МАТЕМАТИКА

Научная статья
УДК 517.977.56
DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-5-15
https://elibrary.ru/ooessc

# Об одной дискретной задаче оптимального управления системой двумерных разностных уравнений типа Вольтерра

**Камил Байрамали оглы Мансимов[1], Малахат Яшар кызы Наджафова[2]**
[1]Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
[1,2]Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджана
[1]kamilbmansimov@gmail.com
[2]nacafova.melahat@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается задача оптимального управления, дискретным процессом описываемая системой двумерных разностных уравнений типа Вольтерра и функционалом типа Больца при предположении, что начальная функция является решением одномерного нелинейного разностного уравнения типа Вольтерра. Области управления являются ограниченными и замкнутыми множествами. Используя дискретный аналог игольчатого типа вариаций, вычислено специальное приращение функционала качества. Учитывая выражение специального приращение функционала качества, доказан дискретный аналог принципа максимума Понтрягина.

**Ключевые слова:** *разностное уравнение типа Вольтерра; дискретная задача оптимального управления; области управления; допустимое управление; формула приращения; необходимое условие оптимальности; дискретный аналог принципа максимума Понтрягина.*

**Для цитирования:** Мансимов К. Б., Наджафова М. Я. Об одной дискретной задаче оптимального управления системой двумерных разностных уравнений типа Вольтерра // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 4(71). С. 5–15. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-5-15. https://elibrary.ru/ooessc.

*Статья поступила в редакцию 30.04.2025; одобрена после рецензирования 17.10.2025; принята к публикации 08.12.2025.*

MATHEMATHICS

Research article

# About Optimal Control Discrete Problem of the Volterra Type of Two-Dimensional Difference Equations System

**Kamil B. Mansimov**[1], **Malahat Ya. Najafova**[2]
[1]Baku State University, Baku, Azerbaijan
[1,2]Institute of Control System of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan
[1]kamilbmansimov@gmail.com
[2]nacafova.melahat@mail.ru

**Abstract.** An optimal control problem is considered for a discrete process described by a system of two-dimensional Volterra-type difference equations and a Bolza-type cost functional, assuming that the initial function is a solution to a one-dimensional nonlinear Volterra-type difference equation. The control domains are bounded and closed sets. Using a discrete analogue of the needle-type variation, a special increment of the cost functional is calculated. Based on this expression, a discrete version of Pontryagin's maximum principle is established.

**Keywords:** *Volterra type difference equation; discrete optimal control problem; control domains; admissible control; increment formula; necessary optimality condition; discrete analogue of the Pontryagins maximum principle.*

**For citation:** Mansimov, K. B. and Najafova, M. Ya. (2025), "About Optimal Control Discrete Problem of the Volterra Type of Two-Dimensional Difference Equations System", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 4(71), pp. 5−15, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-5-15, https://elibrary.ru/ooessc.

*The article was submitted 30.04.2025; approved after reviewing 17.10.2025; accepted for publication 08.12.2025.*

## Введение

В работах [1, 2] исследованы различные задачи оптимального управления, представляющее собой дискретный аналог непрерывной задачи оптимального управления, рассмотренной в работе [3].

В статье [4] рассмотрена задача оптимального управления системой двумерных разностных уравнений типа Вольтерра, представляющих собой обобщение задачи оптимального управления, из работ [1, 2]. В этой работе получен ряд необходимых условий оптимальности при предположении открытости областей управления.

В предлагаемой работе рассматривается задача оптимального управления, аналогичная задаче управления из [4], которая исследуется при предположении ограниченности и замкнутости областей управления.

При определенных предположениях на данные задачи управления доказан дискретный аналог принципа максимума Л. С. Понтрягина [5].

Рассматриваемую задачу оптимального управления можно интерпретировать как граничную задачу оптимального управления дискретными системами с распределенными параметрами.

Отметим, что некоторые задачи оптимального управления дискретными процессами, описываемые обыкновенными разностными уравнениями и разностными уравнениями типа Вольтерра исследованы в работах [6–12].

## 1. Постановка задачи оптимального управления

Предположим, что управляемый дискретный процесс описывается системой двумерных разностных уравнений типа Вольтерра:

$$z(t+1,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t} f\big(t,\tau,x,z(\tau,x),u(\tau)\big),$$

$$t\in T=\{t_0,t_0+1,\ldots,t_1-1\},\qquad x\in X=\{x_0,x_0+1,\ldots,x_1\} \tag{1}$$

с начальным условием

$$z(t_0,x)=a(x), x\in X, \tag{2}$$

где $n$-мерная вектор-функция $a(x)$ является решением дискретного аналога задачи Коши:

$$a(x+1)=\sum_{s=x_0}^{x} g\big(x,s,a(s),v(s)\big), x\in X\backslash x_1, \tag{3}$$

$$a(x_0)=a_0. \tag{4}$$

Здесь $f(t,\tau,x,z,u)$ $\big(g(x,s,a,v)\big)$ – заданная, $n$-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $z(a)$, $a_0$ – заданный постоянный вектор, $t_0,x_0,t_1,x_1$ – заданные натуральные числа, $u(t)\big(v(x)\big)-r(q)$-мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значением из заданного ограниченного и замкнутого множества $U(V)$, т.е.

$$u(t)\in U\subset R^r, t\in T, \tag{5}$$

$$v(x)\in V\subset R^q, x\in X\backslash x_1.$$

Такие управляющие функции назовем *допустимыми*.

Экстремальная задача заключается в минимизации функционала типа Больца:

$$S(u,v)=\varphi\big(a(x_1)\big)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} G\big(z(t_1,x)\big) \tag{6}$$

при ограничениях (1)–(5).

Здесь $\varphi(a)$ и $G(z)$ – заданные, непрерывно дифференцируемые, скалярные функции, допустимые управления $u(t)$ и $v(x)$ доставляющие минимальное значение функционалу (6) при ограничениях (1)–(5) назовем *оптимальным управлением.*

Целью работы является получение необходимых условий оптимальности в рассматриваемой экстремальной задаче.

## 2. Формула приращения функционала и оценка норм приращений решений задач типа Коши (1)–(2) и (3)–(4)

Построим формулу приращения функционала качества. Пусть $\big(u^0(t),v^0(x)\big)$ – некоторое допустимое управление. Через $\big(\bar u(t)=u^0(t)+\Delta u(t),\bar v(x)=v^0(x)+\Delta v(x)\big)$ – обозначим произвольное допустимое управления.

Решения задач (1)–(2) и (3)–(4), отвечающие допустимым управлениям $\big(u^0(t), v^0(x)\big)$ и $\big(\bar{u}(t), \bar{v}(x)\big)$ обозначим соответственно через $\big(z^0(t,x), a^0(x)\big)$ и $\big(\bar{z}(t,x), \bar{a}(x)\big)$.

Из введенных обозначений следует, что приращения, $\Delta z(t,x)$ и $\Delta a(x)$ являются решениями аналогов задач Коши:

$$\Delta z(t+1,x) = \sum_{\tau=t_0}^{t}\big[f\big(t,\tau,x,\bar{z}(\tau,x),\bar{u}(\tau)\big) - f\big(t,\tau,x,z^0(\tau,x),u^0(\tau)\big)\big], \tag{7}$$

$$\Delta z(t_0,x) = \Delta a(x), \tag{8}$$

$$\Delta a(x+1) = \sum_{s=x_0}^{x}\big[g\big(x,s,\bar{a}(s),\bar{v}(s)\big) - g\big(x,s,a^0(s),v^0(s)\big)\big], \tag{9}$$

$$\Delta a(x_0) = 0. \tag{10}$$

Введем скалярные функции типа Гамильтона–Понтрягина

$$H\big(t,x,z(t,x),u(t),\psi^0(t,x)\big) = \sum_{\tau=t}^{t_1-1}\psi^{0\prime}(\tau,x)f\big(\tau,t,x,z(t,x),u(t)\big),$$

$$M\big(x,a(x),v(x),p^0(x)\big) = \sum_{s=x}^{x_1-1}p^{0\prime}(s)g\big(s,x,a(x),v(x)\big).$$

Здесь $\psi^0(t,x)$ и $p^0(x)$ пока произвольные дискретные и ограниченные вектор-функции, а штрих – операция транспонирования.

Из тождеств (7) и (9), используя дискретный аналог теоремы Фубини (см. например, работы [13, 14]) доказывается, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{0\prime}(t,x)\,\Delta z(t+1,x) =$$

$$= \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big[H\big(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t),\psi^0(t,x)\big) - H\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x)\big)\big], \tag{11}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p^{0\prime}(x)\Delta a(x+1) =$$

$$= \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big[M\big(x,\bar{a}(x),\bar{v}(x),p^0(x)\big) - M\big(x,a^0(x),v^0(x),p^0(t,x)\big)\big]. \tag{12}$$

Учитывая тождества (11) и (12), приращение функционала (6) представляется в виде:

$$S(\bar{u},\bar{v}) - S(u^0,v^0) = \varphi\big(\bar{a}(x_1)\big) - \varphi\big(a^0(x_1)\big) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big[G\big(\bar{z}(t_1,x)\big) - G\big(z^0(t_1,x)\big)\big] -$$

$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big[H\big(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t),\psi^0(t,x)\big) - H\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x)\big)\big] -$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[M\big(x,\bar{a}(x),\bar{v}(x),p^0(x)\big)-M\big(x,a^0(x),v^0(x),p^0(t,x)\big)\right]+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{0'}(t,x)\,\Delta z(t+1,x)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p^{0'}(x)\Delta a(x+1). \qquad (13)$$

Используя формулу Тейлора и учитывая начальные условия (8) и (10), формула приращения (13) представляется в виде

$$S(\bar{u},\bar{v})-S(u^0,v^0)=\frac{\partial\varphi'\big(a(x_1)\big)}{\partial a}\Delta a(x_1)+o_1(\|\Delta a(x_1)\|)+p^{0'}(x_1)\Delta a(x_1)-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p^{0'}(x-1)\Delta a(x)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[M\big(x,a^0(x),\bar{v}(x),p^0(x)\big)-M\big(x,a^0(x),v^0(x),p^0(t,x)\big)\right]-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial M'\big(x,a^0(x),v^0(x),p^0(t,x)\big)}{\partial a}\Delta a(x)-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\frac{\partial M\big(x,a^0(x),\bar{v}(x),p^0(x)\big)}{\partial a}-\frac{\partial M\big(x,a^0(x),v^0(x),p^0(t,x)\big)}{\partial a}\right]'\Delta a(x)-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_2(\|\Delta a(x)\|)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial G'\big(z^0(t_1,x)\big)}{\partial z}\Delta z(t_1,x)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_3(\|\Delta z(t_1,x)\|)+$$
$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{0'}(t_1-1,x)\Delta z(t_1,x)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{0'}(t_0-1,x)\Delta a(x)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H\big(t,x,z^0(t,x),\bar{u}(t),\psi^0(t,x)\big)-H\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x)\big)\right]+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{0'}(t-1,x)\,\Delta z(t,x)$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial H\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x)\big)}{\partial z}\Delta z(t,x)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\frac{\partial H\big(t,x,z^0(t,x),\bar{u}(t),\psi^0(t,x)\big)}{\partial z}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial H\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x)\big)}{\partial z}\right]'\Delta z(t,x)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_4(\|\Delta z(t,x)\|). \qquad (14)$$

Здесь, и в дальнейшем, $\|y\|$ норма вектора $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)'$, определяемая формулой $\|y\|=\sum_{i=1}^{n}|y_i|$, а $o(\alpha)$ −величина более высокого порядка, чем $\alpha$, т.е. $o(\alpha)/\alpha\to 0$, при $\alpha\to 0$.

Предположим, что вектор-функции $\psi^0(t,x)$, $p^0(x)$ являются решениями линейных дискретных задач Коши

$$\psi^0(t-1,x)=\frac{\partial H\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x)\big)}{\partial z},$$
$$\psi^0(t_1-1,x)=-\frac{\partial G\big(z^0(t_1,x)\big)}{\partial z},$$
$$p^0(x-1)=\frac{\partial M\big(x,a^0(x),v^0(x),p^0(t,x)\big)}{\partial a}+\psi^0(t_0-1,x),$$
$$p^0(x_1-1)=-\frac{\partial \varphi\big(a(x_1)\big)}{\partial a}.$$

Тогда формула приращения (14) функционала примет вид

$$S(\bar u,\bar v)-S(u^0,v^0)=-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big[M\big(x,a^0(x),\bar v(x),p^0(x)\big)-M\big(x,a^0(x),v^0(x),p^0(t,x)\big)\big]-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big[H\big(t,x,z^0(t,x),\bar u(t),\psi^0(t,x)\big)-H\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x)\big)\big]-$$
$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\frac{\partial M\big(x,a^0(x),\bar v(x),p^0(x)\big)}{\partial a}-\frac{\partial M\big(x,a^0(x),v^0(x),p^0(t,x)\big)}{\partial a}\right]'\Delta a(x)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\frac{\partial H\big(t,x,z^0(t,x),\bar u(t),\psi^0(t,x)\big)}{\partial z}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial H\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x)\big)}{\partial z}\right]'\Delta z(t,x)+o_1(\|\Delta a(x_1)\|)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_2(\|\Delta a(x_1)\|)+$$
$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_3(\|\Delta z(t_1,x)\|)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_4(\|\Delta z(t,x)\|). \qquad (15)$$

В дальнейшем нам понадобится оценки для $\|\Delta a(x)\|$ и $\|\Delta z(t,x)\|$.
В силу задачи (9)–(10) ясно, что

$$\Delta z(t+1,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t}[\Delta z(\tau+1,x)-\Delta z(\tau,x)]+\Delta z(t_0,x).$$

Поэтому, используя дискретный аналог леммы Фубини (см. например, [13, 14]), получаем справедливость тождества:

$$\Delta z(t+1,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\sum_{\alpha=\tau}^{t}\big[f\big(\alpha,\tau,x,\bar z(\tau,x),\bar u(\tau)\big)-f\big(\alpha,\tau,x,z^0(\tau,x),u^0(\tau)\big)\big]-\Delta z(\tau,x)\right]+$$
$$+\Delta a(x).$$

Из этого тождества, переходя к норме и учитывая непрерывно-дифференцируемость, вектор-функции $f(t,\tau,z,u)$, по $z$ приходим к неравенству

$$\|\Delta z(t+1,x)\| \le L_1 \sum_{\tau=t_0}^{t} \|\Delta z(\tau,x)\| + \|\Delta a(x)\| +$$
$$+ \sum_{\tau=t_0}^{t} \sum_{\alpha=\tau}^{t} \left\| f\big(\alpha,\tau,x,z^0(\tau,x),\bar{u}(\tau)\big) - f\big(\alpha,\tau,x,z^0(\tau,x),u^0(\tau)\big) \right\|,$$

где $L_1 = const > 0$ некоторая постоянная.

Применяя к последнему неравенству дискретный аналог леммы Гронуолла–Беллмана (см., например, [15]) получаем, что

$$\|\Delta z(t,x)\| \le L_2 [\|\Delta a(x)\| +$$
$$\sum_{\tau=t_0}^{t} \sum_{\alpha=\tau}^{t} \left\| f\big(\alpha,\tau,x,z^0(\tau,x),\bar{u}(\tau)\big) - f\big(\alpha,\tau,x,z^0(\tau,x),u^0(\tau)\big) \right\|. \quad (16)$$

Здесь $L_2 = const > 0$ некоторая постоянная.

Далее задача (9)–(10) может быть представлено в виде

$$\Delta a(x+1) = \sum_{s=x_0}^{x} \left[ \sum_{\beta=s}^{x} \left[ g\big(\beta,s,\bar{a}(s),\bar{v}(s)\big) - g\big(\beta,s,a^0(s),v^0(s)\big) \right] - a(s) \right].$$

Из этого тождества, после некоторых преобразований, применяя дискретный аналог леммы Гронуолла–Беллмана, получаем справедливость оценки:

$$\|\Delta a(x)\| \le L_3 \sum_{s=x_0}^{x} \sum_{\beta=s}^{x} \left[ g\big(\beta,s,a^0(s),\bar{v}(s)\big) - g\big(\beta,s,a^0(s),v^0(s)\big) \right]. \quad (17)$$

Здесь $L_3 = const > 0$ также некоторая постоянная.

## 3. Необходимые условия оптимальности

Введем в рассмотрение множества

$$f(t,\tau,x,z^0(\tau,x),U) = \left\{ c; c = f\big(t,\tau,x,z^0(\tau,x),u(\tau)\big); u(\tau) \in U, \tau \in T \right\}, \quad (18)$$

$$g(x,s,a^0(s),V) = \{ d; d = g(x,s,a^0(s),v(s)); v(s) \in V, s \in X \backslash x_1 \}. \quad (19)$$

Предположим, что множества (18) и (19) выпуклы.

Теперь предположим, что $\Delta v(x) = 0$ и специальное приращение допустимого управления определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = u(t;\varepsilon) - u^0(t), t \in T. \quad (20)$$

Здесь $\varepsilon \in [0,1] -$ произвольное число, а $u(t;\varepsilon)$ произвольное допустимое управление, такое, что

$$f\big(t,\tau,x,z^0(\tau,x),u^0(\tau)+\Delta u_\varepsilon(\tau)\big) - f\big(t,\tau,x,z^0(\tau,x),u^0(\tau)\big) \equiv$$
$$\equiv \varepsilon f\big(t,\tau,x,z^0(\tau,x),u(\tau)\big) - f\big(t,\tau,x,z^0(\tau,x),u^0(\tau)\big),$$

где $u(t) -$ произвольное допустимое управление, соответствующее управлению $u(t;\varepsilon)$.

Через $\Delta z_\varepsilon(t,x)$ обозначим специальное приращение решения $z^0(t,x)$.

Учитывая оценку (16) из формулы приращения (15) функционала, получаем, что

$$S(u^0+\Delta u, v^0)-S(u^0,v^0)=$$
$$=-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H\big(t,x,z^0(t,x),u(t),\psi^0(t,x)\big)-H\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x)\big)\right]+$$
$$+o(\varepsilon). \tag{21}$$

Далее предполагая, что $\Delta u(t)=0$, специальное приращение управления $v^0(x)$ определим по формуле

$$\Delta v_\mu(x)=v(x;\mu)-v^0(\,x). \tag{22}$$

Здесь $\mu\in[0,1]$ – произвольное число, а $v(x;\mu)$ произвольное допустимое управление, такое, что

$$g\big(x,s,a^0(s),v(s;\mu)\big)-g\big(x,s,a^0(s),v^0(s)\big)=$$
$$=-\mu\Big(g\big(x,s,a^0(s),v(s)\big)-g\big(x,s,a^0(s),v^0(s)\big)\Big).$$

Здесь $v(x)$ произвольное допустимое управление, соответствующее допустимому управлению $v(x;\mu)$.

Через $\Delta z(t,x;\mu)$ и $\Delta a(x;\mu)$ обозначим специальные приращения решения $z^0(t,x)$ и $a^0(x)$, соответствующие специальному приращению (22) управления $v^0(\,x)$.

Из установленных оценок (16) и (17) при этом следует, что $\|\Delta z(t,x;\mu)\|$ и $\|\Delta a(x;\mu)\|$ имеют порядок малости $\mu$. Поэтому из формулы приращения (15) следует, что

$$S(u^0(x),v^0(x)+\Delta v(x;\mu))-S(u^0(x),v^0(x))=$$
$$=-\mu\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[M\big(x,a^0(x),v(x),p^0(x)\big)-M\big(x,a^0(x),v^0(x),p^0(t,x)\big)\right]+o(\mu). \tag{23}$$

Из разложений (21) и (23) следует необходимое условие оптимальности.

**Теорема 1.** Если множества (18) и (19) выпуклы, то для оптимальности допустимых управлений $u^0(t)$ и $v^0(x)$ необходимо, чтобы неравенства

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H\big(t,x,z^0(t,x),u(t),\psi^0(t,x)\big)-H\big(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x)\big)\right]\le 0, \tag{24}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[M\big(x,a^0(x),v(x),p^0(x)\big)-M\big(x,a^0(x),v^0(x),p^0(t,x)\big)\right]\le 0 \tag{25}$$

выполнялись для всех допустимых управлений $u(t)$ и $v(x)$ соответственно.

Неравенства (24) и (25) представляют собой аналог дискретного принципа максимума (см., например, [5, 13]) для рассматриваемой задачи.

Заметим, что необходимые условия оптимальности допускают упрощения. Используя произвольность допустимых управлений $u(t)$ и $v(x)$, доказывается следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть множества (18) и (19) выпуклы. Тогда для оптимальности допустимых управлений $u^0(t)$ и $v^0(x)$ необходимо, чтобы неравенства

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H\left(\theta,x,z^0(\theta,x),u(\theta),\psi^0(\theta,x)\right)-H\left(\theta,x,z^0(\theta,x),u^0(\theta),\psi^0(\theta,x)\right)\right]\le 0, \quad (26)$$

$$M\left(\xi,a^0(\xi),v(\xi),p^0(\xi)\right)-M\left(\xi,a^0(\xi),v^0(\xi),p^0(t,\xi)\right)\le 0 \quad (27)$$

выполнялось для всех $\theta \in T, u \in U$ и $\xi \in X\backslash x_1, v \in V$ соответственно.

**Замечание.** Можно показать, что результаты теорем 1 и 2 равносильны.

## Заключение

В статье рассмотрена одна дискретная задача оптимального управления при предположении, что процесс описывается двумерным разностным уравнением типа Вольтерра, а начальное условие, являясь управляемым, определяется из задачи Коши для нелинейного разностного уравнения Вольтерра. При предположении выпуклости аналогов множеств допустимых скоростей рассматриваемых уравнений доказано необходимое условие оптимального первого порядка в форме дискретного аналога принципа максимума Понтрягина.

## Список источников

1. *Гараева Э. А.*, *Мансимов К. Б.* Об одной дискретной задаче оптимального управления // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук. 2014. № 1. С. 40–49. URL: http://static.bsu.az/w8/Xeberler%20Jurnali/riyaz%20%202014%20%201/5-r-mansimov-qarayeva-2.pdf (дата обращения: 30.09.2025).
2. *Гараева Э. А., Мансимов К. Б.* Достаточное условие оптимальности типа Кротова в одной дискретной задаче оптимального управления // Известия НАН Азербайджана, сер. физ.-мат. наук. 2016. № 3. С. 11–15.
3. *Москаленко А. И.* Об одном классе задач оптимального управления // Журнал Выч. Матем. и матем. физики. 1969. Т. 9, №1. С. 68–95. URL: https://www.math-net.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=7176&option_lang=rus&ysclid=mi01lgxatw505873211 (дата обращения: 30.09.2025).
4. *Мансимов К. Б.* Об одной дискретной двухпараметрической задаче управления // Вестник Томского гос. унив. 2025. № 70. С. 14–18. DOI 10.17223/19988605/70/2. EDN JVVWIQ.
5. *Методы* оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, В. В. Альсевич [и др.]. Минск: Четыре четверти, 2011. 472 с. ISBN 978-985-6981-52-7. EDN XTHIJL.
6. *Мансимов К. Б., Керимова А. В*. Линеаризованное необходимое условие оптимальности и исследование квазиособых управлений в одной ступенчатой дискретной задаче оптимального управления // Вестник ТГУ, сер. Управление, техн. и информ. 2014. Вып. 68. С. 14–27.
7. *Мансимов К. Б., Керимова А. В.* Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной ступенчатой задаче управления, описываемой разностным и интегро-дифференциальным уравнением типа Вольтерра // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2024. Т. 64, № 10. С. 1868–1880. DOI 10.31857/S0044466924100072. EDN KADJTN.
8. *Мамедова Т. Ф.,* Аналог дискретного принципа максимума и необходимые условия оптимальности особых управлений в одной дискретной двухпараметрической задаче оптимального управления // Прикладная математика и вопросы управления. 2021. № 3. С. 7–34. DOI 10.15593/2499-9873/2021.03.01. EDN FPHVDR.
9. *Мансимов К. Б., Масталиев Р. О.* Оптимизация процессов, описываемых разностными уравнениями Вольтерра. LAP Lambert Publishing. RU, 2017. 263 с.

10. *Агамалиева А. И.* Необходимые условия оптимальности в одной дискретной граничной задаче управления динамикой популяции // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 2(57). С. 5–13. DOI 10.17072/1993-0550-2022-2-5-13. EDN NITQOZ.
11. *Гороховик В. В.* Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в задаче управления дискретной системой по нетранзитивному векторному показателю качества // Труды Института математики. 2014. В. 22, № 1. С. 35–50. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=timb&paperid=207&option_lang=rus&ysclid=mi022zlc2h527631453 (дата обращения: 30.09.2025).
12. *Hilscher R., Zeidan V.* Discrete optimal control: second order optimality controls // Difference equations and Appl. 2002. No 8. P. 875–896.
13. *Мансимов К. Б.* Дискретные системы. Баку, Изд.-во БГУ, 2013.151 с.
14. *Souyousefain M., Leela S.* Stability results for difference equations of Volterra type // Appl. Math. Comput. 1990. Vol. 36, № 1. P. 51−61.
15. *Методы* решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев М.: Наука, 1981. 400 с.

**References**

1. Garayeva, E. A. and Mansimov, K. B. (2014), "On a Discrete Optimal Control Problem Bulletin of BSU", *Series of Phys. and Mathematical Sciences*, no 1, pp. 40−49. URL: http://static.bsu.az/w8/Xeberler%20Jurnali/riyaz%20%202014%20%201/5-r-mansimov-qarayeva-2.pdf (accessed date: 30.09.2025).
2. Garayeva, E. A. and Mansimov, K. B. (2016), "A Sufficient Optimality Condition of Krotov Type in a Discrete Optimal Control Problem", *Bulletin of the NAS of Azerbaijan, Series of Phys. and Mathematical Sciences,* no 3, pp. 11−15.
3. Moskalenko, A. I. (1969), "On a Class of Optimal Control Problems", *Physics, mathematics and Mathematical Physics*, vol. 9, no 1, pp. 68−95. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=7176&option_lang=rus&ysclid=mi01lgxatw505873211 (accessed date: 30.09.2025).
4. Mansimov, K. B. (2025), "On a Discrete Two-Parameter Control Problem", *Bulletin of Tomsk State University*, no 70, pp. 14−18.
5. Gabasov, R., Kirillova, F. M., Alsevich, V. V., et al. (2011), *Optimization Methods,* Chetyre Chetvert Publishing House, Minsk, Belarus, 472 p.
6. Mansimov, K. B. and Kerimova, A. V (2014), "Linearized Necessary Optimality Condition and Study of Quasi-Singular Controls in One Step-by-Step Discrete Optimal Control Problem", *Vestnik TSU, Ser. Upravlenie, Tekh. i Inform*, vol. 68, pp. 14−27.
7. Mansimov, K. B. and Kerimova A. V. (2024), "Necessary optimality conditions of the first and second orders in a step control problem described by a difference and integro-differential equation of Volterra type", *Vychisl. Mat. i Matem. Phys.,* vol. 64, no 10, pp. 1868−1880.
8. Mamedova, T. F. (2021), "An analogue of the discrete maximum principle and necessary optimality conditions for singular controls in a discrete two-parameter optimal control problem", *Applied Mathematics and Control Issues,* no 3, pp. 7−34.
9. Mansimov, K. B. and Mastaliev, R. O. (2017), *Optimization of processes described by difference Volterra equations*, LAP Lambert Publishing, Russia, 263 p.

10. Agamalieva, A. I. (2022), "Necessary optimality conditions in a discrete boundary value problem of population dynamics control", *Bulletin of Perm University, Math., Mech, Copm.Sience*, issue 2(57), pp. 5−13.
11. Gorokhovik, V. V. (2014), "Necessary optimality conditions of the first and second orders in the problem of controlling a discrete system based on a non-transitive vector quality indicator", *Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus*, vol. 22, no 1, pp. 35−50. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=timb&paperid=207&option_lang=rus&ysclid=mi022zlc2h527631453 (accessed date: 30.09.2025).
12. Hilscher, R. and Zeidan, V. (2002), "Discrete optimal control: second-order optimality controls", *Difference equations and Appl,* no 8, pp. 875−896.
13. Mansimov, K. B. (2013), *Discrete systems*, Baku, BSU Publishing House, 151 p.
14. Souyousefain, M. and Leela, S. (1990), "Stability results for difference equations of Volterra type", *Appl. Math. Comput*, vol. 36, no. 1, pp. 51−61.
15. Vasiliev, F. P. (1981), *Methods for solving extremal problems*, Nauka, Moscow, Russia, 400 p.

**Информация об авторах**:
К. Б. Мансимов – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией "Методы управления в сложных динамических системах" института Систем управления Министерства Науки и Образования Азербайджана (Азербайджан, AZ 1141, г. Баку, ул. Бахтияра Вагабзаде, д. 68), AuthorID247352;
М. Я. Наджафова – научный сотрудник лаборатории "Методы управления в сложных динамических системах" института Систем управления Министерства Науки и Образования Азербайджана (Азербайджан, AZ 1141, г. Баку, ул. Бахтияра Вагабзаде, д. 68).

**Information about the authors**:
K. B. Mansimov – Doctor of Sciences (Physical and Mathematical), Professor, Head of the Laboratory "Control in Complex Dynamical Systems" of the Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Educationof Azerbaijan (68, B. Vagabzade St., Baku, Azerbaijan, AZ1141), AuthorID 247352;
M. Ya. Najafova – research fellow of the laboratory "Control Methods in Complex Dynamic Systems" of the Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan (68, B. Vagabzade St., Baku, Azerbaijan, AZ1141).