

МАТЕМАТИКА

Научная статья

УДК 517.977.56

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-5-19

<https://elibrary.ru/tmwqhc>

**К необходимым условиям оптимальности
первого и второго порядка
в задаче оптимального управления
дискретными системами уравнений типа Россера**

Севиндж Шамистан кызы Кадырова¹, Камил Байрамали оглы Мансимов²

¹Институт систем управления Министерства Науки и Образования Азербайджана, Баку, Азербайджан

¹sevinc.qadirova@mail.ru

²Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

²kamilbmansimov@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимального управления процессом, описываемая системой нелинейных разностных уравнений типа Россера. Процесс управляется с помощью граничного условия. Граничное условие является решением аналога задачи Коши для нелинейного разностного уравнения типа Вольтерра. Область управления является ограниченной и открытой. Используя специальную классическую вариацию управляющей функции вычислены первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционала качества. Учитывая произвольность допустимой вариации управляющей функции, получено необходимое условие оптимальности первого порядка типа аналога уравнения Эйлера из вариационного исчисления. Принимая во внимания неотрицательность второй вариации функционала вдоль оптимального управления, доказано общее необходимое условие оптимальности второго порядка. Из него получен ряд необходимых условий оптимальности, носящие явный характер, т. е. выраженные через параметры рассматриваемой задачи оптимального управления.

Ключевые слова: система уравнений типа Россера; граничное управление; нелинейное разностное уравнение типа Вольтерра; оптимальное управление; аналог уравнения Эйлера; необходимое условие оптимальности второго порядка.

Для цитирования: Кадырова С. Ш., Мансимов К. Б. К необходимым условиям оптимальности первого и второго порядка в задаче оптимального управления дискретными системами уравнений типа Россера // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 2(73). С. 5–19. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-5-19. <https://elibrary.ru/tmwqhc>.

Статья поступила в редакцию 30.04.2025; одобрена после рецензирования 30.10.2025; принята к публикации 10.06.2026.



© Кадырова С. Ш., Мансимов К. Б., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

MATHEMATICS

Research article

To the Necessary Conditions of Optimality of the First and Second Order in the Problem of Optimal Control of the Rosser Type Equations Discrete Systems

Sevinj Sh. kyzy Gadyrova¹, Kamil B. oglu Mansimov²¹Institute of Control System of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan¹sevinc.qadirova@mail.ru²Baku State University, Baku, Azerbaijan²kamilbmansimov@gmail.com

Abstract. This article considers an optimal process control problem described by a system of nonlinear Rosser-type difference equations. The process is controlled using a boundary condition. This boundary condition is a solution to an analog of the Cauchy problem for a nonlinear Volterra-type difference equation. The control domain is assumed to be bound and open. By introducing a special variation of the control function, the first and second variations (in the classical sense) of the performance functional are calculated. Taking advantage of the arbitrariness of the admissible variation of the control function, a first-order necessary optimality condition is proven in the form of an analog of the Euler equation from the calculus of variations. Considering the non-negativity of the second variation of the functional along the optimal control, a general second-order necessary optimality condition is proved. From this, a few necessary optimality conditions are derived that are explicit, i.e., expressed in terms of the parameters of the optimal control problem under consideration.

Keywords: *system of Rosser-type equations; boundary control; nonlinear Volterra-type difference equation; optimal control; analogue of the Euler equation; second-order necessary condition for optimality.*

For citation: Gadyrova, S. Sh. and Mansimov, K. B. (2026), "To the Necessary Conditions of Optimality of the First and Second Order in the Problem of Optimal Control of the Rosser Type Equations Discrete Systems", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 2(73), pp. 5–19, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-5-19, <https://elibrary.ru/tmwqhc>.

The article was submitted 30.04.2025; approved after reviewing 30.10.2025; accepted for publication 10.06.2026.

Введение

Ряд процессов из техники описывается дискретными системами уравнений типа Россера (см., например, [1–5]). Заметим, что дискретные двумерные системы уравнений типа Россера представляют собой дискретный аналог канонического гиперболического уравнения первого порядка [6–10]. В работе [11] изучены некоторые задачи оптимального управления процессами, описываемые нелинейными дискретными системами уравнений типа Россера и установлены некоторые необходимые и достаточные условия оптимальности.

В предлагаемой работе исследуется одна задача оптимального управления процессом, описываемая разностным уравнением Россера при предположении, что одно из краевых условий системы уравнений определяется как решение нелинейного разностного уравнения Вольтерра. Применяя один вариант метода приращений, при предположении об ограниченности и открытости области управления, вычислены первая и вторая вариации функционала цели и с их помощью получены непосредственно

выраженные через параметры задачи управления необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Заметим, что ряд необходимых условий оптимальности первого и второго порядка в задаче оптимального управления, описываемой системой интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с нетиповым критерием качества, получен также в работе [12].

1. Постановка задачи

Предположим, что управляемый сложный процесс описывается системой нелинейных двумерных разностных уравнений:

$$\begin{aligned} z(t+1, x) &= f(t, x, z(t, x), y(t, x)), t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \\ y(t, x+1) &= g(t, x, z(t, x), y(t, x)), t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t_0, x) &= a(x), \quad x \in X = \{x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1\}, \\ y(t, x_0) &= b(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $f(t, x, z, y)$ ($g(t, x, z, y)$) – заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z, y) до второго порядка включительно, t_0, x_0, t_1, x_1 – заданные числа, причем, разности $t_1 - t_0$ и $x_1 - x_0$ есть натуральные числа, $b(t)$ – заданная m -мерная дискретная вектор-функция, $a(x)$ – n -мерная вектор-функция, являющаяся решением одномерного нелинейного обыкновенного разностного уравнения типа Вольтерра:

$$a(x+1) = \sum_{s=x_0}^x F(x, s, a(s), u(s)), x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, \quad (3)$$

с начальным условием

$$a(x_0) = a_0. \quad (4)$$

где $F(x, s, a, u)$ – заданная, n -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (a, u) до второго порядка включительно, a_0 – заданный постоянный вектор, а $u(x)$ – r -мерная, дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества $U \subset R^r$, т.е.

$$u(x) \in U \subset R^r, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1. \quad (5)$$

Управляющие функции $u(x)$, с подобными свойствами, назовем *допустимыми управлениями*, а соответствующие им процессы $(u(x), a(x), z(t, x), y(t, x))$ – *допустимыми процессами*.

На дискретных решениях краевой задачи (1)–(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал:

$$S(u) = \varphi(a(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G_1(z(t_1, x)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} G_2(y(t, x_1)). \quad (6)$$

Здесь $\varphi(a)$, $G_1(z)$ и $G_2(y)$ – заданные дважды непрерывно-дифференцируемые, скалярные функции.

Допустимое управление $u(x)$, доставляющее минимальное значение функционалу (6) при ограничениях (1)–(5), назовем *оптимальным управлением*.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала (6) при ограничениях (1)–(5), при предположении, что минимальное значение функционала (6) при ограничениях (1)–(5) существует.

Целью работы является вывод необходимых условий оптимальности первого и второго порядка в рассматриваемой задаче оптимального управления.

2. Формула приращения функционала критерия качества

Предположим, что $(u(x), a(x), z(t, x), y(t, x))$ – некоторый допустимый, а $(\bar{u}(x) = u(x) + \Delta u(x), \bar{a}(x) = a(x) + \Delta a(x), \bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x), \bar{y}(t, x) = y(t, x) + \Delta y(t, x))$ – произвольный допустимые процессы.

Запишем приращение функционала качества (6):

$$S(u + \Delta u) - S(u) = \varphi(\bar{a}(x_1)) - \varphi(a(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [G_1(\bar{z}(t_1, x)) - G_1(z(t_1, x))] + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [G_2(\bar{y}(t, x_1)) - G_2(y(t, x_1))]. \quad (7)$$

Ясно, что $\Delta z(t, x)$, $\Delta y(t, x)$ и $\Delta a(x)$ будут решениями задач

$$\begin{aligned} \Delta z(t+1, x) &= f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x)) - f(t, x, z(t, x), y(t, x)), \\ \Delta y(t, x+1) &= g(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x)) - g(t, x, z(t, x), y(t, x)), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta z(t_0, x) &= a(x), \\ \Delta y(t, x_0) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Delta a(x+1) = \sum_{s=x_0}^x (F(x, s, \bar{a}(s), \bar{u}(s)) - F(x, s, a(s), u(s))), \quad (10)$$

$$a(x_0) = 0. \quad (11)$$

Введем аналоги функции Гамильтона–Понтрягина:

$$H(t, x, z, y, p, q) = p' f(t, x, z, y) + q' g(t, x, z, y),$$

$$M(x, a, u, \psi) = \sum_{s=x}^{x_1} \psi'(s) F(s, x, a(x), u(x)).$$

Здесь $p(t, x)$, $q(t, x)$ и $\psi(x)$ – пока неизвестные дискретные функции соответствующих размерностей.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t, x) \Delta z(t+1, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t, x) \Delta y(t, x+1) = \\ &= \sum_{t=t_0+1}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t-1, x) \Delta z(t, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1} q'(t, x-1) \Delta y(t, x) = \\ &= \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [p'(t_1, x) \Delta z(t_1, x) - p'(t_0, x) \Delta a(x)] + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t-1, x) \Delta z(t, x) + \\ &+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} q'(t, x_1) \Delta y(t, x_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t_1, x-1) \Delta y(t, x). \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая введенные обозначения, тождества (8)–(12), и применяя формулу Тейлора до второго порядка, приращение (7) функционала (6) представляется в виде

$$\begin{aligned} S(\bar{u}) - S(u) &= \frac{\partial \varphi'(a(x_1))}{\partial a} \Delta a(x_1) + \frac{1}{2} \Delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \Delta a(x_1) + o_1(\|\Delta a(x_1)\|^2) + \\ &+ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial G_1(z(t_1, x))}{\partial z} \Delta z(t_1, x) + \frac{1}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_2(\|\Delta z(t_1, x)\|^2) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial G_2(y(t, x_1))}{\partial y} \Delta y(t, x_1) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta y'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(y(t, x_1))}{\partial y^2} \Delta y(t, x_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_3(\|\Delta y(t, x_1)\|^2) + \\
 & + \psi'(x_1 - 1) \Delta a(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(x - 1) \Delta a(x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\frac{\partial M'[x, \psi]}{\partial a} \Delta a(x) + \right. \\
 & + \frac{\partial M'[x, \psi]}{\partial u} \Delta u(x) \left. \right] - \frac{1}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\Delta a'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial a^2} \Delta a(x) + \right. \\
 & + 2 \Delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u \partial a} \Delta a(x) + \Delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u^2} \Delta u(x) \left. \right] - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_4(\|\Delta a(x)\| + \|\Delta u(x)\|)^2 + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t_1 - 1, x) \Delta z(t_1, x) - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t_0 - 1, x) \Delta a(x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t - 1, x) \Delta z(t, x) + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} q'(t, x_1 - 1) \Delta y(t, x_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t, x - 1) \Delta y(t, x) - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\frac{\partial H[t, x, p, q]}{\partial z} \Delta z(t, x) + \frac{\partial H[t, x, p, q]}{\partial y} \Delta y(t, x) \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z^2} \Delta z(t, x) + \Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z \partial y} \Delta y(t, x) + \right. \\
 & + \Delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y \partial z} \Delta z(t, x) + \Delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y^2} \Delta y(t, x) \left. \right] - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_5(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\|)^2. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Здесь по определению

$$\begin{aligned}
 H[t, x, p, q] &\equiv H(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)), \\
 M[x, \psi] &\equiv M(x, a(x), u(x), \psi(t, x)).
 \end{aligned}$$

Учитывая произвольность вектор-функций, $p(t, x), q(t, x)$ и $\psi(x)$, теперь предположим, что вектор-функции $p(t, x), q(t, x)$ и $\psi(x)$ — являются решениями задач (аналоги задач Коши для разностных уравнений):

$$\begin{aligned}
 p(t - 1, x) &= \frac{\partial H[t, x, p, q]}{\partial z}, \\
 p(t_1 - 1, x) &= - \frac{\partial G_1(z(t_1, x))}{\partial z}, \\
 q(t, x - 1) &= \frac{\partial H[t, x, p, q]}{\partial y},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(t, x_1 - 1) &= -\frac{\partial G_2(y(t, x_1))}{\partial y}, \\ \psi(x - 1) &= \frac{\partial M[x, \psi]}{\partial a} + p(t_0 - 1, x), \\ \psi(x_1 - 1) &= -\frac{\partial \varphi(a(x_1))}{\partial a}. \end{aligned}$$

Следуя общепринятым терминам (см. напр., [8, 9, 13–15]), их назовем сопряженными системами или задачами для рассматриваемой задачи оптимального управления.

Тогда формула приращения (13) примет вид:

$$\begin{aligned} S(\bar{u}) - S(u) &= \frac{1}{2} \Delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \Delta a(x_1) + o_1(\|\Delta a(x_1)\|^2) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_2(\|\Delta z(t_1, x)\|^2) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta y'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(y(t, x_1))}{\partial y^2} \Delta y(t, x_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_3(\|\Delta y(t, x_1)\|^2) - \\ &- \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'[x, \psi]}{\partial u} \Delta u(x) - \frac{1}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\Delta a'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial a^2} \Delta a(x) + \right. \\ &\quad \left. + 2\Delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u \partial a} \Delta a(x) + \Delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u^2} \Delta u(x) \right] - \\ &\quad - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_4(\|\Delta a(x)\| + \|\Delta u(x)\|)^2 + \\ &- \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z^2} \Delta z(t, x) + \Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z \partial y} \Delta y(t, x) + \right. \\ &\quad \left. + \Delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y \partial z} \Delta z(t, x) + \Delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y^2} \Delta y(t, x) \right] - \\ &\quad - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_5(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\|)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Из разностных нелинейных задач (8)–(9) и (10)–(11), в силу гладкости правых частей уравнений (1) и (3) применяя формулу Тейлора, получаем, что приращения $\Delta z(t, x)$, $\Delta y(t, x)$ и $\Delta a(x)$ являются решениями следующих неоднородных линеаризованных краевых задач:

$$\begin{aligned} \Delta z(t+1, x) &= f_z(t, x, z(t, x), y(t, x)) \Delta z(t, x) + f_y(t, x, z(t, x), y(t, x)) \Delta y(t, x) + \\ &\quad + o_6(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\|), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Delta z(t_0, x) = \Delta a(x), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta y(t, x+1) &= g_z(t, x, z(t, x), y(t, x)) \Delta z(t, x) + g_y(t, x, z(t, x), y(t, x)) \Delta y(t, x) + \\ &\quad + o_7(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\|), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Delta y(t, x_0) = 0, \quad (18)$$

$$\Delta a(x+1) = \sum_{s=x_0}^x F_a(x, s, a(s), v(s)) \Delta a(s) + F_v(x, s, a(s), v(s)) \Delta u(s) + o_8(\|\Delta a(s)\| + \|\Delta u(s)\|), \quad (19)$$

$$\Delta a(t, x_0) = 0. \quad (20)$$

Учитывая открытости области управления U , специальное приращение допустимого управления $u(x)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(x) = \varepsilon \delta u(x), x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1. \quad (21)$$

Здесь ε достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(x) \in R^r, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1$ — произвольная дискретная и ограниченная вектор-функция (допустимая вариация управления $u(x)$).

Через $(\Delta a_\varepsilon(x), \Delta z_\varepsilon(t, x), \Delta y_\varepsilon(t, x))$, обозначим специальное приращение состояния $(\Delta a(x), \Delta z(t, x), \Delta y(t, x))$, соответствующее специальному приращению (21) управления $u(x)$.

Учитывая формулу (21) и линеаризованные задачи (15)–(16), (17)–(18) и (19)–(20) доказывается следующее утверждение.

Лемма. При сделанных предположениях имеют место разложения:

$$\Delta z_\varepsilon(t, x) = \varepsilon \delta z(t, x) + o_9(t, x; \varepsilon), \quad (22)$$

$$\Delta y_\varepsilon(t, x) = \varepsilon \delta y(t, x) + o_{10}(t, x; \varepsilon), \quad (23)$$

$$\Delta a_\varepsilon(x) = \varepsilon \delta a(x) + o_{11}(x; \varepsilon), \quad (24)$$

где $o_9(t, x; \varepsilon)$, $o_{10}(t, x; \varepsilon)$ и $o_{11}(x; \varepsilon)$ порядки малости

Здесь $(\delta a(x), \delta z(t, x), \delta y(t, x))$, вариация вектора состояния $(a(x), z(t, x), y(t, x))$, являющаяся решением линейной задачи:

$$\delta z(t+1, x) = f_z(t, x, z(t, x), y(t, x)) \delta z(t, x) + f_y(t, x, z(t, x), y(t, x)) \delta y(t, x), \quad (25)$$

$$\delta z(t_0, x) = \delta a(x), \quad (26)$$

$$\delta y(t, x+1) = g_z(t, x, z(t, x), y(t, x)) \delta z(t, x) + g_y(t, x, z(t, x), y(t, x)) \delta y(t, x), \quad (27)$$

$$\delta y(t, x_0) = 0, \quad (28)$$

$$\delta a(x+1) = \sum_{s=x_0}^x F_a(x, s, a(s), v(s)) \delta a(s) + F_v(x, s, a(s), v(s)) \delta u(s), \quad (29)$$

$$\delta a(t, x_0) = 0. \quad (30)$$

Принимая во внимание формулу (21) и разложения (22), (23), (24) из приращения (14) функционала получаем, что

$$\begin{aligned} S(u + \varepsilon \delta u) - S(u) = & -\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'[x, \psi]}{\partial u} \delta u(x) - \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta a'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial a^2} \delta a(x) + \right. \\ & \left. + 2\delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u \partial a} \delta a(x) + \delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u^2} \delta u(x) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z^2} \delta z(t, x) + \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z \partial y} \delta y(t, x) + \right. \\
& \quad \left. + \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y \partial z} \delta z(t, x) + \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y^2} \delta y(t, x) \right] + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \delta a(x_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) + \\
& \quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta y'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(y(t, x_1))}{\partial y^2} \delta y(t, x_1). \tag{31}
\end{aligned}$$

3. Необходимые условия оптимальности

Из доказанного специального приращения (31) функционала (6) получаем, что первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционала имеют соответственно вид:

$$\delta^1 S(u; \delta u) = - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'[x, \psi]}{\partial u} \delta u(x), \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\delta^2 S(u; \delta u) = & \delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \delta a(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) + \\
& + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta y'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(y(t, x_1))}{\partial y^2} \delta y(t, x_1) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta a'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial a^2} \delta a(x) + \right. \\
& \quad \left. + 2\delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u \partial a} \delta a(x) + \delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u^2} \delta u(x) \right] - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z^2} \delta z(t, x) + \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z \partial y} \delta y(t, x) + \right. \\
& \quad \left. + \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y \partial z} \delta z(t, x) + \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y^2} \delta y(t, x) \right]. \tag{33}
\end{aligned}$$

Ясно, что в силу открытости области управления для оптимального допустимого управления необходимо, чтобы первая вариация функционала равнялась нулю:

$$- \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'[x, \psi]}{\partial u} \delta u(x) = 0.$$

Здесь $\frac{\partial M[\xi, \psi]}{\partial u}$ — градиент скалярной функции $M[\xi, \psi]$ по u .

Отсюда, в силу произвольности допустимого управления $\delta u(x)$, следует следующее утверждение

Теорема 1. (необходимое условие оптимальности первого порядка). Для оптимальности, допустимого управления $u(x)$, необходимо, чтобы соотношение

$$\frac{\partial M[\xi, \psi]}{\partial u} = 0 \tag{34}$$

выполнялось для всех $\xi = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1$.

Необходимое условие оптимальности (34) является аналогом уравнения Эйлера из вариационного исчисления (см., например, [13]) для рассматриваемой задачи оптимального управления.

Введем в рассмотрение одно определение.

Определение. Каждое допустимое управление, являющееся решением уравнения Эйлера, назовем *классической экстремалью*.

Для сужения множества классических экстремалей надо иметь новые необходимые условия оптимальности.

Из классического вариационного исчисления известно, что для оптимальности классической экстремали необходимо чтобы вдоль него вторая вариация (33) функционала (6) была неотрицательной.

Следовательно, справедливо следующее необходимое условие оптимальности второго порядка.

Теорема 2. Для оптимальности классической экстремали $u(x)$, в рассматриваемой задаче управления необходимо, чтобы неравенство

$$\begin{aligned} & \delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \delta a(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) + \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta y'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(y(t, x_1))}{\partial y^2} \delta y(t, x_1) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta a'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial a^2} \delta a(x) + \right. \\ & \quad \left. + 2\delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u \partial a} \delta a(x) + \delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u^2} \delta u(x) \right] - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z^2} \delta z(t, x) + \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z \partial y} \delta y(t, x) + \right. \\ & \quad \left. + \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y \partial z} \delta z(t, x) + \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y^2} \delta y(t, x) \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (35)$$

выполнялось для всех допустимых вариаций $\delta u(x) \in R^r, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1$ управления.

Как видно, неравенство (35) является общим необходимым условием оптимальности второго порядка, носящим неявный характер и поэтому проверка его выполнения – достаточно сложная задача.

Следовательно, возникает необходимость в получении новых необходимых условий оптимальности, носящих явный характер.

Займемся этим вопросом.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} F_u[s, x] &\equiv F_u(s, x, a(x), u(x)), \\ f_y[t, x] &\equiv f_y(t, x, z(t, x), y(t, x)), \\ f_z[t, x] &\equiv f_z(t, x, z(t, x), y(t, x)). \end{aligned}$$

Заметим, что линейные задачи (25)–(26), (27)–(28) и (29)–(30) являются аналогами уравнений в вариациях (см., например, [13]) для рассматриваемой задачи оптимального управления.

На основе формулы о представлениях линейных неоднородных разностных уравнений типа Вольтерра (см., например, [14]), решение задачи (29)–(30) $\delta a(x)$ представляется в виде

$$\delta a(x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_1(x, s) \delta u(s). \quad (36)$$

Здесь

$$Q_1(x, s) = \sum_{\tau=s}^{x-1} \Phi(x, \tau) \frac{\partial F[\tau, s]}{\partial u}$$

где $(n \times n)$ – матричная функция $\Phi(x, s)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \Phi(x, s-1) &= \sum_{\tau=s}^{x-1} \Phi(x, \tau) \frac{\partial F[\tau, s]}{\partial a}, \\ \Phi(x, x-1) &= E, \end{aligned}$$

где E – $(n \times n)$ – единичная матрица.

Далее через $V_{ij}(t, x; \tau, s)$, $i, j = 1, 2$ – обозначим решения линейных неоднородных разностных матричных задач:

$$\begin{aligned} V_{11}(t, x; \tau-1, s) &= V_{11}(t, x; \tau, s) f_z[\tau, s] + V_{12}(t, x; \tau, s) g_z[\tau, s], \\ V_{12}(t, x; \tau, s-1) &= V_{11}(t, x; \tau, s) f_y[\tau, s] + V_{12}(t, x; \tau, s) g_y[\tau, s], \\ V_{21}(t, x; \tau-1, s) &= V_{21}(t, x; \tau, s) f_z[\tau, s] + V_{22}(t, x; \tau, s) g_z[\tau, s], \\ &= V_{21}(t, x; \tau, s) f_y[\tau, s] + V_{22}(t, x; \tau, s) g_y[\tau, s], \\ V_{11}(t, x; t-1, x-1) &= E_1, \quad V_{22}(t, x; t-1, x-1) = E_2, \\ V_{11}(t, x; t-1, s) &= 0, x_0 \leq s \leq x-1, \quad V_{12}(t, x; \tau, x-1) = 0, t_0 \leq \tau \leq t-1, \\ V_{21}(t, x; t-1, x) &= 0, x_0 \leq s \leq x-1, \quad V_{22}(t, x; \tau, x-1) = 0, t_0 \leq \tau \leq t-1. \end{aligned}$$

Решения $(\delta z(t, x), \delta y(t, x))$ задач (25)–(26) и (27)–(28) могут быть представлены в виде

$$\delta z(t, x) = V_{11}(t, x+1; t_0-1, x) \delta a(x) + \sum_{s=x_0}^{x-1} V_{11}(t, x+1; t_0-1, s) \delta a(s),$$

$$\delta y(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} V_{21}(t+1, x; t_0-1, s) \delta a(s).$$

Отсюда, принимая во внимание представление (36) для решения $\delta a(x)$, получим, что

$$\begin{aligned} \delta z(t, x) &= \sum_{s=x_0}^{x-1} [V_{11}(t, x+1; t_0-1, s) Q_1(x, s) + \\ &+ \sum_{\tau=s}^{x-1} V_{11}(t, x+1; t_0-1, s) Q_1(\tau, s)] \delta u(s), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\delta y(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\tau=s+1}^{x-1} V_{21}(t+1, x; t_0-1, \tau) Q_1(\tau, s) \right] \delta u(s). \quad (38)$$

Введя обозначения

$$Q_2(t, x, s) = \sum_{\tau=s+1}^{x-1} V_{11}(t, x+1; t_0-1, \tau) G_1(\tau, s) + V_{11}(t, x+1; t_0-1, x) Q_1(x, s),$$

$$Q_3(t, x, s) = \sum_{\tau=s+1}^{x-1} V_{11}(t+1, x; t_0-1, \tau) G_1(\tau, s),$$

формулы (37) и (38) записываются в виде

$$\delta z(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_2(t, x, s) \delta u(s), \quad (39)$$

$$\delta y(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_3(t, x, s) \delta u(s). \quad (40)$$

Используя представления (36), (39), (40) займемся преобразованием слагаемых в неравенстве (35).

Следуя схемам, применяемым в работах [15, 16], доказывается, что

$$\delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \delta a(x_1) = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) Q_1(x_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} Q_1(x_1, s) \delta u(s), \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) = \\ & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) \left[\sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_2(t, x, \tau) \frac{\partial^2 G_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} Q_2(t, x, s) \right] \delta u(s), \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta y'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(y(t, x_1))}{\partial y^2} \delta y(t, x_1) = \\ & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} Q_3(t, x_1, \tau) \frac{\partial^2 G_2(y(t, x_1))}{\partial y^2} Q_3(t, x_1, s) \right] \delta u(s), \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z^2} \delta z(t, x) = \\ & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_2(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z^2} Q_2(t, x, s) \right] \delta u(s), \quad (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z \partial y} \delta y(t, x) = \\ & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_2(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z \partial y} Q_3(t, x, s) \right] \delta u(s), \quad (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y \partial z} \delta z(t, x) = \\
 & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_3(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y \partial z} Q_4(t, x, s) \right] \delta u(s), \quad (46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y^2} \delta y(t, x) = \\
 & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_3(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y^2} Q_3(t, x, s) \right] \delta u(s), \quad (47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta a'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial a^2} \delta a(x) = \\
 & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) \left[\sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_1(x, \tau) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial a^2} Q_1(x, s) \right] \delta u(s), \quad (48)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u \partial a} \delta a(x) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{s=x+1}^{x_1-1} \delta u'(s) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u \partial a} Q_1(s, x) \delta u(x) \right]. \quad (49)$$

Введем в рассмотрение $(n \times n)$ матричную функцию:

$$\begin{aligned}
 K(\tau, s) = & -Q'_1(x_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} Q_1(x_1, s) + \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_1(x, \tau) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial a^2} Q_1(x, s) - \\
 & - \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_2(t, x, \tau) \frac{\partial^2 G_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} Q_2(t, x, s) - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} Q_3(t, x_1, \tau) \frac{\partial^2 G_2(y(t, x_1))}{\partial z^2} Q_3(t, x_1, s) + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_2(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z^2} Q_2(t, x, s) + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_2(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z \partial y} Q_3(t, x, s) + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_3(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y \partial z} Q_4(t, x, s) + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_3(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y^2} Q_3(t, x, s). \quad (50)
 \end{aligned}$$

Учитывая доказанные тождества (41)–(49) и обозначение (50), неравенство (35) записывается в виде

$$\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) K(\tau, s) \delta u(s) + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{s=x+1}^{x_1-1} \delta u'(s) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u \partial a} Q_1(s, x) \delta u(x) \right] + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u^2} \delta u(x) \leq 0. \quad (51)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3. Для оптимальности классической экстремали $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство (51), выполнялось для всех допустимых вариаций $\delta u(x)$ управления $u(x)$.

Неравенство (51) является необходимым условием оптимальности второго порядка и носит довольно общий характер.

Из него, определяя допустимую вариацию $\delta u(x)$ управления специальным образом, нетрудно получить ряд необходимых условий оптимальности второго порядка, непосредственно выраженных через параметры рассматриваемой задачи оптимального управления.

Приведем одну из них.

Теорема 4. Для оптимальности классической экстремали $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$v' \left(K(\theta, \theta) + \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u^2} \right) v \leq 0 \quad (52)$$

выполнялось для всех $\theta \in X \setminus x_1$ и $v \in R^r$.

Доказательство. Используя произвольность вектор-функции $\delta u(x)$ определим его по формуле

$$\delta u(x) = \begin{cases} v, & x = \xi \in X \setminus x_1, \\ u(t), & x \neq \xi. \end{cases} \quad (53)$$

Здесь $v \in R^r$ – произвольный, ограниченный вектор, а ξ произвольная точка.

Учитывая формулу (53) в неравенстве (51), приходим к необходимому условию оптимальности (52).

Теорема доказана.

Заметим, что необходимое условие оптимальности (52) менее информативно, чем необходимое условие оптимальности (51).

Самым сильным, т.е. информативным, необходимым условием оптимальности второго порядка является неравенство (51).

Заключение

Рассматривается дискретный управляемый процесс, описываемый системой нелинейных разностных уравнений типа Россера. Процесс управляется с помощью начального условия, являющегося решением нелинейного разностного уравнения типа Вольтерра.

При предположении открытости области управления вычислены первая и вторая вариации функционала качества. С их помощью доказано необходимое условие оптимальности первого порядка в форме уравнения Эйлера из теории классического вариационного исчисления и ряд необходимых условий оптимальности второго порядка, выраженных через параметры рассматриваемой дискретной двухпараметрической задачи оптимального управления.

Список источников

1. Барышев В. Г., Блюмин С. Л., Кузнецов Л. А. К управлению системами с многомерным параметром // Автоматика и телемеханика. 1977. № 4. С. 37–42.
2. Блюмин С. Л., Фараджев Р. Г. Линейные клеточные машины: подход пространства состояний // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 125–163.
3. Гайшун И. В. Многопараметрические системы управления. Минск: Изд-во ИМ НАН Белоруси, 1996. 199 с.
4. Kaczorek T. Two-dimensional linear systems. Берлин: Springer-Verlag, 1985. 399 с.
5. Дымков М. П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления. Минск: Изд-во БГЭУ, 2005. 363 с.
6. Мансимов К. Б. К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче управления с распределенными параметрами // ДАН СССР. 1988. Т. 301, № 3. С. 546–550.
7. Островский Г. М., Волин Ю. М. Моделирование сложных химико-технологических схем. М.: "Химия", 1975. 311 с.
8. Васильев О. В., Срочко В. А. К оптимизации одного класса управляемых систем с распределенными параметрами // Сиб. матем. журнал. 1978. №2. С. 328–332.
9. Васильев О. В., Срочко В. А., Терлецкий В. А. Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.
10. Мансимов К. Б., Масталиев Р. О. О представлении решения краевой задачи Гурса для стохастических гиперболических уравнений первого порядка // Изв. Иркутского Унив.-та. Сер. физ. мат. наук. 2023. Т. 45. С. 145–151.
11. Кадырова С. Ш., Мансимов К. Б. Об одной задаче оптимального управления дискретными системами Россера // Изв. НАН Азербайджана, сер. физ.-техн. и мат. наук. 2014. Т. 34, № 3. С. 105–113.
12. Мансимов К. Б., Нагиева И. Ф. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной задаче оптимального управления с нетиповым критерием качества // Вестник Томского Государственного Университета. Управление, Вычислительная Техника и Информатика. 2023. № 64. С. 11–20.
13. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М.: Либроком, 2011. 256 с.
14. Мансимов К. Б., Керимова А. В. Линеаризованное необходимое условие оптимальности и исследование особых управлений в одной ступенчатой задаче управления // Вестник Томского гос. университета. Сер. управление, выч. техника, информатика. 2024. № 68. С. 14–27.
15. Мансимов К. Б. Дискретные системы. Баку: Изд.-во БГУ, 2013. 151 с.
16. Мансимов К. Б. О квазиособых управлениях в дискретных системах с запаздыванием // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. № 3(54). С. 19–24.

References

1. Baryshev, V. G. (1977), "On the Control of Systems with Multidimensional Parameters", *Automation and Remote Control*, no 4, pp. 34–42.
2. Blumin, S. L. and Faradzhev, R. G. (1982), "Linear Cellular Machines: A State Space Approach", *Automation and Remote Control*, no 2, pp. 125–163.
3. Gaishun, I. V. (1996), *Multiparameter Control Systems*, Publishing House of the Institute of Control Sciences of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 200 p.
4. Kaczorek, T. (1985), *Two-dimensional linear systems*, Springer-Verlag, Berlin, 398 p.

5. Dymkov, M. P. (2005), *Extremal Problems in Multiparameter Control Systems*, BGEU Publishing House, Minsk, 363 p.
6. Mansimov, K. B. (1988), "On the Theory of Necessary Optimality Conditions in a Control Problem with Distributed Parameters", *Dokl. Akad. Ssr.*, Vol. 301, no 3, pp. 546–550.
7. Ostrovsky, G. M. and Volin, Yu. M. (1975), *Modeling Complex Chemical-Engineering Schemes*, Chemistry, Moscow, 311 p.
8. Vasiliev, O. V. and Srochko, V. A. (1978), "On Optimization of a Class of Control Systems with Distributed Parameters", *Siberian Math. Journal*, no 2, pp. 328–332.
9. Vasiliev, O. V., Srochko, V. A. and Terletsky, V. A. (1990), *Optimization Methods and Their Applications*, Nauka, Novosibirsk, 151 p.
10. Mansimov, K. B. and Mastaliev, R. O. (2023), "On the representation of the solution of the Goursat boundary value problem for first-order stochastic hyperbolic equations", *Bulletin of Irkutsk University, Series of Phys. and Mathematical Sciences*, vol. 45, pp. 145–151.
11. Gadirova, S. Sh. and Mansimov, K. B. (2014), "On one control problem of discrete Roesser systems", *Bulletin of the NAS of Azerbaijan, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences*, vol. 34, no 3, pp. 105–113.
12. Mansimov, K. B. and Nagieva, I. F. (2023), "Necessary optimality conditions of the first and second orders in one optimal control problem with a non-standard quality criterion", *Bulletin of Tomsk State University. Management, Computer Engineering and Informatics*, no 64, pp. 11–20.
13. Gabasov, R. and Kirillova, F. M. (2011), *Special optimal controls*, Librokom, Moscow, 256 p.
14. Mansimov, K. B. and Kerimova, A. V. (2024), "Linearized necessary optimality condition and study of special controls in one-step control problem", *Bulletin of Tomsk State University. Series: Control, Comput. Engineering, Informatics*, no 68, pp. 14–27.
15. Mansimov, K. B. (2013), *Discrete systems*, BSU Publishing House, Baku, 151 p.
16. Mansimov, K. B. (2021), "On quasi-singular controls in discrete systems with delay", *Bulletin of Perm State University. Matem. mekh. Informatics*, issue 3(54), pp. 19–24.

Информация об авторах:

С. Ш. Кадырова – преподаватель кафедры математической кибернетики Бакинского Государственного Университета Министерства образования и науки Азербайджана (AZ1148, Азербайджан, г. Баку, ул. Захида Халилова, д. 33);

К. Б. Мансимов – доктор физико-математических наук, профессор; AuthorID 247352.

Information about the authors:

S. Sh. Gadyrova – Lecturer of the Mathematical Cybernetics Department at Baku State University of the Ministry of Education and Science of Azerbaijan (33 Zahid Khalilov St., Baku, Azerbaijan, AZ1148);

K. B. Mansimov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; AuthorID 247352.