

Научная статья

УДК 517.938

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-30-40

<https://elibrary.ru/xetuxd>



Гамильтоновы периодические дифференциальные уравнения с производными четных порядков

Марат Гаязович Юмагулов¹, Лилия Сунагатовна Ибрагимова²,

Турдикул Сафарович Орипов³

^{1, 2} Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

³ Денауский институт предпринимательства и педагогики, Денау, Узбекистан

¹ yum_mg@mail.ru

² lilibr@mail.ru

³ oripovt@mail.ru

Аннотация. В статье изучается задача о конструировании эквивалентной гамильтоновой системы для линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами, содержащего производные только четных порядков. Предлагается подход, основанный на методах теории нормальных форм и теории Флоке, позволяющий переходить к равносильной гамильтоновой системе. Предложены формулы соответствующих линейных невырожденных преобразований для решения указанной задачи. Полученные результаты распространены и на аналогичную задачу для линейной периодической системы с малым параметром, невозмущенная система которой определяется гамильтоновой постоянной матрицей.

Ключевые слова: Гамильтонова система; дифференциальные уравнения четных порядков; периодические коэффициенты; эквивалентность.

Для цитирования: Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Орипов Т. С. Гамильтоновы периодические дифференциальные уравнения с производными четных порядков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 2(73). С. 30–40. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-30-40. <https://elibrary.ru/xetuxd>.

Статья поступила в редакцию 17.05.2025; одобрена после рецензирования 20.10.2025; принята к публикации 10.06.2026.

Research article

Hamiltonian Periodic Differential Equations With Even-Order Derivatives

Marat G. Yumagulov¹, Liliya S. Ibragimova², Turdikul S. Oripov³

^{1, 2} Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

³ Denau Institute of Entrepreneurship and Pedagogy, Denau, Uzbekistan

¹ yum_mg@mail.ru

² lilibr@mail.ru

³ oripovt@mail.ru



© Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Орипов Т. С., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Abstract. The article studies the problem of constructing an equivalent Hamiltonian system for a linear differential equation with periodic coefficients containing derivatives of only even orders. An approach based on the methods of the theory of normal forms and the Floquet theory is proposed, which allows one to pass to an equivalent Hamiltonian system. Formulas for the corresponding linear nondegenerate transformations for solving the problem are proposed. The results obtained are extended to a similar problem for a linear periodic system with a small parameter, the unperturbed system of which is determined by a Hamiltonian constant matrix.

Keywords: *Hamiltonian system; differential equations of even orders; periodic coefficients; equivalence.*

For citation: Yumagulov, M. G., Ibragimova, L. S. and Oripov, T. S. (2026), "Hamiltonian Periodic Differential Equations With Even-Order Derivatives", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 2(73), pp. 30–40, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-30-40, <https://elibrary.ru/xetuxd>.

The article was submitted 17.05.2025; approved after reviewing 20.10.2025; accepted for publication 10.06.2026.

1. Введение

Рассматривается динамическая система, описываемая неавтономным дифференциальным уравнением:

$$L\left(\frac{d}{dt}, t\right)y = 0. \quad (1)$$

Здесь L – операторный многочлен:

$$L(p, t) = p^{2n} + a_1(t)p^{2n-2} + a_2(t)p^{2n-4} + \dots + a_{n-1}(t)p^2 + a_n(t),$$

коэффициенты $a_j(t)$ которого – это вещественные непрерывные и T – периодические функции.

Многочлен $L(p, t)$ содержит степени только четных порядков. К дифференциальным уравнениям четных порядков приводят многие задачи теории управления, теории гамильтоновых систем, теории интегрируемых уравнений, спектральной теории и др. Важным направлением исследования таких уравнений является задача о введении на них гамильтоновой структуры. Наличие такой структуры и, как следствие, существование первых интегралов и различных типов симметрий позволяет существенно продвинуться в задаче изучения динамики системы. Вопросы о наличии гамильтоновой структуры для многих типов дифференциальных уравнений и соответственно вопросы конструирования эквивалентной гамильтоновой системы в различных постановках обсуждались в ряде работ (см., например, [1]–[7]).

Большинство исследований направлено на изучение указанных вопросов для автономных дифференциальных уравнений. Существенно меньше изучены задачи для неавтономных и, в частности, для уравнений с периодическими коэффициентами, хотя и здесь получен ряд важных результатов (см., например, [8, 9]).

В настоящей работе изучаются вопросы о введении гамильтоновой структуры для периодических дифференциальных уравнений вида (1). Предлагается подход, позволяющий переходить от уравнения (1) к эквивалентной гамильтоновой системе. В качестве основного приложения рассматривается зависящая от малого параметра ε динамическая

система, описываемая неавтономным дифференциальным уравнением с производными четного порядка:

$$L\left(\frac{d}{dt}, t, \varepsilon\right)y = 0, \quad (2)$$

в котором L – операторный многочлен:

$L(p, t, \varepsilon) = p^{2n} + a_1(t, \varepsilon)p^{2n-2} + a_2(t, \varepsilon)p^{2n-4} + \dots + a_{n-1}(t, \varepsilon)p^2 + a_n(t, \varepsilon)$, коэффициенты $a_j(t, \varepsilon)$ которого – это вещественные непрерывные функции, представимые в виде $a_j(t, \varepsilon) = a_{j,0} + \varepsilon\varphi_j(t)$; $a_{j,0}$ – константы, функции $\varphi_j(t)$ предполагаются непрерывными и T – периодическими. Предлагаются новые подходы в вопросе конструирования для неавтономного уравнения (2) эквивалентной квазигамильтоновой системы:

$$\frac{dx}{dt} = (JA_0 + \varepsilon S_0(t))x, \quad x \in R^{2n}; \quad (3)$$

здесь матрица J определена равенством: $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$, в котором I – единичная $(n \times n)$ матрица; A_0 – постоянная симметрическая матрица, $S_0(t)$ – непрерывная и T -периодическая матрица. Предлагаемые подходы приводят к новым достаточным признакам устойчивости уравнения (2) в критических случаях. Статья развивает исследования, начатые в [10]–[13].

2. Вспомогательные сведения

2.1. Об эквивалентности и наблюдаемости систем. Приведем сначала необходимые сведения из теории систем и теории управления (см., например, [3]–[5]).

Уравнение (1) различными способами может быть преобразовано к эквивалентной системе дифференциальных уравнений первого порядка. Наиболее простым является переход от (1) к системе

$$z' = A(t)z, \quad y = (z, c_0), \quad (4)$$

в которой $z, c_0 \in R^{2n}$, символ (z, c_0) обозначает скалярное произведение векторов, $A(t)$ и c_0 – это, соответственно, матрица и вектор:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & 0 & -a_{n-1}(t) & 0 & \dots & -a_1(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

Переход от уравнения (1) к системе (4) осуществляет замена $z = \tilde{y}$, в которой $\tilde{y}$ – это вектор:

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(2n-1)} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

В этих формулах производные $y^{(k)}$ вычисляются по t от заданной функции $y = y(t)$. Решения уравнения (1) и системы (4) связаны равенством $y(t) = (z(t), c_0)$.

Наряду с (1) будем рассматривать систему

$$x' = B(t)x, \quad y = (x, c), \quad (7)$$

в которой $x, c \in R^{2n}$, а $B(t)$ – непрерывная и T -периодическая по t матрица. Системы (4) и (7) будем называть *эквивалентными*, если существует невырожденная матрица Q такая, что замена $x = Qz$ преобразует систему (7) в систему (4). Другими словами, существует невырожденная матрица Q такая, что выполнены равенства

$$A(t) = Q^{-1}B(t)Q, \quad Q^*c = c_0;$$

здесь Q^* обозначает транспонированную матрицу.

Уравнение (1) и систему (7) будем называть *эквивалентными*, если система (7) эквивалентна системе (4). В этом случае решения $y = y(t)$ и $x = x(t)$ уравнения (1) и системы (7) соответственно связаны равенствами $y(t) = (x(t), c)$, $x(t) = Q\tilde{y}(t)$.

Рассмотрим теперь линейную систему

$$x' = Bx, \quad y = (x, c), \quad (8)$$

в которой B – постоянная матрица, $c \in R^{2n}$. Определим квадратную матрицу

$$D(c) = \begin{bmatrix} c^* \\ c^*B \\ c^*B^2 \\ \vdots \\ c^*B^{2n-1} \end{bmatrix}; \quad (9)$$

здесь вектор c^* , а также результаты произведений c^*B^j рассматриваются как вектор-строки. Матрица $D(c)$ называется *матрицей наблюдаемости* системы (8). Система (8) называется *наблюдаемой*, если $\det D(c) \neq 0$.

2.2. О гамильтоновых системах. Приведем теперь некоторые необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории гамильтоновых систем (см., например, [1, 2, 8, 14, 15]). *Гамильтоновой системой* называют динамическую систему, описываемую уравнением

$$x' = J\nabla H(x, t), \quad x \in R^{2n},$$

в котором матрица J и вектор $\nabla H(x, t)$ определяются равенствами

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla H(x, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}} \right)^T;$$

здесь 0 и I – это, соответственно, нулевая и единичная (порядка n) матрицы, $H(x, t)$ – скалярная вещественная гладкая (по x) и непрерывная (по t) функция, называемая *гамильтонианом* системы.

Линейной автономной гамильтоновой системой (ЛАГС) называют систему вида

$$\frac{dx}{dt} = JA x, \quad x \in R^{2n}, \quad (10)$$

в которой A – вещественная квадратная симметрическая (порядка $2n$) матрица. Ниже участвующую в системе (10) матрицу JA будем называть *гамильтоновой матрицей*.

Отметим следующие свойства гамильтоновой матрицы JA :

G1 если матрица JA имеет собственное значение λ , то числа $-\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$ также являются собственными значениями этой матрицы, причем той же алгебраической и геометрической кратности и того же индекса;

G2 если матрица JA имеет собственное значение $\lambda = 0$, то алгебраическая кратность этого собственного значения является четным числом;

G3 характеристический многочлен матрицы JA содержат степени только четных порядков.

Отметим также, что каждая постоянная гамильтонова матрица JA входит в один и только один класс эквивалентности симплектически подобных матриц. При этом в каждом таком классе выделяют один представитель, называемый *нормальной формой*. Более

детально с базовыми понятиями теории нормальных форм гамильтоновых систем и, в частности, со списками нормальных форм можно познакомиться, например, в [1, 2, 7, 8]. Одной из специфик нормальных форм является тот факт, что данному набору собственных значений с данными кратностями могут соответствовать различные нормальные формы. Указанный факт может приводить к тому, что задача конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для уравнения (1) может иметь качественно различные решения, а именно, приводить к гамильтоновым системам с различными нормальными формами.

Линейной периодической гамильтоновой системой (ЛПГС) называют систему вида

$$\frac{dx}{dt} = JA(t)x, \quad x \in R^{2n}, \quad (11)$$

в которой $A(t)$ – вещественная квадратная симметрическая (порядка $2n$) и T -периодическая матрица. Обозначим через V матрицу монодромии системы (11). Отметим, что характеристический многочлен матрицы монодромии V содержит степени только четных порядков и является возвратным. В частности, если λ – это мультипликатор системы (11), то $\lambda \neq 0$, при этом числа $1/\lambda, \bar{\lambda}, -1/\bar{\lambda}$ также являются ее мультипликаторами, причем той же алгебраической и геометрической кратности и того же индекса.

Динамические системы, зависящие от малого параметра ε и описываемые уравнениями вида

$$x' = J\nabla H(x, t) + \varepsilon f(x, t), \quad x \in R^{2n},$$

будем называть квазигамильтоновыми системами; здесь $f(x, t)$ – вещественная гладкая (по x) и непрерывная (по t) вектор – функция.

3. Основные результаты

3.1. О конструировании гамильтоновой системы для уравнения (1). Предлагается следующая схема конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для уравнения (1).

На первом этапе от уравнения (1) стандартной заменой перейдем к эквивалентной системе (4). Из общих свойств линейных периодических дифференциальных уравнений и с учетом специфики системы (4) следует, что верна

Теорема 1. *Характеристическое уравнение для матрицы монодромии системы (4) содержит степени только четных порядков и является возвратным.*

На втором этапе методами теории Флоке (см., например, [14]) перейдем от периодической линейной системы (4) к эквивалентной автономной системе

$$w' = Fw, \quad y = (P(t)w, c_0), \quad (12)$$

в которой F – некоторая постоянная матрица. Этот переход осуществляет замена $x = P(t)w$, в которой $P(t)$ – невырожденная периодическая матрица, конструируемая по фундаментальной системе решений системы (4). В силу теоремы 1 характеристический многочлен $L(p)$ матрицы F содержит степени только четных порядков, а корни уравнения $L(p) = 0$ обладают свойствами, аналогичными свойствам $G1$ и $G2$ гамильтоновых матриц. Многочлену $L(p)$ с данным набором корней можно поставить в соответствие одну или несколько нормальных форм гамильтоновых матриц с тем же набором собственных значений. Выбирается одна из соответствующих гамильтоновых матриц JA .

На третьем этапе задается ненулевой вектор $c \in R^{2n}$ и гамильтонова система

$$\frac{dx}{dt} = JAx, \quad y = (x(t), c). \quad (13)$$

Теорема 2. Пусть гамильтонова система (13) наблюдаема. Тогда невырожденная замена $x = Dw$ осуществляет переход от системы (12) к системе (13).

Ниже приводятся аналогичные утверждения – теоремы 3 и 4 и их доказательства. Справедливость теоремы 2 может быть установлена по той же схеме и поэтому здесь не приводится.

Следствие 1. Пусть гамильтонова система (13) наблюдаема. Тогда уравнение (1) эквивалентно гамильтоновой системе (13).

Реализация предлагаемой схемы конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для уравнения (1) сопряжена с теми трудностями, что, во-первых, требует изучить вопрос о существовании ненулевого вектора $c \in R^{2n}$, для которого гамильтонова система (13) была бы наблюдаема. Во-вторых, построить систему (12) в явном виде можно лишь в очень специальных случаях. Ниже обсуждается реализация этой схемы для периодических уравнений (2) с малым параметром, когда невозмущенное уравнение является автономным.

3.2. О конструировании квазигамильтоновой системы для уравнения (2). В качестве приложения рассмотрим уравнение (2). Это уравнение стандартной заменой сводится к системе

$$z' = A(t, \varepsilon)z, \quad y = (z, c_0), \quad (14)$$

в которой $z, c_0 \in R^{2n}$, символ (z, c_0) обозначает скалярное произведение векторов, $A(t, \varepsilon)$ и c_0 – это, соответственно, матрица и вектор:

$$A(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n(t, \varepsilon) & 0 & -a_{n-1}(t, \varepsilon) & 0 & \dots & -a_1(t, \varepsilon) & 0 \end{bmatrix}, \quad c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Эту систему представим в виде

$$z' = [A_0 + \varepsilon S(t)]z, \quad y = (z, c_0), \quad (15)$$

где матрица $A_0 = A(t, 0)$ от t не зависит:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_{n,0} & 0 & -a_{n-1,0} & 0 & \dots & -a_{1,0} & 0 \end{bmatrix},$$

а матрица $S(t)$ имеет вид

$$S(t) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varphi_n(t) & 0 & \varphi_{n-1}(t) & 0 & \dots & \varphi_1(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (2) является автономным:

$$L_0\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0; \quad (16)$$

здесь $L_0(p)$ – многочлен:

$$L_0(p) = p^{2n} + a_{1,0}p^{2n-2} + \dots + a_{n-1,0}p^2 + a_{n,0}. \quad (17)$$

Соответственно, и система (15) при $\varepsilon = 0$ является автономной:

$$z' = A_0 z, \quad y = (z, c_0).$$

Так как многочлен $L_0(p)$ содержит степени только четных порядков, то корни уравнения $L_0(p) = 0$ обладают свойствами, аналогичными указанными свойствам G1 и G2 гамильтоновых матриц. Поэтому многочлену $L_0(p)$ с данным набором корней можно поставить в соответствие одну или несколько нормальных форм гамильтоновых матриц с тем же набором собственных значений.

Предлагается следующая схема конструирования для уравнения (1) эквивалентной квазигамильтоновой системы. На первом этапе по корням уравнения $L_0(p) = 0$ определяются возможные варианты нормальных форм искомой гамильтоновой системы. Выбирается одна из соответствующих гамильтоновых матриц JA .

На втором этапе задается ненулевой вектор $c \in R^{2n}$ и гамильтонова система

$$\frac{dx}{dt} = JA x, \quad y = (x(t), c). \quad (18)$$

Теорема 3. Пусть гамильтонова система (18) наблюдаема. Тогда уравнение (2) эквивалентно квазигамильтоновой системе:

$$\frac{dx}{dt} = (JA + \varepsilon S_0(t))x, \quad y = (x(t), c) \quad (19)$$

здесь $S_0(t) = D^{-1}S(t)D$, а $D = D(c)$ – матрица наблюдаемости системы (18).

Следствие 2. Пусть гамильтонова система (18) наблюдаема. Тогда система (15) приводима к квазигамильтоновой системе (19) невырожденной заменой переменных $z = Dx$. При этом матрицы A_0 и JA связаны равенством $A_0 = D \cdot JA \cdot D^{-1}$.

Теорема 3 может быть дополнена следующим утверждением.

Теорема 4. Пусть гамильтонова система (18) наблюдаема. Тогда замена $x = D^{-1}\tilde{y}$ (здесь $D = D(c)$ – матрица наблюдаемости системы (18), а $\tilde{y}$ – это вектор (6)) приводит уравнение (2) к эквивалентной квазигамильтоновой системе (19).

Доказательство теоремы 3. В соответствии с определением эквивалентности систем достаточно показать, что в условиях теоремы 3 выполнены равенства

$$A_0 + \varepsilon S(t) = D(JA + \varepsilon D^{-1}S(t)D)D^{-1}, \quad D^*c_0 = c.$$

Справедливость же этих соотношений следует из равенств $A_0 = D \cdot JA \cdot D^{-1}$ и $D^*c_0 = c$, установленных в [12, 13].

Доказательство теоремы 4. Условия теорем 3 и 4 совпадают. В силу теоремы 3 и следствия 2 система (15) приводима к квазигамильтоновой системе (19) невырожденной заменой переменных $z = Dx$. Но по построению решения $y(t)$ уравнения (2) и $z(t)$ системы (15) связаны равенством $z = \tilde{y}$, где $\tilde{y}$ – вектор (6). Отсюда получим, что замена $x = D^{-1}\tilde{y}$ приводит уравнение (2) к системе (19).

Для разрешимости задачи о конструировании для уравнения (2) эквивалентной квазигамильтоновой системы требуется подобрать вектор c таким образом, чтобы система (18) была наблюдаема. Естественен вопрос об условиях, когда это возможно.

В этой связи приведем вспомогательное утверждение в более общей постановке. Рассмотрим $2n$ -мерную линейную систему:

$$\frac{dx}{dt} = Bx, \quad y = (x(t), c), \quad (20)$$

в которой B – постоянная квадратная (порядка $2n$) матрица, а $c \in R^{2n}$ – ненулевой вектор. Задачей L будем называть задачу о существовании ненулевого вектора c такого, чтобы система (20) была наблюдаемой.

Лемма 1. *Задача L разрешима тогда и только тогда, когда геометрические кратности всех собственных значений матрицы B равны единице.*

Доказательство. Необходимость. Пусть задача L разрешима, т.е. существует ненулевой вектор c_0 такой, что система (20) является наблюдаемой, т.е. соответствующая матрица наблюдаемости $D(c_0)$ (см. (9)) обратима. Требуется показать, что тогда геометрические кратности всех собственных значений матрицы B равны единице. Допустим противное, т.е. пусть геометрическая кратность некоторого собственного значения λ_0 матрицы B больше единицы. Тогда и у транспонированной матрицы B^* геометрическая кратность собственного значения $\bar{\lambda}_0$ больше единицы. Для простоты пусть указанная геометрическая кратность равна двум, т.е. существуют два линейно независимых вектора e_1 и e_2 так, что $B^*e_1 = \bar{\lambda}_0 e_1$ и $B^*e_2 = \bar{\lambda}_0 e_2$.

Вектор c_0 единственным образом представляется в виде $c_0 = k_1 e_1 + k_2 e_2 + g$, где k_1 и k_2 – некоторые коэффициенты, а g – вектор, являющийся линейной комбинацией остальных собственных и присоединенных векторов матрицы B^* . Нетрудно видеть, что тогда векторы $c_0, B^*c_0, (B^*)^2 c_0, \dots, (B^*)^{2n-1} c_0$ линейно зависимы, т.е. матрица $D(c_0)$ вырождена. Получили противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть геометрические кратности всех собственных значений матрицы B равны единице. Требуется показать, что тогда задача L разрешима. У транспонированной матрицы B^* геометрические кратности всех собственных значений также равны единице. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_{2n}$ – базис в R^{2n} , образованный собственными и присоединенными векторами матрицы B^* . Положим $c_0 = e_1 + e_2 + \dots + e_{2n}$. Нетрудно видеть, что тогда векторы $c_0, B^*c_0, (B^*)^2 c_0, \dots, (B^*)^{2n-1} c_0$ линейно независимы, т.е. матрица наблюдаемости $D(c_0)$ невырождена. Достаточность доказана.

Одновременно была предложена схема конструирования вектора c , для которого задача L разрешима.

Из леммы 1 следует, что верно

Следствие 3. Задача L для системы (18) разрешима тогда и только тогда, когда геометрические кратности всех собственных значений гамильтоновой матрицы $J A$ равны единице.

3.3. Пример. Рассмотрим зависящее от малого параметра ε дифференциальное уравнение

$$y'''' + (5 + \varepsilon\varphi(t))y'' + (4 + \varepsilon\psi(t))y = 0, \quad (21)$$

в котором $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывные T -периодические функция. При $\varepsilon = 0$ уравнение является автономным:

$$y'''' + 5y'' + 4y = 0,$$

т.е. уравнением вида (16), в котором $L_0(p) = p^4 + 5p^2 + 4$. Отметим, что все четыре корня многочлена $L_0(p)$ являются чисто мнимыми: $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$, где $\omega_1 = 2$ и $\omega_2 = 1$.

Обсудим вопрос о конструировании для уравнения (21) эквивалентной квазигамильтоновой системы вида (19). Воспользуемся теоремами 3 и 4.

Многочлену $L_0(p)$ соответствуют две различные нормальные формы JA , а именно, матрицы

$$JA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma\omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ здесь } \sigma = 1 \text{ или } \sigma = -1. \quad (22)$$

В качестве вектора c будем рассматривать вектор вида $c^* = (c_1, c_2, 0, 0)$ при $c_1 = 1$ и $c_2 = 2$. В этом случае матрица наблюдаемости (9) имеет вид:

$$D(c) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 c_1 & \sigma\omega_2 c_2 \\ -\omega_1^2 c_1 & -\sigma\omega_2^2 c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^3 c_1 & -\sigma\omega_2^3 c_2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

При $c_1 = 1, c_2 = 2, \omega_1 = 2$ и $\omega_2 = 1$ имеем $\det D(c) \neq 0$. Таким образом, матрица $D(c)$ обратима и, следовательно, соответствующая гамильтонова система (18) наблюдаема.

Пусть для определенности $\sigma = 1$, т.е. в нормальной форме (22) положим $\sigma = 1$. Тогда по теореме 2 замена $x = D^{-1}\tilde{y}$ (в которой $D(c)$ – матрица (23)) приводит уравнение (21) к эквивалентной квазигамильтоновой системе (19), в которой JA – матрица (22) при $\omega_1 = 2, \omega_2 = 1$ и $\sigma = 1$, а матрица $D^{-1}S(t)D$ равна

$$D^{-1}S(t)D = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi(t) - 4\varphi(t) & 2\psi(t) - 2\varphi(t) & 0 & 0 \\ -\psi(t) + 4\varphi(t) & -2\psi(t) + 2\varphi(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Заключение

В статье изучалась задача о построении эквивалентной гамильтоновой системы для линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами, содержащего производные только четных порядков. Для решения указанной задачи предложен подход, основанный на методах теории нормальных форм и теории Флоке. Этот подход позволяет переходить к равносильной автономной гамильтоновой системе в нормальной форме. В качестве основного приложения рассмотрена задача о конструировании эквивалентной квазигамильтоновой системы для содержащего малый параметр дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами, невозмущенное уравнение которой является автономным. Для указанного уравнения предложены аналитические формулы соответствующих линейных невырожденных преобразований, приводящие уравнение к равносильной квазигамильтоновой системе.

Список источников

1. Журавлев В. Ф., Петров Ф. Г., Шундерюк М. М. Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД, 2015.
2. Meyer K., Hall G., Offin D. Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem. New York: Springer, 2009.
3. Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. М.: Наука, 1985.
4. Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Рапопорт Л. Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.

5. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. Метод пространства состояний. М.: Наука, 1970.
6. Красносельский А. М., Рачинский Д. И. Существование континуумов циклов в гамильтоновых системах управления // *АиТ*. 2001. № 2. С. 65–74.
7. Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш. Н. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М.: МЦНМО, 2005.
8. Брюно А. Д. Нормальные формы систем Гамильтона с периодическим возмущением // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2019. № 56. 27 с.
9. Красносельский А. М., Рачинский Д. И. О гамильтоновости систем Лурье // *АиТ*. 2000. № 8. С. 25–29.
10. Yumagulov M. G., Ibragimova L. S., Belova A. S. Investigation of the problem on a parametric resonance in Lurie systems with weakly oscillating coefficients // *Autom. Remote Control*. 2022. Vol. 83, № 2. P. 252–263.
11. Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Белова А. С. Методы исследования устойчивости линейных периодических систем, зависящих от малого параметра // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.* 2019. Т. 163. С. 113–126.
12. Yumagulov M. G., Ibragimova L. S. Equivalent differential equations in problems of control theory and the theory of Hamiltonian systems // *Differential Equations*. 2024. Vol. 60, № 1. P. 23–40.
13. Yumagulov M. G., Ibragimova L. S. Equivalent Hamiltonian systems for differential equations with even order derivatives // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024. Vol. 45, № 6. P. 2792–2801.
14. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
15. Маркеев А. П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.–Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2009.

References

1. Zhuravlev, V. F., Petrov, F. G. and Shunderuk, M. M. (2015), *Izbranye zadachi gamil'tonovoy mekhaniki* [Selected problems in Hamiltonian mechanics], Lenand, Moscow, Russia.
2. Meyer, K. R., Hall, G. R. and Offin, D. (2009), *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*, 2nd ed., Springer, New York, USA.
3. Krasnosel'skii, M.A., Lifshits, E.A. and Sobolev, A.V. (1985), *Pozitivnye lineinye sistemy: metod polozhitel'nykh operatorov* [Positive linear systems: The method of positive operators], Nauka, Moscow, Russia.
4. Polyak, B. T., Khlebnikov, M. V. and Rapoport, L. B. (2019), *Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Mathematical theory of automatic control], Lenand, Moscow, Russia.
5. Zadeh, L. A. and Desoer, C. A. (1970), *Teoriya lineinykh sistem. Metod prostranstva sostoyaniy* [Theory of linear systems. The state space method], Nauka, Moscow, Russia.
6. Krasnosel'skii, A. M. and Rachinskii, D. I. (2001), "Existence of continua of cycles in Hamiltonian control systems", *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], vol. 62, no 2, pp. 65–74.
7. Wang, D., Li, C. and Chow, S.-N. (2005), *Normal'nye formy i bifurkatsii vektornykh poлей na ploskosti* [Normal forms and bifurcations of vector fields on the plane], MCCME, Moscow, Russia.
8. Bruno, A. D. (2019), "Normal forms of Hamiltonian systems with periodic perturbation", *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [Keldysh Institute Preprints], no 56, 27 p.

9. Krasnosel'skii, A. M. and Rachinskii, D. I. (2000), "On Hamiltonian nature of Lurie systems", *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], vol. 61, no 8, pp. 25–29.
10. Yumagulov, M. G., Ibragimova, L. S. and Belova, A. S. (2022), "Investigation of the problem on a parametric resonance in Lurie systems with weakly oscillating coefficients", *Automation and Remote Control*, vol. 83, no 2, pp. 252–263.
11. Yumagulov, M. G., Ibragimova, L. S. and Belova, A. S. (2019), "Methods for studying stability of linear periodic systems depending on a small parameter", *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya* [Advances in Science and Technology. Ser. Contemporary Mathematics and Its Applications], vol. 163, pp. 113–126.
12. Yumagulov, M. G. and Ibragimova, L. S. (2024), "Equivalent differential equations in problems of control theory and the theory of Hamiltonian systems", *Differential Equations*, vol. 60, no 1, pp. 23–40.
13. Yumagulov, M. G. and Ibragimova, L. S. (2024), "Equivalent Hamiltonian systems for differential equations with even order derivatives", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 45, no 6, pp. 2792–2801.
14. Yakubovich, V. A. and Starzhinskii, V. M. (1972), *Lineinye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya* [Linear differential equations with periodic coefficients and their applications], Nauka, Moscow, Russia.
15. Markeev, A. P. (2009), *Lineinye gamiltonovy sistemy i nekotorye zadachi ob ustoichivosti dvizheniya sputnika otnositel'no tsentra mass* [Linear Hamiltonian systems and some problems of satellite motion stability about the center of mass], Institute of Computer Science, Moscow-Izhevsk, Russia.

Информация об авторах:

М. Г. Юмагулов – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления, Уфимский университет науки и технологий (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32а);

Л. С. Ибрагимова – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Уфимский университет науки и технологий (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32а);

Т. С. Оripов – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры высшей математики Денауского института предпринимательства и педагогики (190503, Узбекистан, г. Денау, ул. Ш.Рашидова, д. 78).

Information about the authors:

M. G. Yumagulov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Head of the Department of Differential Equations and Control Theory, Ufa University of Science and Technology (32a Zaki Validi St., Ufa, Russia, 450076);

L. S. Ibragimova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor, Department of Differential Equations and Control Theory, Ufa University of Science and Technology (32a Zaki Validi St., Ufa, Russia, 450076);

T. S. Oripov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor of the Department of Higher Mathematics at the Denau Institute of Entrepreneurship and Pedagogy (78 Sh. Rashidova st., Denau, Uzbekistan, 190503).