретической литературы. 1957. 167 с.
8. *Фаддеев Л. Д., Якубовский О. А.* Лекции по квантовой механике для студентов-математиков: учеб. пособие. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 200 с.

9. *Абддуллаев А. Р., Плехова Э. В.* О спектре оператора Чезаро // Научно-технический вестник Поволжья. 2011. № 4. С. 33–37. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=17963144&ysclid=mhn3mksm49704551996 (дата обращения 06.11.2025).
10. *Плаксина В. П., Плаксина И. М., Плехова Э. В.* О разрешимости задачи Коши для одного квазилинейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения // Известия вузов. Математика. 2016. № 2. С. 54–61. URL: https://mi.mathnet.ru/ivm9082 (дата обращения: 07.11.2025).
11. *Кунгурцева А. В.* Об одном классе краевых задач для сингулярных уравнений // Известия вузов. Математика. 1995. № 9. С. 30–36. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ivm&paperid=1802&option_lang=rus (дата обращения: 07.11.2025).
12. *Плаксина И. М.* Об одной модельной сингулярной задаче // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2010. № 1 (1). С. 19–23. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13361921 (дата обращения: 07.11.2025).
13. *Hong H.-K., Chen C. H.* Application of Cesaro Mean and the L-Curve for the Deconvolution Problem // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 1995. T. 14. P. 361–373. URL: https://doi.org/10.1016/0267-7261(95)00003-D (дата обращения: 07.11.2025).
14. *Pommerenke Ch.* Linear-invariant Familien analytischer Funktionen I // Mathematische Annalen. 1964. Vol. 155. P. 108–154. URL: https://doi.org/10.1007/BF01344077 (дата обращения: 07.11.2025).
15. *Старков В. В.* Линейно-инвариантные семейства аналитических в круге функций. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2019. 122 с. ISBN: 978–5–8021–3606–5
16. *Bieberbach L.* Uber die koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welch eine Schlichte Abbildung des Einheiskreises vermitteln // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Aka-demie der Wissenschaften zu Berlin. 1916. P. 940–955. URL: https://books.google.ru/books/about/%C3%9Cber_die_Koeffizienten_derjenigen_Poten.html?id=7OuNPgAACAAJ&redir_esc=y (дата обращения: 07.11.2025).
17. *Kayumov I. R., Khammatova D. M., Ponnusamy S.* The Bohr inequality for the generalized Cesàro averaging operators // Mediterranean Journal of Mathematics. 2022. Vol. 19. 16 p. URL: https://doi.org/10.1007/s00009-021-01931-1 (дата обращения: 07.11.2025).
18. *Kayumov I. R., Starkov V. V.* Estimate of logarithmic coefficients of locally univalent function // XVIth Rolf Nevanlinna colloquium. Berlin, New York: de Gruyter & Co, 1996. P. 239–245. URL: https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=342hVIUAAAAJ&cstart=20&pagesize=80&citation_for_view=342hVIUAAAAJ:NyGDZy8z5eUC (дата обращения: 07.11.2025).
19. *Ponnusamy S., Shmidt E.S., Starkov V.V.* The Bohr radius and its modifications for linearly invariant families of analytic functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2024. Vol. 533, № 1. P. 128039 DOI: 10.1016/j.jmaa.2023.128039.

References

1. Cesàro, E. (1890), "Sur la multiplication des séries" [On the multiplication of series], *Bulletin des Sciences Mathématiques*, vol. 14, no 2, pp. 114–120, URL: https://zbmath.org/22.0248.01 (accessed: 07.11.2025).
2. Pommerenke, Ch. (1977), "Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation" [Univalent functions and analytic functions of

bounded mean oscillation], *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 52, pp. 591–602, URL: https://doi.org/10.1007/BF02567392 (accessed: 07.11.2025).

3. Fejér, L. (1903), "Untersuchungen über Fouriersche Reihen" [Investigations on Fourier series], *Mathematische Annalen*, vol. 58, pp. 51–69, URL: https://doi.org/10.1007/BF01447779 (accessed: 07.11.2025).
4. Stempak, K. (1994), "Cesaro averaging operators", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, vol. 124, pp. 121–126, URL: https://doi.org/10.1017/S030821050002922X (accessed: 07.11.2025).
5. Rhaly, H. C. (1982), "Discrete generalized Cesaro operator", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 86, no. 3, pp. 405–409, URL: https://doi.org/10.2307/2044437 (accessed: 07.11.2025).
6. Azbelev, N. V., Maksimov, V. P. and Rakhmatullina, L. F. (2002), *Elementy sovremennoy teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy. Metody i prilozheniya* [Elements of the modern theory of functional differential equations. Methods and applications], Institute of Computer Research, Moscow, 384 p., ISBN: 5–93972–112–5.
7. Simonov, N. I. (1957), *Prikladnye metody analiza u Eylera* [Applied methods of analysis by Euler], State Technical and Theoretical Literature Publishing House, Moscow, 167 p.
8. Faddeev, L. D. and Yakubovskiy, O. A. (1980), *Lektsii po kvantovoy mekhanike dlya studentov-matematikov* [Lectures on quantum mechanics for mathematics students], Leningrad University Press, Leningrad, 200 p.
9. Abdullaev, A. R. and Plekhova, E. V. (2011), "O spektre operatora Chezaro" [On the spectrum of the Cesaro operator], *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya* [Volga Region Scientific and Technical Bulletin], no 4, pp. 33–37, URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=17963144&ysclid=mhn3mksm49704551996 (accessed: 06.11.2025).
10. Plaksina, V. P., Plaksina, I. M. and Plekhova, E. V. (2016), "O razreshimosti zadachi Koshi dlya odnogo kvazilineynogo singulyarnogo funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya" [On the solvability of the Cauchy problem for a quasilinear singular functional differential equation], *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], no 2, pp. 54–61, URL: https://mi.mathnet.ru/ivm9082 (accessed: 07.11.2025).
11. Kungurtseva, A. V. (1995), "Ob odnom klasse kraevykh zadach dlya singulyarnykh uravneniy" [On a class of boundary value problems for singular equations], *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], no. 9, pp. 30–36, URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ivm&paperid=1802&option_lang=rus (accessed: 07.11.2025).
12. Plaksina, I. M. (2010), "Ob odnoy model'noy singulyarnoy zadache" [On a model singular problem], *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*. [Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], no. 1, pp. 19–23, URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13361921 (accessed: 07.11.2025).
13. Hong, H.-K. and Chen, C. H. (1995), "Application of Cesaro mean and the L-curve for the deconvolution problem", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 14, pp. 361–373, URL: https://doi.org/10.1016/0267-7261(95)00003-D (accessed: 07.11.2025).
14. Pommerenke, Ch. (1964), "Linear-invariant Familien analytischer Funktionen I" [Linearly invariant families of analytic functions I], *Mathematische Annalen*, vol. 155, pp. 108–154, URL: https://doi.org/10.1007/BF01344077 (accessed: 07.11.2025).

15. Starkov, V. V. (2019), *Lineyno-invariantnye semeystva analiticheskikh v kruge funktsiy* [Linearly invariant families of functions analytic in the disk], Petrozavodsk State University Press, Petrozavodsk, 122 p., ISBN: 978–5–8021–3606–5.
16. Bieberbach, L. (1916), "Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln" [On the coefficients of power series that provide a univalent mapping of the unit disk], *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pp. 940–955, URL: https://books.google.ru/books/about/%C3%9Cber_die_Koeffizienten_derjenigen_Poten.html?id=7OuNPgAACAAJ&redir_esc=y (accessed: 07.11.2025).
17. Kayumov, I. R., Khammatova, D. M. and Ponnusamy, S. (2022), "The Bohr inequality for the generalized Cesàro averaging operators", *Mediterranean Journal of Mathematics*, vol. 19, 16 p. URL: https://doi.org/10.1007/s00009-021-01931-1 (accessed: 07.11.2025).
18. Kayumov, I. R. and Starkov, V. V. (1996), "Estimate of logarithmic coefficients of locally univalent function", *in XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium*. Berlin, de Gruyter & Co, New York, pp. 239–245, URL: https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=342hVIUAAAAJ&cstart=20&pagesize=80&citation_for_view=342hVIUAAAAJ:NyGDZy8z5eUC (accessed: 07.11.2025).
19. Ponnusamy, S., Shmidt, E. S. and Starkov, V. V. (2024), "The Bohr radius and its modifications for linearly invariant families of analytic functions", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 533, no 1, 128039.

Информация об авторе:
Е. С. Шмидт – аспирант, старший преподаватель кафедры математического анализа, Петрозаводский государственный университет (185910, Россия, г. Петрозаводск, пр. Ленина, д. 33).

Information about the author:
E. S. Shmidt – postgraduate student, senior lecturer, Department of Mathematical Analysis, Petrozavodsk State University (33 Lenin prospect, Petrozavodsk, Russia, 185910).