Научная статья
УДК 517.977.56
DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-16-28
https://elibrary.ru/enaghd

Об оптимальности квазиособых управлений в одной задаче оптимального управления, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением с нетиповым функционалом

Илаха Фирдовис кызы Нагиева[1], Камил Байрамали оглы Мансимов[2]
[1,2]Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджана, Баку, Азербайджан
[2]Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
[1]ilahanagiyeva80@gmail.com
[2]kamilbmansimov@gmail.com

Аннотация. Рассматривается одна нетиповая задача оптимального управления, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений и общим многоточечным критерием качества. Область управления объектом является выпуклым ограниченным множеством. Вычислена формула второго порядка приращения функционала, соответствующая двум допустимым управлениям. С помощью этого приращения впервые доказан аналог линеаризованного принципа максимума Л. С. Понтрягина. Далее исследован случай вырождения линеаризованного принципа максимума (квазиособый случай). Установлены интегральные поточечные необходимые условия оптимальности квазиособых управлений, носящие конструктивный характер.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение; многоточечный функционал; область управления; допустимое управление; линеаризованный принцип максимума; квазиособое управление.*

Для цитирования: Нагиева И. Ф., Мансимов К. Б. Об оптимальности квазиособых управлений в одной задаче оптимального управления, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением с нетиповым функционалом // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 4(71). С. 16–28. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-16-28. https://elibrary.ru/enaghd.

Статья поступила в редакцию 30.04.2025; одобрена после рецензирования 18.10.2025; принята к публикации 08.12.2025.

Research article

About the Quasi-Singular Controls Optimality in a Single Optimal Control Problem Described by an Ordinary Differential Equation With an Atypical Functional

Ilaha F. Nagiyeva[1], Kamil B. Mansimov[2]
[1,2]Institute of Control System of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan
[2]Baku State University, Baku, Azerbaijan
[1]ilahanagiyeva80@gmail.com
[2]kamilbmansimov@gmail.com

Abstract. A non-standard optimal control problem governed by a system of ordinary differential equations with a general multi-point quality criterion is analyzed. The control domain represents a convex and bounded set. We derive a second-order formula for the increment of the functional associated with two admissible controls. This result allows us to prove an analogue of the linearized maximum principle introduced by L. S. Pontryagin. Furthermore, we investigate the case when this principle degenerates into what is known as the quasi-singular scenario. Finally, integral pointwise necessary conditions ensuring the optimality of such quasi-singular controls are formulated in a constructively applicable form.

Keywords: *differential equation; multipoint functional; control domain; admissible control; linearized maximum principle; quasi-singular control.*

For citation: Nagiyeva, I. F. and Mansimov, K. B. (2025), "About the Quasi-Singular Controls Optimality in a Single Optimal Control Problem Described by an Ordinary Differential Equation With an Atypical Functional", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 4(71), pp. 16–28, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-16-28, https://elibrary.ru/enaghd.

The article was submitted 30.04.2025; approved after reviewing 18.10.2025; accepted for publication 08.12.2025.

Введение

В монографии [1] Н. Н. Моисеев рассмотрел задачу оптимального управления, динамика которой описывался одной системой обыкновенных дифференциальных уравнений и нетиповым функционалом качества. Для рассматриваемой задачи оптимального управления он доказал необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина [2, 3].

В предлагаемой работе рассматривается аналогичная задача оптимального управления, но с более общим многоточечным функционалом качества, где область управления является выпуклым ограниченным множеством. Учитывая специфические особенности функционала качества, в отличие от известных работ (см., например, [1–5]), сопряженная функция введена как решение линейного интегрального уравнения типа Вольтерра, что позволила построить общую формулу приращения критерия качества при менее жестких ограничениях. Доказан аналог линеаризованного принципа максимума [4]. Отдельно рассмотрен случай его вырождения (квазиособый случай) [5–8]. Применяя аналог схему вывода необходимых условий оптимальности квазиособых управлений из работ [7, 8], получены интегральное и поточечное необходимые условия оптимальности квазиособых управлений, позволяющие сузить множество допустимых управлений, подозрительных на оптимальность.

1. Постановка задачи

Пусть управляемый непрерывный процесс на заданном отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ описывается задачей Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad t \in T, \tag{1.1}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

Предполагается, что заданная n-мерная вектор-функция $f(t, x, u)$, непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) до второго порядка включительно, x_0 – заданный постоянный n-мерный вектор, $u(t) - r$ -мерный, кусочно-непрерывный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и выпуклого множества $U \subset R^r$ (область управления), т.е.

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in T. \tag{1.3}$$

Каждую управляющую функцию $u(t)$, удовлетворяющую этим требованиям, назовем *допустимым управлением*.

Считается, что при каждом заданном допустимом управлении задача Коши (1.1)–(1.2) имеет единственное непрерывное и кусочно-гладкое решение (т.е. производная решения задачи Коши кусочно-непрерывная вектор-функция с конечным числом точек разрыва первого рода).

Через $T_i, i = \overline{1, k}$ $(t_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_k \leq t_1)$ – обозначим заданные точки.

Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ – заданная, дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, а $F(t, s, a, b)$ – заданная скалярная функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (a, b) до второго порядка включительно.

На решениях задачи Коши (1.1)–(1.2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал

$$J(u) = \varphi\big(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)\big) + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} F(t, s, x(t), x(s))ds\,dt \tag{1.4}$$

и рассмотрим задачу о нахождении минимального значения функционала (1.4) при ограничениях (1.1)–(1.3).

Заметим, что некоторые практические задачи оптимального управления с нетиповым критерием качества перечислены в монографии [1]. В частности, задачи оптимального управления с нетиповым критерием качества возникают в задачах оптимального синтеза.

Некоторые задачи оптимального управления, с нетиповым функционалом качества исследованы в работах [9–11].

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимальное значение функционалу (1.4), при ограничениях (1.1)–(1.3), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\big(u(t), x(t)\big)$ – оптимальным процессом.

Задача заключается в нахождении необходимых условий оптимальности первого и второго порядков в рассматриваемой задаче оптимального управления.

2. Специальная формула приращения второго порядка функционала

Пусть $\big(u(t), x(t)\big)$ и $\big(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)\big)$ – некоторые допустимые процессы.

Тогда приращение $\Delta x(t)$ траектории $x(t)$ будет решением следующей задачи Коши:

$$\Delta\dot{x}(t) = f\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big) - f\big(t, x(t), u(t)\big), \tag{2.1}$$

$$\Delta x(t_0) = 0. \tag{2.2}$$

Введем аналог функции Понтрягина:

$$H(t, x, u, \psi) = \psi' f(t, x, u),$$

где штрих (') операция транспонирования, а $\psi(t)$ пока произвольная n-мерная вектор-функция.

Учитывая введенные обозначения и выражение аналога функции Понтрягина, приращение функционала (1.4) можно представить в виде

$$J(\bar{u}) - J(u) = \varphi\big(\bar{x}(T_1), \bar{x}(T_2), \dots, \bar{x}(T_k)\big) -$$

$$-\varphi\big(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)\big) + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \Big(F\big(t, s, \bar{x}(t), \bar{x}(s)\big) - F\big(t, s, x(t), x(s)\big)\Big) ds\, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\Delta\dot{x}(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} [H\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) - H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)]dt. \tag{2.3}$$

Используя формулу Тейлора, после некоторых преобразований, из формулы приращения (2.3) получаем, что

$$J(\bar{u}) - J(u) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi'\big(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)\big)}{\partial x_i} \Delta x(T_i) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \Delta x'(T_i)\frac{\partial\varphi'\big(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)\big)}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x\big(T_j\big) + o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta x(T_i)\|\right]^2\right) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\Delta\dot{x}(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial x}\Delta x(t)\, dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\Delta x'(t)\frac{\partial H'\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial x^2}\Delta x(t) +$$

$$+ 2\Delta u'(t)\frac{\partial H'\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u \partial x}\Delta x(t) + \Delta u'(t)\frac{\partial H'\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u^2}\Delta u(t)\Bigg] dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} o_2[(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|)^2]dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\frac{\partial F'\big(t, s, x(t), x(s)\big)}{\partial a}\Delta x(t) +$$

$$+ \frac{\partial F'\big(t, s, x(t), x(s)\big)}{\partial b}\Delta x(s)\Bigg] dsdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\Delta x'(t)\frac{\partial F\,\big(t, s, x(t), x(s)\big)}{\partial a^2}\Delta x(t) + 2\Delta x'(t)\frac{\partial F\big(t, s, x(t), x(s)\big)}{\partial a \partial b}\Delta x(s) +$$

$$+\Delta x'(s)\frac{\partial H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial b^2}\Delta x(s)\Bigg]dsdt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}o_3([\|\Delta x(t)\|+\|\Delta x(s)\|]^2)ds\,dt. \qquad (2.4)$$

Ясно, что

$$\Delta x(t)=\int_{t_0}^{t}\Delta\dot{x}(\tau)d\tau. \qquad (2.5)$$

Из формулы (2.5) получаем, что

$$\Delta x(T_i)=\int_{t_0}^{t_1}\alpha_i(t)\Delta\dot{x}(t)dt. \qquad (2.6)$$

Здесь $\alpha_i(t)$ характеристическая функция отрезка $[t_0,T_i]$.

Используя, формулы (2.5) и (2.6) формула приращения (2.4) может быть представлено в виде

$$J(\bar{u})-J(u)=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t)\frac{\partial\varphi'\big(x(T_1),x(T_2),\dots,x(T_k)\big)}{\partial x_i}\Delta\dot{x}(t)dt+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\Delta x'(T_i)\frac{\partial^2\varphi\big(x(T_1),x(T_2),\dots,x(T_k)\big)}{\partial x_i\partial x_j}\Delta x\big(T_j\big)+o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\|\Delta x(T_i)\|\right]^2\right)+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\Delta\dot{x}(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\frac{\partial H'\big(\tau,x(\tau),u(\tau),\psi(\tau)\big)}{\partial x}d\tau\right]\Delta\dot{x}(t)dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H'\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u}\Delta u(t)dt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\Delta x'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial x^2}\Delta x(t)+$$
$$+2\Delta u'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u\partial x}\Delta x(t)+\Delta u'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u^2}\Delta u(t)\Bigg]dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}o_2([\|\Delta x(t)\|+\|\Delta u(t)\|]^2)dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\frac{\partial F'\big(\tau,s,x(\tau),x(s)\big)}{\partial a}d\tau\right]\Delta\dot{x}(t)ds\,dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\frac{\partial F'\big(s,\tau,x(s),x(\tau)\big)}{\partial b}d\tau\right]\Delta\dot{x}(t)ds\,dt+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\Delta x'(t)\frac{\partial^2 F\big(t,s,x(t),x(s)\big)}{\partial a^2}\Delta x(t)+2\Delta x'(t)\frac{\partial^2 F\big(t,s,x(t),x(s)\big)}{\partial a\partial b}\Delta x(s)+$$
$$+\Delta x'(s)\frac{\partial^2 F\big(t,s,x(t),x(s)\big)}{\partial b^2}\Delta x(s)\Bigg]dsdt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}o_3([\|\Delta x(t)\|+\|\Delta x(s)\|]^2)ds\,dt\,. \qquad (2.7)$$

Теперь предположим, что произвольная вектор-функция $\psi(t)$ является решением линейного интегрального уравнения

$$\psi(t) = -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) \frac{\partial \varphi'\big(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)\big)}{\partial x_i} + \int_t^{t_1} \frac{\partial H\big(\tau, x(\tau), u(\tau), \psi(\tau)\big)}{\partial x} d\tau -$$
$$-\int_t^{t_1} \left[\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F\big(\tau, s, x(\tau), x(s)\big)}{\partial a} ds \right] d\tau - \int_t^{t_1} \left[\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F\big(s, \tau, x(s), x(\tau)\big)}{\partial b} ds \right] d\tau.$$

Тогда формула приращения (2.7) примет вид

$$J(\bar{u}) - J(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u} \Delta u(t) dt +$$
$$+\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \Delta x'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi\big(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)\big)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x\big(T_j\big) -$$
$$-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta x'(t) \frac{\partial^2 H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial x^2} \Delta x(t) + \right.$$
$$\left. +2\Delta u'(t) \frac{\partial^2 H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u \partial x} \Delta x(t) + \Delta u'(t) \frac{\partial^2 H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u^2} \Delta u(t) \right] dt -$$
$$+\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta x'(t) \frac{\partial^2 F\big(t, s, x(t), x(s)\big)}{\partial a^2} \Delta x(t) + 2\Delta x'(t) \frac{\partial^2 F\big(t, s, x(t), x(s)\big)}{\partial a \partial b} \Delta x(s) + \right.$$
$$\left. + \Delta x'(s) \frac{\partial^2 F\big(t, s, x(t), x(s)\big)}{\partial b^2} \Delta x(s) \right] ds dt -$$
$$+o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k} \|\Delta x(T_i)\| \right]^2 \right) - \int_{t_0}^{t_1} o_2([\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|]^2) dt +$$
$$+\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} o_3([\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(s)\|]^2) ds\, dt. \tag{2.8}$$

Используя задачу (2.1)–(2.2) по аналогии с [6] можно доказать справедливость оценки

$$\|\Delta x(t)\| \le L \int_{t_0}^{t} \|\Delta u(\tau)\| d\tau, \tag{2.9}$$

где $L = const > 0$ – некоторая постоянная.

Далее, в силу гладкости правой части уравнения (1.1) выводится, что $\Delta x(t)$ является решением линеаризованной задачи:

$$\Delta \dot{x}(t) = f_x\big(t, x(t), u(t)\big) \Delta x(t) - f_u\big(t, x(t), u(t)\big) \Delta u(t) +$$
$$+o_4(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|), t \in T, \tag{2.10}$$

$$\Delta x(t_0) = 0. \tag{2.11}$$

Так как по предложению, область управления U выпукло, то специальное приращение допустимого управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \varepsilon\,[v(t) - u(t)], \qquad t \in T. \tag{2.12}$$

Здесь $v(t) -$ произвольное допустимое управление, а $\varepsilon \in [0, 1]$ произвольное число.

Через $\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим, специальное приращение траектории $x(t)$, отвечающее специальному приращению (2.12) управления $u(t)$.

Учитывая оценку (2.9) и формулу (2.12), с помощью линеаризованной задачи (2.10)–(2.11) доказывается справедливость следующего разложения:

$$\Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon\, l(t) + o_5(\varepsilon; t). \tag{2.13}$$

Здесь $l(t) - n$-мерная вектор-функция, являющаяся решением задачи

$$\dot l(t) = f_x\big(t, x(t), u(t)\big)\, l(t) - f_u\big(t, x(t), u(t)\big)\,[v(t) - u(t)], t \in T, \tag{2.14}$$

$$l(t_0) = 0. \tag{2.15}$$

Учитывая формулы (2.12) и (2.13), из формулы приращения (2.8) получаем, что

$$\begin{gathered}
J(u + \Delta u_\varepsilon) - J(u) = -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u}[v(t) - u(t)]dt + \\
+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} l'(T_i)\frac{\partial^2\varphi\big(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)\big)}{\partial x_i \partial x_j} l\big(T_j\big) - \\
-\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Bigg[l'(t)\frac{\partial^2 H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial x^2} l(t) + \\
+2[v(t) - u(t)]'\frac{\partial^2 H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u \partial x} l(t) + \\
+[v(t) - u(t)]'\frac{\partial^2 H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u^2}[v(t) - u(t)]\Bigg]dt + \\
+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\Bigg[l'(t)\frac{\partial^2 F\big(t, s, x(t), x(s)\big)}{\partial a^2} l(t) + 2l'(t)\frac{\partial^2 F\big(t, s, x(t), x(s)\big)}{\partial a \partial b} l(s) + \\
+l'(s)\frac{\partial^2 F\big(t, s, x(t), x(s)\big)}{\partial b^2} l(s)\Bigg]ds dt + o(\varepsilon^2).
\end{gathered} \tag{2.16}$$

3. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков

Специальное разложение (2.16) функционала (1.4) позволяет получить ряд необходимых условий оптимальности первого и второго порядков.

Пусть $u(t)$ оптимальное управление. Тогда из разложения (2.16) следует.

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (1.1)–(1.4) необходимо, чтобы для всех $v(t) \in U, t \in \mathrm{T}$ выполнялось неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u}[v(t) - u(t)]dt \leq 0. \tag{3.1}$$

Неравенство (3.1) является аналогом линеаризованного принципа максимума (см., например, [3–6]).

Учитывая произвольность допустимого управления $v(t)$, и используя неравенство (3.1), можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство

$$\frac{\partial H'\big(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta)\big)}{\partial u}[v - u(\theta)] \leq 0 \tag{3.2}$$

выполнялось для всех $\theta \in [t_0, t_1)$ и $v \in U$.

Доказательство. Пусть $v \in U$ − произвольный вектор, а $\varepsilon > 0$ − произвольное достаточно малое число.

Тогда произвольное допустимое управление $v(t)$ можно определить по формуле

$$v(t) = \begin{cases} v, t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ u(t), t \in T \backslash [\theta, \theta + \varepsilon). \end{cases}$$

Учитывая эту формулу в неравенстве (3.1) после несложных преобразований, получим, что

$$\varepsilon \frac{\partial H'\big(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta)\big)}{\partial u}[v - u(\theta)] + o(\varepsilon) \leq 0.$$

Из этого неравенства, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует неравенство (3.2).

Здесь $\theta \in [t_0, t_1)$ является произвольной точкой непрерывности управления $u(t)$.

Неравенство (3.2) является аналогом дифференциального принципа максимума (см., например, [3, 5]).

Можно показать, что неравенства (3.1) и (3.2) эквивалентны.

Перейдем к изучению вырождения аналога линеаризованного условия максимума.

Определение 1. Если для всех допустимых управлений $v(t)$ выполняется соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u}[v(t) - u(t)]dt = 0,$$

то управление $u(t)$ назовем квазиособым управлением в задаче (1.1)–(1.4).

Из разложения (2.16) следует утверждение

Теорема 3. Для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} l'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi\big(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)\big)}{\partial x_i \partial x_j} l(T_j) +$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \left[l'(t) \frac{\partial^2 F\big(t, s, x(t), x(s)\big)}{\partial a^2} l(t) + 2l'(t) \frac{\partial^2 F\big(t, s, x(t), x(s)\big)}{\partial a \partial b} l(s) + \right.$$

$$\left. + l'(s) \frac{\partial^2 F\big(t, s, x(t), x(s)\big)}{\partial b^2} l(s) \right] dsdt - \int_{t_0}^{t_1} \left[l'(t) \frac{\partial^2 H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial x^2} l(t) + \right.$$

$$+2[v(t) - u(t)]' \frac{\partial^2 H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)}{\partial u \partial x} l(t) +$$

$$+[v(t)-u(t)]'\frac{\partial^2 H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u^2}[v(t)-u(t)]\Bigg]dt \geq 0 \qquad (3.3)$$

выполнялось для всех $v(t) \in U, t \in \mathrm{T}$.

Неравенство (3.3) является неявным необходимым условием оптимальности квазиособых управлений. Из него можно получить необходимое условие оптимальности квазиособых управлений, выраженное через параметры рассматриваемой задачи управления.

Запишем представление задачи Коши (2.14)–(2.15):

$$l(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)f_u(\tau,x(\tau),u(\tau))[v(\tau)-u(\tau)]d\tau. \qquad (3.4)$$

Здесь $\Phi(t,\tau)$ $(n\times n)$ матрица Коши, являющаяся решением задачи

$$\frac{\partial\Phi(t,\tau)}{\partial\tau}=-\Phi(t,\tau)f_x(\tau,x(\tau),u(\tau)),$$
$$\Phi(t,t)=E,$$

где E − единичная матрица.

Введем обозначение

$$Q(t,\tau)=\Phi(t,\tau)f_u(\tau,x(\tau),u(\tau)).$$

Из представления (3.4) следует, что

$$l(T_i)=\int_{t_0}^{t_1}\alpha_i(\tau)Q(T_i,\tau)[v(\tau)-u(\tau)]d\tau. \qquad (3.5)$$

Учитывая представление (3.4), получаем, что

$$\sum_{i,j=1}^{k} l'(T_i)\frac{\partial^2\varphi\big(x(T_1),x(T_2),\ldots,x(T_k)\big)}{\partial x_i\partial x_j}l\big(T_j\big)=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[v(\tau)-u(\tau)]'\,Q'(T_i,\tau)\alpha_i(\tau)\frac{\partial^2\varphi\big(x(T_1),x(T_2),\ldots,x(T_k)\big)}{\partial x_i\partial x_j}\times$$
$$\times Q\big(T_j,s\big)\alpha_j(s)[v(s)-u(s)]dsd\tau. \qquad (3.6)$$

Далее, используя представление (3.4), доказываются тождества

$$\int_{t_0}^{t_1}[v(t)-u(t)]'\frac{\partial^2 H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u\partial x}l(t)\,dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t}[v(t)-u(t)]'\frac{\partial^2 H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u\partial x}Q(t,\tau)\,[v(\tau)-u(\tau)]d\tau\right]dt, \qquad (3.7)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}l'(t)\frac{\partial^2 H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial x^2}l(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[v(\tau)-u(\tau)]'\times$$
$$\times\left[\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}Q'(t,\tau)\frac{\partial^2 H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial x^2}Q(t,s)dt\right][v(s)-u(s)]dsd\tau, \qquad (3.8)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} l'(t)\frac{\partial^2 F\big(t,s,x(t),x(s)\big)}{\partial a^2} l(t)\,dsdt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[v(\alpha)-u(\alpha)]'\times$$

$$\times\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{\max(\alpha,\beta)}^{t_1} Q'(t,\alpha)\frac{\partial^2 F\big(t,s,x(t),x(s)\big)}{\partial a^2}Q(t,\beta)ds\,dt\right][v(\beta)-u(\beta)]d\alpha d\beta, \tag{3.9}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} l'(t)\frac{\partial^2 F\big(t,s,x(t),x(s)\big)}{\partial a\partial b} l(s) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[v(\alpha)-u(\alpha)]'\times$$

$$\times\left[\int_{\alpha}^{t_1}\int_{\beta}^{t_1} Q'(t,\alpha)\frac{\partial^2 F\big(t,s,x(t),x(s)\big)}{\partial a\partial b}Q(s,\beta)ds\,dt\right][v(\beta)-u(\beta)]d\alpha d\beta, \tag{3.10}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} l'(t)\frac{\partial^2 F\big(t,s,x(t),x(s)\big)}{\partial b\partial a} l(s) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[v(\alpha)-u(\alpha)]'\times$$

$$\times\left[\int_{\alpha}^{t_1}\int_{\beta}^{t_1} Q'(t,\alpha)\frac{\partial^2 F\big(t,s,x(t),x(s)\big)}{\partial b\partial a}Q(s,\beta)ds\,dt\right][v(\beta)-u(\beta)]d\alpha d\beta, \tag{3.11}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} l'(s)\frac{\partial^2 F\big(t,s,x(t),x(s)\big)}{\partial b^2} l(s)\,dsdt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[v(\alpha)-u(\alpha)]'\times$$

$$\times\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{\max(\alpha,\beta)}^{t_1} Q'(s,\alpha)\frac{\partial^2 F\big(t,s,x(t),x(s)\big)}{\partial b^2}Q(s,\beta)ds\,dt\right][v(\beta)-u(\beta)]d\alpha d\beta. \tag{3.12}$$

Здесь, как было отмечено

$$Q(t,\tau)=\Phi(t,\tau)\frac{\partial f\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)}{\partial u}.$$

Введем обозначение

$$K(\alpha,\beta) = -Q'(x_1,\alpha)\frac{\partial^2\varphi\left(a(x_1)\right)}{\partial a^2}Q(x_1,\beta) -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{\max(\alpha,\beta)}^{t_1} Q'(t,\alpha)\frac{\partial^2 F\big(t,s,x(t),x(s)\big)}{\partial a^2}Q(t,\beta)dt\right]ds -$$

$$-\int_{\alpha}^{t_1}\left[\int_{\beta}^{t_1} Q'(t,\alpha)\frac{\partial^2 F\big(t,s,x(t),x(s)\big)}{\partial a\partial b}Q(s,\beta)ds\right]dt -$$

$$-\int_{\alpha}^{t_1}\left[\int_{\beta}^{t_1} Q'(s,\alpha)\frac{\partial^2 F\big(t,s,x(t),x(s)\big)}{\partial b\partial a}Q(t,\beta)ds\right]dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{\max(\alpha,\beta)}^{t_1} Q'(s,\alpha)\frac{\partial^2 F\big(t,s,x(t),x(s)\big)}{\partial b^2}Q(s,\beta)ds\right]dt -$$

$$-\int\limits_{\max(\alpha,\beta)}^{t_1} Q'(t,\alpha)\frac{\partial^2 H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial x^2}Q(t,\beta)dt.$$

Учитывая введенное обозначение и тождества (3.7)–(3.12), неравенство (3.3) представляется в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_1}[v(\alpha)-u(\alpha)]'K(\alpha,\beta)\,[v(\beta)-u(\beta)]d\alpha\, d\beta +$$
$$+2\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\int\limits_{t_0}^{t}[v(t)-u(t)]'\frac{\partial^2 H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u\partial x}Q(t,\tau)\,[v(\tau)-u(\tau)]d\tau\right]dt +$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}[v(t)-u(t)]'\frac{\partial^2 H\big(t,x(t),u(t),\psi(t)\big)}{\partial u^2}[v(t)-u(t)]dt \le 0. \qquad (3.13)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 4. Для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче оптимального управления необходимо, чтобы неравенство (3.13) выполнялось для всех $v(t) \in U, t \in \mathrm{T}$.

Как видно, неравенство (3.13) в отличие от неравенства (3.3), носит конструктивный характер. Из этого интегрального необходимого условия оптимальности, используя произвольность допустимого управления $v(t)$, можно получить относительно легко проверяемые поточечные необходимые условия оптимальности второго порядка.

Приведем один из них.

Теорема 5. Для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ рассматриваемой задаче необходимо, чтобы для всех $v \in U$ и $\theta \in [t_0, t_1)$ выполнялось неравенство

$$[v-u(\theta)]'\frac{\partial^2 H\big(\theta,x(\theta),u(\theta),\psi(\theta)\big)}{\partial u^2}[v-u(\theta)] \le 0. \qquad (3.14)$$

Заметим, что ряд необходимых условий оптимальности квазиособых управлений в задачах оптимального управления динамика, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, с терминальным критерием качества получены в работах [3–7].

Заключение

В работе, при предположении выпуклости области управления, с помощью квазивариаций вычислено специальное приращение второго порядка функционала качества. Используя специального приращение функционала качества получены необходимые условия оптимальности первого порядка в форме линеаризованного интегрального и дифференциального условия оптимальности.

Доказано общее необходимое условие оптимальности квазиособых управлений, носящих конструктивный характер.

Изучен один частный случай (теорема 5).

Список источников

1. *Элементы* теории оптимальных систем / Моисеев. Н. Н. М.: Наука, 1975. 528 с.
2. *Принцип* максимума в оптимальном управлении / Понтрягин Л. С. М.: URSS, 2024. 72 с.

3. *Методы* оптимизации / Габасов Р., Кириллова Ф. М., Альсевич В. В. Минск: Изд-во "Четыре четверти", 2011. 472 с. ISBN: 978-985-6981-52-7. EDN XTHIJL.
4. *Принцип* максимума в теории оптимального управления / Габасов Р., Кириллова Ф. М. М.: URSS, 2018. 272 с.
5. *Особые* оптимальные управления / Габасов Р., Кириллова Ф. М. М: URSS, 2013. 256 с.
6. *Особые* управления в системах с запаздыванием / Мансимов К. Б. Баку: ЭЛМ, 1999. 175 с.
7. *Мансимов К. Б.* Многоточечные необходимые условия оптимальности квазиособых управлений // Автоматика и телемеханика. 1982. № 10. С. 53–58.
8. *Исмайлов Р. Р.*, *Мансимов К. Б.* Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2006. Т. 46, № 10. С. 1674–1686.
9. *Нагиева И. Ф., Мансимов К. Б.* Необходимые условия оптимальности особых управлений в задаче управления типа Моисеева // Проблемы управления и информатики. 2006. № 5. С. 52–63.
10. *Мансимов К. Б., Нагиева И. Ф.* Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной задаче оптимального управления с нетипичным критерием качества // Вестник Томского унив. Управление, техника и информатика. 2023. № 64. С. 11–20. DOI 10.17223/19988605/64/2. EDN GHXADE.
11. *Mansimov K. B., Nagiyeva I. F.* Analogue of Eulers equation and second order optimality conditions in one N. N. Mouseyev type control problems // Informatics and control problems. 2023. Issue 2. P. 67−77.

References

1. Moiseev, N. N. (1975), *Elements of the Theory of Optimal Systems*, Nauka, Moscow, 528 p.
2. Pontryagin, L. S. (2024), *The Maximum Principle in Optimal Control*, URSS, Moscow, 72 p.
3. Gabasov, R., Kirillova, F. M. and Alsevich, V. V. (2011), *Optimization Methods*, Four Quarters Publishing House, Minsk, 472 p.
4. Gabasov, R. and Kirillova, F. M. (2018), *The Maximum Principle in Optimal Control Theory*, URSS, Moscow, 272 p.
5. Gabasov, R. and Kirillova, F. M. (2013), *Special Optimal Controls*, URSS, Moscow, 256 p.
6. Mansimov, K. B. (1999), *Singular controls in systems with delay*, ELM, Baku, 175 p.
7. Mansimov, K. B. (1982), "Multipoint necessary optimality conditions for quasi-singular controls", *Automation and Telemechanics*, no 10, pp. 53−58.
8. Ismailov, R. R. and Mansimov, K. B., (2006), "On optimality conditions in one-step control problem", *Zhurn. Vychisl. Mat. i Mathematical Physics,* vol. 46, no 10, pp. 1674–1686.
9. Nagieva, I. F. and Mansimov, K. B. (2006), "Necessary optimality conditions for singular controls in a Moiseyev-type control problem", *Problems of Control and Informatics*, no 5, pp. 52−63.
10. Mansimov, K. B. and Nagieva, I. F. (2023) "Necessary optimality conditions of the first and second orders in one optimal control problem with an atypical quality criterion", *Bulletin of Tomsk University. Series: Management, Engineering and Informatics*, issue 64, pp. 11−20.

11. Mansimov, K. B. and Nagiyeva, I. F. (2023) "Analogue of Eulers equation and second-order optimality conditions in one N. N. Mouseyev type control problems", *Informatics and control problems*, issue 2, pp. 67−77.

Информация об авторах:
И. Ф. Нагиева – научный сотрудник лаборатории "Методы управления в сложных динамических системах" института Систем управления Министерства Науки и Образования Азербайджана (Азербайджан, AZ 1141, г. Баку, ул. Бахтияра Вагабзаде, д. 68);
К. Б. Мансимов – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией "Методы управления в сложных динамических системах" института Систем управления Министерства Науки и Образования Азербайджана (Азербайджан, AZ 1141, г. Баку, ул. Бахтияра Вагабзаде, д. 68), AuthorID247352.

Information about the authors:
I. F. Nagiyeva – research fellow of the laboratory "Control Methods in Complex Dynamic Systems" of the Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan (68, B. Vagabzade St., Baku, Azerbaijan, AZ1141);
K. B. Mansimov – Doctor of Sciences (Physical and Mathematical), Professor, Head of the Laboratory "Control in Complex Dynamical Systems" of the Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan (68, B. Vagabzade St., Baku, Azerbaijan, AZ1141), AuthorID 247352;