Научная статья
УДК 519.977
DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-19-28
https://elibrary.ru/iugyra

Необходимое и достаточное условие в одной линейной дробной задаче оптимального управления

Жаля Билал кызы Ахмедова
Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
jaleahmadova23@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления динамической системой, поведение которой описывается системой линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с дробными производными Капуто. Область управления является ограниченным множеством. Управляющая функция относится к классу кусочно-непрерывных (имеющих конечное число точек разрыва первого рода) функций. А функционал качества является линейным. Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина. В случае нелинейного дифференцируемого и выпуклого функционала качества доказано достаточное условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: *задача оптимального управления; интегро-дифференциальное уравнение; необходимое и достаточное условие оптимальности; достаточное условие оптимальности; производная Капуто*.

Для цитирования: Ахмедова Ж. Б. Необходимое и достаточное условие в одной линейной дробной задаче оптимального управления // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 19–28. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-19-28. https://elibrary.ru/iugyra.

Статья поступила в редакцию 30.05.2025; одобрена после рецензирования 25.10.2025; принята к публикации 15.03.2026.

Research article

Necessary and Sufficient Condition in a Linear Fractional Optimal Control Problem

Zhala B. Akhmedova
Baku State University, Baku, Azerbaijan
jaleahmadova23@gmail.com

Abstract. The problem of optimal control of a dynamic system is considered, where the system's behavior is described by a system of linear Volterra integro-differential equations with Caputo fractional derivatives. The control domain is a bounded set. The control function belongs to the class of piecewise-continuous functions (having a finite number of first-kind discontinuity points). The performance index is linear. A necessary and sufficient optimality condition of the Pontryagin maximum principal type is proven. In the case of a nonlinear, differentiable, and convex performance index, a sufficient optimality condition of the Pontryagin maximum principal type is established.

Keywords: *optimal control problem; integro-differential equation; necessary and sufficient optimality condition; sufficient optimality condition; Caputo derivative.*

For citation: Akhmedova, Zh. B. (2026), "Necessary and Sufficient Condition in a Linear Fractional Optimal Control Problem", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 19–28, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-19-28, https://elibrary.ru/iugyra.

The article was submitted 30.05.2025; approved after reviewing 25.10.2025; accepted for publication 15.03.2026.

Введение

Как известно, процессы из практики управляемы. Но управляющие функции могут быть разными. И поэтому при исследовании конкретных процессов возникает вопрос о нахождении наилучшей управляющей функции, которую называют оптимальным управлением. Теория оптимального управления представляет значительный теоретический и практический интерес. Самым сильным и удобным необходимым условием оптимальности является принцип максимума Л. С. Понтрягина, впервые доказанный для случая обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. С появлением этого принципа стала интенсивно развиваться качественная теория оптимального управления. Разными специалистами рассмотрены различные аспекты этой теории и обзор ряда результатов имеется, например в [2−4].

Линейные динамические системы являются удобными объектами исследования в теории оптимального управления и имеют определенные особенности (см., например, [5−7]).

В работе [5] рассмотрена одна задача оптимального управления, описываемая системой интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Критерий качества является нетиповым. Считая область управления открытым, вычислены первая и вторая вариации функционала качества. Из равенства нулю первой вариации функционала качества вдоль оптимального процесса получен аналог уравнения Эйлера. Из условия неотрицательности второй вариации функционала качества получены различные необходимые условия оптимальности второго порядка, носящие конструктивный характер. Также отдельно изучен случай особых, в классическом смысле, управлений.

Но для линейных систем принцип максимума Л. С. Понтрягина превращается еще и в достаточное условие.

В работе [8] получено необходимое и достаточное условие глобальной оптимальности для задач оптимизации без ограничений, когда целевая функция не обязательно является выпуклой. Авторы используют дифференцируемость по Гато целевой функции и ее бисопряженной функции (последняя известна из выпуклого анализа).

Несмотря на то, что исследование дробно-дифференциального исчисления началось еще в XIX веке, широко оно стало применяться только в последние десятилетия. Уравнения с дробными производными применяются для описания динамических процессов в задачах классической механики, гидродинамики, диффузии, динамике турбулентной среды, модели фазовых превращений, пространственных и временных корреляциях в жидкостях, фильтрации в пористых средах, и т. д.

Задачи оптимального управления, описываемые различными дифференциальными уравнениями дробного порядка, в настоящее время интенсивно исследуются. В этом направлении можно показать, например, работы [9–12].

Точное моделирование многих динамических систем приводит к системе дробных дифференциальных уравнений (FDE). В работе [12] рассмотрена общая формулировка и схема решения для класса дробных задач оптимального управления (FOCP) для этих систем, в котором дробная производная является производной Римана–Лиувилля. Индекс производительности дробных задач оптимального управления рассматривается как функция, как переменных состояния, так и переменных управления, а динамические ограничения выражаются набором дробных дифференциальных уравнений. Вариационное исчисление, множитель Лагранжа и формула дробного интегрирования по частям используются для получения аналога уравнений Эйлера–Лагранжа для дробных задач оптимального управления. Представленная формулировка и полученные уравнения очень похожи на те, которые появляются в классической теории оптимального управления. Таким образом, рассматриваемая задача, по существу, расширяет классическую теорию управления на дробную динамическую систему.

А в работе, например, [13], рассмотрена задача оптимального управления, описываемая интегро-дифференциальным уравнением типа Вольтерра с дробной производной Капуто. Функционал качества является функционалом терминального типа. Применяя аналог модифицированного метода приращений, установлено необходимое условие оптимальности первого порядка в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина.

В данной работе с помощью аналога метода приращений (см., например, [2, 4, 5, 7]) исследуется одна задача оптимального управления, описываемая интегро-дифференциальным уравнением дробного порядка Капуто с линейным функционалом качества. Область управления является непустым и ограниченным множеством. Управляющая функция берется из класса кусочно-непрерывных (имеющие конечное число точек разрыва первого рода) функций. Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в рассматриваемой задаче. А в случае нелинейного функционала качества – отдельно доказано достаточное условие оптимальности.

1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается системой линейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$
{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t) = A(t)x(t) + f\big(t,u(t)\big) + \int_{t_0}^{t}\big[B(t,\tau)x(\tau) + g\big(t,\tau,u(\tau)\big)\big]d\tau, \tag{1}
$$

с начальным условием

$$
x(t_0) = x_0, \tag{2}
$$

где

$$
{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{x^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{1+\alpha-n}}d\tau, \quad n = [\alpha]+1, \alpha \in R_+
$$

левая дробная производная Капуто (см. например [13-15]).

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)' - n$-мерный вектор состояния управляемого объекта, $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)' - r$-мерная кусочно-непрерывная (имеющая конечное число точек разрыва первого рода) управляющая вектор-функция, принимающая свои значения из заданного, непустого и ограниченного множества U, т.е.,

$$
u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T = [t_0, t_1]. \tag{3}
$$

Здесь (') означает для векторов операцию скалярного произведения, а для матриц – операцию транспонирования.

Предположим, что t_0, t_1, x_0 — соответственно заданные числа и постоянный вектор, $A(t)$ — заданная $(n \times n)$-мерная непрерывная матричная-функция, $f(t,u)$ — заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных.

На решениях задачи Коши (1)–(2) соответствующих всем управлениям, удовлетворяющим условию (3), определим терминальный функционал:

$$S(u) = c'x(t_1). \tag{4}$$

Здесь c — заданный n -мерный постоянный вектор.

Задачу нахождения минимального значения функционала при условиях (1)–(3) для краткости назовем задачей (1)–(4). Как видно, функционал линейный и правая часть уравнения линейна относительно x.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу (4), при ограничениях (1)–(3), назовем *оптимальным управлением*, а соответствующий процесс $\big(u(t), x(t)\big)$– *оптимальным процессом*.

2. Вычисление приращения функционала

Пусть $\big(u(t), x(t)\big)$ — фиксированный, а $\big(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)\big)$ — произвольный допустимые процессы.

Напишем приращение функционала (4), соответствующее допустимым управлениям $\bar{u}(t)$ и $u(t)$:

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = c'\Delta x(t_1). \tag{5}$$

Ясно, что приращение $\Delta x(t)$ траектории $x(t)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{gathered} {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta x(t) = A(t)\Delta x(t) + \big[f\big(t,\bar{u}(t)\big) - f\big(t,u(t)\big)\big] + \\ + \int_{t_1}^{t} \Big[B(t,\tau)\,\Delta x(\tau) + \Big(g\big(t,\tau,\bar{u}(\tau)\big) - g\big(t,\tau,u(\tau)\big)\Big)\Big]\,d\tau, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\Delta x(t_0) = 0. \tag{7}$$

Уравнение (6) является линейным, неоднородным уравнением, относительно Δx.

Пусть $\psi = \psi(t)$ пока произвольная n-мерная вектор-функция. Умножая обе стороны уравнения (6) скалярно на $\psi(t)$ и интегрируя полученное уравнение по t от t_0 до t_1, получим

$$\begin{gathered} \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta x(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\,A(t)\,\Delta x(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\ \Big(f\big(t,\bar{u}(t)\big) - f\big(t,u(t)\big)\Big)dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t} \psi'(t)\Big[B(t,\tau)\,\Delta x(\tau) + \Big(g\big(t,\tau,\bar{u}(\tau)\big) - g\big(t,\tau,u(\tau)\big)\Big)\Big]d\tau\right]dt. \end{gathered} \tag{8}$$

По формуле частичного интегрирования для дробных интегралов [14] имеем:

$$\begin{gathered} \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}\Delta x(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\Delta\,{}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi(t)dt + {}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\Delta x(t)\psi(t)\big|_{t_0}^{t_1} = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\Delta\,{}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi(t)dt + {}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\Delta x(t_1)\psi(t_1) + {}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\Delta x(t_0)\psi(t_0) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t)\Delta\,{}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi(t)dt + {}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\Delta x(t_1)\psi(t_1). \end{gathered} \tag{9}$$

По формуле Дирихле (см., например, [16]) имеем, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t}\psi'(t)\left[B(t,\tau)\,\Delta x(\tau)+\left(g\big(t,\tau,\bar{u}(\tau)\big)-g\big(t,\tau,u(\tau)\big)\right)\right]d\tau\right]dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)\left[B(\tau,t)\,\Delta x(t)+\left(g\big(\tau,t,\bar{u}(t)\big)-g\big(\tau,t,u(t)\big)\right)\right]d\tau\right]dt. \qquad (10)$$

Учитывая тождества (9) и (10) в формуле приращения (5), получим

$$\Delta S(u)=c'\Delta x(t_1)+\int_{t_0}^{t_1}\Delta x'(t)\,{}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi(t)dt+{}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\Delta x(t_1)\psi(t_1)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\,A(t)\,\Delta x(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\,\left(f\big(t,\bar{u}(t)\big)-f\big(t,u(t)\big)\right)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)\left[B(\tau,t)\,\Delta x(t)+\left(g\big(\tau,t,\bar{u}(t)\big)-g\big(\tau,t,u(t)\big)\right)\right]d\tau\right]dt. \qquad (11)$$

Предположим, что вектор-функция $\psi(t)$ является решением следующей системы уравнений:

$${}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi(t)=A'(t)\,\psi(t)+\int_{t}^{t_1}B'(\tau,t)\psi(\tau)d\tau, \qquad (12)$$

$${}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\psi(t_1)=-c. \qquad (13)$$

Задача (12)–(13) называется *сопряженной системой для рассматриваемой задачи* и является линейной неоднородной задачей Коши для интегро-дифференциального уравнения с дробными производными (12).

Тогда формула приращения (11) функционала будет иметь следующий вид:

$$\Delta S(u)=-\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\,\left(f\big(t,\bar{u}(t)\big)-f\big(t,u(t)\big)\right)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)\left(g\big(\tau,t,\bar{u}(t)\big)-g\big(\tau,t,u(t)\big)\right)d\tau\right]dt. \qquad (14)$$

Введем аналог функции Гамильтона–Понтрягина следующим образом:

$$H\big(t,u(t),\psi(t)\big)=\psi'(t)f\big(t,u(t)\big)+\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)g\big(\tau,t,u(t)\big)d\tau.$$

Тогда формула приращения (14) преобразуется к следующему виду:

$$\Delta S(u)=-\int_{t_0}^{t_1}\left[H\big(t,\bar{u}(t),\psi(t)\big)-H\big(t,u(t),\psi(t)\big)\right]dt. \qquad (15)$$

Доказанная формула приращения (15) позволяет получить необходимое и достаточное условие оптимальности следующим образом.

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы равенство

$$\max_{v\in U}H\big(\theta,v,\psi(\theta)\big)=H\big(\theta,u(\theta),\psi(\theta)\big), \qquad (16)$$

выполнялось для всех $v \in U, \theta \in [t_0, t_1)$.

Точка $\theta \in [t_0, t_1)$ является произвольной точкой непрерывности управления $u(t)$.

Доказательство

Необходимость. Пусть управление $u(t)$ является оптимальным управлением, $v \in U$ произвольный вектор, $\theta \in [t_0, t_1)$, а $\varepsilon > 0$ такое достаточно малое число, что выполняется неравенство $\theta + \varepsilon < t_1$.

Определим специальное приращение управления $u(t)$ следующим образом:

$$\Delta u(t; \varepsilon) = \begin{cases} v - u(t), t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0, \qquad t \in T \setminus [\theta, \theta + \varepsilon). \end{cases} \tag{17}$$

Тогда, используя теорему о среднем из формулы приращения функционала (15) получим, что

$$S\big(u(t) + \Delta u(t; \varepsilon)\big) - S\big(u(t)\big) =$$
$$= -\varepsilon\big[H\big(\theta, v, \psi(\theta)\big) - H\big(\theta, u(\theta), \psi(\theta)\big)\big] + o(\varepsilon) \geq 0.$$

Отсюда получается условие максимума (16).

Достаточность. Пусть выполняется условие максимума (16). Покажем, что в таком случае управление $u(t)$ является оптимальным управлением. Выполнение условия максимума (16) означает, что для любого управления $v(\theta) \in U, \theta \in [t_0, t_1)$ выполняется следующее условие:

$$H\big(\theta, v(\theta), \psi(\theta)\big) \leq H\big(\theta, u(\theta), \psi(\theta)\big).$$

Тогда по формуле приращения (15) можем написать, что

$$S(v) - S(u) =$$
$$= -\int_{t_0}^{t_1} \Big(H\big(\theta, v(\theta), \psi(\theta)\big) - H\big(\theta, u(\theta)\big), \psi(\theta)\Big) d\theta \geq 0,$$

т. е.

$$S(v) \geq S(u).$$

А это означает, что управление $u(t)$ является оптимальным управлением.

Этим доказана теорема.

3. Достаточное условие оптимальности в случае нелинейного функционала качества

Предположим, что $\varphi(x)$ заданная непрерывно-дифференцируемая и выпуклая скалярная функция.

Рассмотрим задачу о нахождении минимального значения функционала

$$S(u) = \varphi\big(x(t_1)\big) \tag{18}$$

при ограничениях (1)–(3).

Аналогичными рассуждениями, приведенными в начале работы, запишем приращение функционала (18), соответствующее допустимым управлениям $u(t)$ и $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$:

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u)$$
$$= \varphi\big(\bar{x}(t_1)\big) - \varphi\big(x(t_1)\big) + \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) {}_t^C D_{t_1}^{\alpha} \psi(t) dt + {}_t I_{t_1}^{1-\alpha} \Delta x(t_1) \psi(t_1) -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\, A(t)\, \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\, \Big(f\big(t, \bar{u}(t)\big) - f\big(t, u(t)\big)\Big) dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)B(\tau,t)\,d\tau\right]\Delta x(t)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)\Big(g\big(\tau,t,\bar{u}(t)\big)-g\big(\tau,t,u(t)\big)\Big)d\tau\right]dt. \qquad (19)$$

Здесь $\psi(t)$ пока произвольная n-мерная вектор-функция.

Используя линеаризацию по формуле Тейлора, формулу приращения (19) можно записать следующим образом:

$$\Delta S(u)=\frac{\partial\varphi\big(x(t_1)\big)}{\partial x}\Delta x(t_1)+o_1(\|\Delta x(t_1)\|)+\int_{t_0}^{t_1}{}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\big(\psi'(t)\big)\Delta x(t)dt+$$

$$+{}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\psi'(t_1)\Delta x(t_1)-\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\,A(t)\,\Delta x(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\,\Big(f\big(t,\bar{u}(t)\big)-f\big(t,u(t)\big)\Big)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)B(\tau,t)\,d\tau\right]\Delta x(t)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)\Big(g\big(\tau,t,\bar{u}(t)\big)-g\big(\tau,t,u(t)\big)\Big)d\tau\right]dt. \qquad (20)$$

Здесь $\|\alpha\|-$ норма вектора $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)'$, определяемая формулой $\|\alpha\|=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$, а $o(\alpha)$ есть величина более высокого порядка чем α, т. е. $\frac{o(\alpha)}{\alpha}\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Предположим, что вектор-функция $\psi(t)$ является решением следующей задачи:

$${}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha}\psi(t)=A'(t)\psi(t)+\int_{t}^{t_1}B'(\tau,t)\psi(\tau)\,d\tau, \qquad (21)$$

$${}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha}\psi(t_1)=-\frac{\partial\varphi\big(x(t_1)\big)}{\partial x}. \qquad (22)$$

Введя аналог функции Гамильтона–Понтрягина следующим образом,

$$H\big(t,u(t),\psi(t)\big)=\psi' f\big(t,u(t)\big)+\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)g\big(\tau,t,u(t)\big)d\tau,$$

приращение (20) функционала (18) можно записать в таком виде:

$$\Delta S(u)=-\int_{t_0}^{t_1}H\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)-H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\,dt+o_1(\|\Delta x(t_1)\|). \quad (23)$$

По условию задачи $\varphi(x)-$ выпуклая и дифференцируемая функция. Поэтому, по свойствам выпуклой функции, выполняется неравенство

$$o_1(\|\Delta x(t_1)\|)\geq 0.$$

Следовательно, из формулы (23) получим, что для приращения функционала качества выполняется неравенство

$$\Delta S(u)\geq-\int_{t_0}^{t_1}H\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)\big)-H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)\,dt. \qquad (24)$$

Из неравенства (24) получается справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче (1)–(3), (18) достаточно, чтобы соотношение

$$\max_{v \in U} H(\theta, v, \psi(\theta)) = H(\theta, u(\theta), \psi(\theta))$$

выполнялось для всех $\theta \in [t_0, t_1)$.

Заключение

В классе кусочно-непрерывных управляющих функций со значениями из непустого и ограниченного множества (область управления) рассмотрена задача минимизации линейного функционала в процессах, описываемых линейными интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра дробного порядка.

Построена формула приращения функционала качества, позволяющая доказать необходимое и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. В случае нелинейного выпуклого функционала доказано достаточное условие оптимальности.

Список источников

1. *Понтрягин Л. С.* Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во Ленанд, 2024. 72 с.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: Либроком, 2011. 272 с.
3. *Милютин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П.* Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во МГУ, 2004. 73 с.
4. *Марданов М. Дж., Мансимов К. Б., Меликов Т. К.* Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. Баку: Изд-во "ЭЛМ", 2013. 363 с.
5. *Мансимов К. Б., Нагиева И. Ф.* Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной задаче оптимального управления с нетиповым критерием качества // Вестник Томского Государственного Университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 64. С. 10–20.
6. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Оптимизация линейных систем методы функционального анализа. Минск: Изд.-во БГУ, 1973. 246 с.
7. *Андреева Е. А., Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е.* Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992. 333 с.
8. *Pál Burai* Necessary and sufficient condition on global optimality without convexity and second order differentiability // Optimization Letters. 2013. Vol. 7. P. 903–911.
9. *Almedia R., Ferreira R. A. C., Torres D. F. M.* Free time fractional optimal control problems // Europian Control Conference. Zurich. Switzerland. July 17−19. 2013. P. 3985–3990.
10. *Almedia R., Ferreira R. A. C., Torres D. F. M.* Fractional order optimal control problems with free terminal time // Journal of Industrial and Management Optimization. 2014. Vol. 10, № 2. P. 363–381.
11. *Kumar P., Pandey D. N., Bahuguna D.* Impulsive boundary value problems for fractional differential equations with deviating arguments // Journal of Fractional Calculus and Applications. 2014. Vol. 5 (1). P. 146−155.
12. *Agrawal O. P.* A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems // Nonlinear Dynamics. 2004. № 38. С. 323–337.
13. *Ахмедова Ж. Б.* О необходимых условиях оптимальности первого порядка в задаче управления, описываемой системой интегро-дифференциальных уравнений

дробного порядка // Вестник Томского Государственного Университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 64. С. 4–10.
14. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 951 p.
15. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Springer, 2004. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14574-2 (дата обращения: 20.04.2025).
16. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2018. 384 с.

References

1. Pontryagin, L. S. (2024), *Printsip maksimuma v optimal'nom upravlenii* [Maximum principle in optimal control], Lenand, Moscow, 72 p.
2. Gabasov, R. and Kirillova, F. M. (2011), *Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya* [Maximum principle in the theory of optimal control], Librokom, Moscow, 272 p.
3. Milyutin, A. A., Dmitruk, A. V. and Osmolovskiy, N. P. (2004), *Printsip maksimuma v optimal'nom upravlenii* [Maximum principle in optimal control], Moscow State University Press, Moscow, 73 p.
4. Mardanov, M. Dj., Mansimov, K. B. and Melikov, T. K. (2013), *Issledovanie osobykh upravleniy i neobkhodimye usloviya optimal'nosti vtorogo poryadka v sistemakh s zapazdyvaniyem* [Investigation of special controls and necessary optimality conditions of second order in systems with delay], ELM, Baku, 363 p.
5. Mansimov, K. B. and Nagieva, I. F. (2023), "Neobkhodimye usloviya optimal'nosti pervogo i vtorogo poryadkov v odnoy zadache optimal'nogo upravleniya s netipovym kriteriyem kachestva" [Necessary optimality conditions of first and second order in an optimal control problem with a non standard quality criterion], *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science], no 64, pp. 10–20.
6. Gabasov, R. and Kirillova, F. M. (1973), *Optimizatsiya lineynykh sistem: metody funktsional'nogo analiza* [Optimization of linear systems: methods of functional analysis], Belarusian State University Press, Minsk, 246 p.
7. Andreeva, E. A., Kolmanovskiy, V. B. and Shaikhet, L. E. (1992), *Upravlenie sistemami s posledeystviem* [Control of systems with aftereffect], Nauka, Moscow, 333 p.
8. Burai, P. (2013), "Necessary and sufficient condition on global optimality without convexity and second order differentiability", *Optimization Letters*, vol. 7, pp. 903–911.
9. Almedia, R., Ferreira, R. A. C. and Torres, D. F. M. (2013), "Free time fractional optimal control problems", *in European Control Conference*, Zurich, Switzerland, 17–19 July 2013, pp. 3985–3990.
10. Almedia, R., Ferreira, R. A. C. and Torres, D. F. M. (2014), "Fractional order optimal control problems with free terminal time", *Journal of Industrial and Management Optimization*, vol. 10, no 2, pp. 363–381.
11. Kumar, P., Pandey, D. N. and Bahuguna, D. (2014), "Impulsive boundary value problems for fractional differential equations with deviating arguments", *Journal of Fractional Calculus and Applications*, vol. 5, no 1, pp. 146–155.
12. Agrawal, O. P. (2004), "A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems", *Nonlinear Dynamics*, no 38, pp. 323–337.
13. Akhmedova, Zh. B. (2023), "O neobkhodimykh usloviyakh optimal'nosti pervogo poryadka v zadache upravleniya, opisyvaemoy sistemoy integro differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka" [On necessary optimality conditions of first order in a

control problem described by a system of fractional order integro differential equations], *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science], no 64, pp. 4–10.

14. Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. (1993), *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, 951 p.
15. Diethelm, K. (2004), *The analysis of fractional differential equations: an application oriented exposition using differential operators of Caputo type*, Springer, https://doi.org/10.1007/978-3-642-14574-2 (accessed: 20.04.2025).
16. Alekseev, V. M., Tikhomirov, V. M. and Fomin, S. V. (2018), *Optimal'noe upravlenie* [Optimal control], Fizmatlit, Moscow, 384 p.

Информация об авторе:
Ж. Б. Ахмедова – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры математической кибернетики Бакинского Государственного Университета (AZ1148, Азербайджан, г. Баку, ул.Захида Халилова, д. 23).

Information about the author:
Zh. B. Akhmedova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor of the Department of Mathematical Cybernetics at Baku State University (23 Zahid Khalilov Street, Baku, Azerbaijan, AZ1148).