МАТЕМАТИКА

Научная статья
УДК 517.934
DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-5-18
https://elibrary.ru/exvlvj

Об оптимальности квазиособых управлений в одной задаче управления нелинейными разностными уравнениями дробного порядка

Саадат Тофик кызы Алиева[1], **Камил Байрамали оглы Мансимов**[2]

[1, 2] Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
[2] Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджана, Баку, Азербайджан
[1]saadata@mail.ru
[2]kamilbmansimov@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления объектом, описываемого системой нелинейных разностных уравнений дробного порядка. При предположении выпуклости области управления установлено линеаризованное необходимое условие оптимальности. Отдельно изучен случай вырождения (квазиособый случай) линеаризованного условия максимума. Получены квадратичные (т.е. второго порядка) необходимые условия оптимальности квазиособых управлений.

Ключевые слова: *допустимое управление; оптимальное управление; выпуклое множество; разностное уравнение дробного порядка; дробный оператор; линеаризованный принцип максимума; дробная сумма; квазиособое управление.*

Для цитирования: Алиева С. Т., Мансимов К. Б. Об оптимальности квазиособых управлений в одной задаче управления нелинейными разностными уравнениями дробного порядка // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 5–18. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-5-18. https://elibrary.ru/exvlvj.

Статья поступила в редакцию 22.04.2025; одобрена после рецензирования 02.09.2025; принята к публикации 15.03.2026.

MATHEMATICS

Research article

On the Optimality of Quasi-Special Controls in a Nonlinear Fractional-Order Difference Equations Control Problem

Saadat T. Alieva[1], **Kamil B. Mansimov**[2]
[1, 2] Baku State University, Baku, Azerbaijan
[2] Institute of control system of the National academy of sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan
[1]saadata@mail.ru
[2]kamilbmansimov@gmail.com

Abstract. This paper considers an optimal control problem for an object described by a system of nonlinear fractional-order difference equations. Under the assumption of convexity of the control domain, a linearized necessary optimality condition is established. The degeneracy case (quasi-singular case) of the linearized maximum condition is separately studied. Quadratic (i.e., second-order) necessary optimality conditions for quasi-singular controls are obtained.

Keywords: *admissible control; optimal control; convex set; fractional order difference equation; fractional operator; linearized maximum principle; fractional sum; quasi-singular control.*

For citation: Alieva, S. T. and Mansimov, K. B. (2026), "On the Optimality of Quasi-Special Controls in a Nonlinear Fractional-Order Difference Equations Control Problem", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 5−18, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-5-18, https://elibrary.ru/exvlvj.

The article was submitted 22.04.2025; approved after reviewing 02.09.2025; accepted for publication 15.03.2026.

Введение

Дробное исчисление приобрело важное значение за последние три десятилетия из-за его применимости в различных областях науки и техники. Наличие в уравнениях дробной конечной разности интерпретируется как отражение свойства памяти процесса. В настоящее время большое внимание уделяется разработке и развитию качественной теории дифференциальных уравнений дробного порядка и соответствующих разностных уравнений дробного порядка. Исходя из теоретических и практический приложений, разработка качественной теории задач оптимального управления, объект и динамика которого описываются различными разностными уравнениями дробного порядка, также является актуальной. Отметим, что качественная теория дифференциальных и разностных уравнений дробного порядка, а также теория необходимых условий оптимальности для задач оптимального управления, описываемые разными разностными уравнениями дробного порядка, относительно мало разработана. Обзор соответствующих работ имеется, например, в работах [1−4].

В предлагаемой работе рассматривается терминальная задача оптимального управления процессом, описываемая системой нелинейных разностных уравнений дробного порядка. При предположении выпуклости области управления доказано линеаризованное условие оптимальности. Отдельно рассмотрен случай вырождения линеаризованного условия максимума (квазиособый случай). В статье используется представление решения линеаризованной задачи, получено специальное приращение второго порядка критерия качества. С помощью полученной этой формулы приращения исследован квазиособый случай и доказано необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

1. Основные понятия и вспомогательные утверждения

Приведем некоторые понятия и определения, которые в дальнейшем будут использованы.

Следующие определения, являясь стандартными [5−10], служат основой для определения разностей дробного порядка.

Пусть N множество натуральных чисел вместе с нулем. Для $a \in Z$ введем следующие обозначения: $N_a^+ = \{a, a+1, a+2, \dots,\}, \sigma(t) = t+1, \rho(t) = t-1$.

Определение 1. Дробная сумма порядка α определяется следующим образом:

$$\Delta^{-\alpha} u(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j+\alpha-1}{j} u(n-j) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-j+\alpha-1}{n-j} u(j),$$

а дробный оператор порядка α определяется следующим образом:

$$\Delta^{\alpha} u(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j-\alpha}{j} \Delta u(n-j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \binom{n-j-\alpha-1}{n-j} u(j) - \binom{n-\alpha-1}{n-1} u(0).$$

Здесь биномиальный коэффициент $\binom{a}{n}$ определяется по формуле

$$\binom{a}{n} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)\Gamma(n+1)}, & n > 0, \\ 1, & n = 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Пусть для любого $x, y \in R$, $x^{(y)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-y)}$, где Γ − гамма-функция, для которой выполняется тождество $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Заметим, что дробную сумму и дробный оператор порядка α можно определить еще и таким образом:

Пусть a – произвольное действительное и $b = k + a$, здесь $k \in N,\ k \geq 2$;

$T = \{a, a+1, \dots, b\}$, $T^k = \{a, a+1, \dots, b-1\}$, а Ŧ – множество функций определенных на T.

Определение 2. Пусть $f \in$ Ŧ. Для него левые и правые дробные суммы порядка $\alpha > 0$ определяются соответственно следующим образом:

$${}_a\Delta_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} \big(t - \sigma(s)\big)^{(\alpha-1)} f(s),$$

$${}_t\Delta_b^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=t+\alpha}^{b} \big(s - \sigma(t)\big)^{(\alpha-1)} f(s).$$

Определение 3. Пусть $0 < \alpha \leq 1$ и $\mu = 1 - \alpha$, тогда для функции $f \in$ Ŧ левые и правые дробные суммы порядка α определяются следующим образом:

$$ {}_a\Delta_t{}^{\alpha} f(t) = \Delta\left({}_a\Delta_t{}^{-\mu} f(t)\right), $$
$$ {}_t\Delta_b{}^{\alpha} f(t) = -\Delta\left({}_t\Delta_b{}^{-\mu} f(t)\right). $$

Отметим некоторое известные свойства дробной суммы и дробной разности:

1. $\Delta^{\alpha}\Delta^{\beta}f(t)$=$\Delta^{\alpha+\beta}f(t)$;
2. $\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha}f(t) = f(t) - f(0)$;
3. $\Delta^{\alpha}\Delta^{-\alpha}f(t) = f(t)$;

Имеет место следующая теорема (см., например, [1]).

Теорема 1. ***(о дробной суммировании по частям)***. *Пусть f и g – неотрицательные функции с действительными значениями, определенными на T^k и T соответственно. Если* $0 < \alpha \leq 1$ *и* $\mu = 1 - \alpha$, *то*

$$ \sum_{t=a}^{b-1} f(t)\Delta^{\alpha} g(t) = f(b-1)g(b) - f(a)g(a) + \sum_{t=a}^{b-2} \Delta^{\alpha} f(t)\, g^{\sigma}(t) + $$
$$ + \frac{\mu}{\Gamma(\mu+1)} g(a) \left(\sum_{t=a}^{b-1} (t+\mu-\alpha)^{(\mu-1)} f(t) - \sum_{t=\sigma(a)}^{b-1} \left(t+\mu-\sigma(\alpha)\right)^{(\mu-1)} f(t) \right). $$

Рассмотрим следующую систему линейных неоднородных разностных уравнений дробного порядка:

$$ \Delta^{\alpha} y(t+1) = A(t)y(t) + g(t), $$
$$ t \in \{t_0, t_0+1, \dots, t_1-1\}, \tag{1} $$

с начальными условиями

$$ y(t_0) = y_0. \tag{2} $$

Здесь $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)' -$ n-мерный вектор столбец, $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)'$ заданный n-мерный вектор, $y_0 -$ заданный постоянный n-мерный вектор столбец, t_0, t_1 – заданные числа,

$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t)\ a_{12}(t) \dots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t)\ a_{22}(t) \dots a_{2n}(t) \\ \dots\ \ \dots\ \ \dots\ \ \dots \\ a_{n1}(t)\ a_{n2}(t) \dots a_{nn}(t) \end{pmatrix} -$ заданная $n \times n$- дискретная матричная функция.

Задача (1)–(2) является дискретным аналогом задачи Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений дробного порядка.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $0 < \alpha \leq 1$ и $\mu = \alpha - 1$. *Решение $y(t)$ системы линейных, неоднородных разностных уравнений дробного порядка (1)–(2) допускает представление*

$$ y(t) = y_0 \prod_{j=t_0}^{t-1} [1 + R_{\alpha}(t-1,j)A(j)] + \sum_{j=t_0}^{t-1} R_{\alpha}(t-1,j)g(j) \times $$
$$ \times \prod_{k=j+1}^{t-1} [1 + R_{\alpha}(t-1,k)A(k)]. $$

Здесь

$$ R_{\alpha}(t,j) = \binom{t-j+\alpha-1}{t-j}. $$

Доказательство: Применяя $\Delta^{-\alpha}$ обеим сторонам уравнения (1) имеем

$$ \Delta^{-\alpha}\left(\Delta^{\alpha} y(t+1)\right) = \Delta^{-\alpha}\left(A(t)y(t) + g(t)\right) \tag{3} $$

Теперь рассмотрим левую сторону уравнения (3):

$$\Delta^{-\alpha}\big(\Delta^{\alpha} y(t+1)\big).$$

Учитывая свойства операторов дробной суммы и дробной разности проведем следующие преобразования:

$$\Delta^{-\alpha}\big(\Delta^{\alpha} y(t+1)\big) = \Delta^{-\alpha}\big(\Delta^{1-\mu} y(t+1)\big) = \Delta^{-\alpha}\Delta^{-\mu}\big(\Delta y(t+1)\big) =$$
$$\Delta^{-1}\big(\Delta y(t+1)\big) = \textstyle\sum_{j=t_0}^{t}\big(y(j+1) - y(j)\big) = y(t+1) - y(t_0).$$

Преобразуем теперь правую сторону уравнения (3). Используя определение 1, имеем:

$$\Delta^{-\alpha}\big(A(t)y(t) + g(t)\big) =$$
$$= \sum_{j=t_0}^{t}\binom{t-j+\alpha-1}{t-j}\big(A(j)y(j) + g(j)\big) =$$
$$= \sum_{j=t_0}^{t} R_{\alpha}(t,j)\big(A(j)y(j) + g(j)\big)$$

Таким образом, получили что

$$y(t+1) = y(t_0) + \sum_{j=t_0}^{t} R_{\alpha}(t,j)\big(A(j)y(j) + g(j)\big)$$

или

$$y(t) = y(t_0) + \sum_{j=t_0}^{t-1} R_{\alpha}(t-1,j)\big(A(j)y(j) + g(j)\big).$$

Из последней формулы получим что [6],

$$y(t) = y_0 \prod_{j=t_0}^{t-1}[1 + R_{\alpha}(t-1,j)A(j)] + \sum_{j=t_0}^{t-1} R_{\alpha}(t-1,j)g(j) \times$$
$$\times \prod_{k=j+1}^{t-1}[1 + R_{\alpha}(t-1,k)A(k)]. \qquad (4)$$

Теорема доказана.

2. Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим задачу о минимуме терминального функционала

$$S(u) = \varphi\big(x(t_1)\big), \qquad (5)$$

при следующих ограничениях:

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in T, \qquad (6)$$
$$\Delta^{\alpha} x(t+1) = f\big(t, x(t), u(t)\big),$$
$$t \in T = \{t_o, t_o + 1, \dots, t_1 - 1\}, \qquad (7)$$
$$x(t_0) = x_0. \qquad (8)$$

Здесь $x(t) - n$ -мерный вектор фазовых переменных, $u(t) - r$-мерный дискретный вектор управляющих воздействий, U – заданное непустое ограниченное и выпуклое множество, числа t_o, t_1 и постоянный вектор x_0 – заданы, $f(t,x,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x и u, до второго порядка включительно, $\varphi(x)$ заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, а $\Delta^{\alpha} x(t), 0 < \alpha \leq 1$-дробный оператор порядка α [5–10].

Управляющую функцию назовем *допустимым управлением*, если оно удовлетворяет ограничению (6).

Предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении дискретный аналог задачи Коши, т. е. задача (7)−(8) имеет единственное решение.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу (5) при ограничениях (6)–(8), называется *оптимальным управлением*, а пара $\big(u(t), x(t)\big)$ – *оптимальным процессом.*

В работе [11] для рассматриваемой задаче управления (5)–(8) доказано необходимое условие оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина. В случае открытости области управления в работе [12] получены условия оптимальности первого и второго порядка.

В предлагаемой работе для рассматриваемой задачи в случае выпуклости область управления доказан аналог линеаризованного принципа максимума и исследован случай его вырождения (квазиособый случай [3, 4, 13–16]).

3. Формула приращения критерия качества и необходимое условие оптимальности

Построим формулу приращения критерия качества.

Пусть $\big(u(t), x(t)\big)$ фиксированный, а $\big(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)\big)$ – произвольный допустимые процессы.

Учитывая введенные обозначения получаем что, $\Delta x(t)$ (приращение траектории $x(t)$), соответствующее $\Delta u(t)$ (приращению управления $u(t)$), будет удовлетворять системе уравнений

$$\Delta^{\alpha}\big(\Delta x(t+1)\big) = f\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big) - f\big(t, x(t), u(t)\big), \tag{9}$$

с начальными условиями

$$\Delta x(t_0) = 0. \tag{10}$$

С другой стороны, ясно, что, приращение функционала $S(u)$, отвечающее приращению $\Delta u(t)$ управления, имеет следующий вид:

$$S(u) = S(\bar{u}) - S(u) =$$
$$= \varphi\big(x(t_1) + \Delta x(t_1)\big) - \varphi\big(x(t_1)\big). \tag{11}$$

Через $\psi(t)$ обозначим пока неизвестную n −мерную вектор-столбец и положим

$$H(t, x, u, \psi) = \psi'(t) f(t, x, u).$$

Здесь и в дальнейшем, штрих для векторов означает операцию скалярного произведения, а для матриц – транспонирование. Функцию $H(t, x, u, \psi)$ назовем функцией Гамильтона–Понтрягина для рассматриваемой задачи оптимального управления (5)–(8).

Умножая обе части соотношения (9) слева скалярно на $\psi(t)$, а затем, суммируя обе части полученного тождества по t от t_0 до $t_1 - 1$ и принимая во внимание выражение функции Гамильтона–Понтрягина, получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\, \Delta^{\alpha}\big(\Delta x(t+1)\big) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\left[f\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big) - f\big(t, x(t), u(t)\big)\right] =$$
$$= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[H\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) - H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)\right].$$

С учетом этого тождества приращение (11) функционала получим, что

$$\Delta S(u) = \varphi\big(x(t_1) + \Delta x(t_1)\big) - \varphi\big(x(t_1)\big) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\, \Delta^{\alpha}\big(\Delta x(t+1)\big) -$$

$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \big[H\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) - H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)\big]. \qquad (12)$$

Теперь займемся преобразованием левой части слагаемого этой формулы. С этой целью рассмотрим выражение

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\, \Delta^{\alpha}\big(\Delta x(t+1)\big)$$

Сделав в нем замену переменных $t + 1 = s$ и учитывая начальное условие, получим

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\, \Delta^{\alpha}\big(\Delta x(t+1)\big) = \sum_{t=t_0+1}^{t_1} \psi'(t-1)\, \Delta^{\alpha}\big(\Delta x(t)\big) =$$

$$= \psi'(t_1 - 1)\Delta^{\alpha}\big(\Delta x(t_1)\big) - \psi'(t_0 - 1)\Delta^{\alpha}\big(\Delta x(t_0)\big) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\, \Delta^{\alpha}\big(\Delta x(t)\big) =$$

$$= \psi'(t_1 - 1)\Delta^{\alpha}\big(\Delta x(t_1)\big) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\, \Delta^{\alpha}\big(\Delta x(t)\big). \qquad (13)$$

Далее, с учетом теоремы о дробном суммировании по частям, приведенной выше, имеем

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1)\, \Delta^{\alpha}\big(\Delta x(t)\big) = \psi'(t_1 - 1)\Delta x(t_1) - \psi'(t_0 - 1)\Delta x(t_0) +$$

$$+ \sum_{t=t_0}^{t_1-2} {}_{t}\Delta^{\alpha}{}_{\rho(t_1)} \psi(t-1)\Delta x(t) + \frac{\mu}{\Gamma(\mu)} \Delta x(t_0) \times$$

$$\times \left(\sum_{t=t_0}^{t_1-1} (t + \mu - t_0)^{(\mu-1)} \psi(t) - \sum_{t=\sigma(a)}^{t_1-1} \big(t + \mu - \sigma(t_0)\big)^{(\mu-1)} \Delta x(t) \right) =$$

$$= \psi'(t_1 - 1)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-2} {}_{t}\Delta^{\alpha}{}_{\rho(t_1)} \psi(t-1)\Delta x(t). \qquad (14)$$

С учетом тождества (14) из (12) получим

$$\Delta S(u) = \varphi\big(x(t_1) + \Delta x(t_1)\big) - \varphi\big(x(t_1)\big) +$$

$$+ \psi'(t_1 - 1)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-2} {}_{t}\Delta^{\alpha}{}_{\rho(t_1)} \psi(t-1)\Delta x(t) -$$

$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \big[H\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)\big) - H\big(t, x(t), u(t), \psi(t)\big)\big]. \qquad (15)$$

В дальнейшем будут использованы обозначения типа

$$H_x[t] \equiv H_x\big(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)\big),\ H_{xx}[t] \equiv H_{xx}\big(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)\big),$$
$$H_u[t] \equiv H_u\big(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)\big),\ f_x[t] \equiv f_x\big(t, x(t), y(t), u(t)\big),$$
$$f_y[t] \equiv f_y\big(t, x(t), y(t), u(t)\big),\ f_u[t] \equiv f_u\big(t, x(t), y(t), u(t)\big).$$

При сделанных предположениях формулу приращения из (15), используя формулу Тейлора и функционала $S(u)$, соответствующих допустимым управлениям $\bar{u}(t)$ и $u(t)$ можно представить в виде:

$$\Delta S(u) = \varphi_x\big(x(t_1)\big)\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)\Delta x(t_1) +$$
$$+\psi'(t_1 - 1)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t-1)\Delta x(t) -$$
$$\sum_{t=t_0}^{t_1-2} {}_t\Delta^{\alpha}{}_{\rho(t_1)}\psi'(t-1)\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}[H_x'[t]\Delta x(t) + H_u'[t]\Delta u(t)] -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t) + \Delta x'(t)H_{xu}[t]\Delta u(t) +$$
$$+2\Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t) + \Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)] +$$
$$+o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2[\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|]^2. \tag{16}$$

Теперь предположим, что $\psi(t)$ является решением следующей системы линейных однородных дробного порядка разностных уравнений:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{t=t_0}^{t_1-2} {}_t\Delta^{\alpha}{}_{\rho(t_1)}\psi'(t-1) = H_x[t], t = t_1 - 1, t_1 - 2, \dots, t_0, \\ \psi(t_1 - 1) = -\varphi_x\big(x(t_1)\big). \end{cases}$$

Эту систему уравнений с заданным начальным условием назовем *сопряженной системой в рассматриваемой задаче* (5)–(8).

При выполнении соотношений (17) формула приращения (16) примет следующий вид:

$$\Delta S(u) = \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)\Delta x(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u'[t]\Delta u(t) -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t) + \Delta x'(t)H_{xu}[t]\Delta u(t) +$$
$$+2\Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t) + \Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)] +$$
$$+o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2[\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|]^2 . \tag{17}$$

В силу выпуклости множество U специальное приращение оптимального управления $u(t)$ определим следующим образом:

$$\Delta u(t;\varepsilon)=\varepsilon[v(t)-u(t)]. \qquad (18)$$

Здесь $\varepsilon\in[0,1]$ −произвольное число, а $v(t)\in U, t\in T$.

Через $\Delta x(t;\varepsilon)$ обозначим специальное приращение оптимальной траектории $x(t)$, отвечающей специальному приращению управления $u(t)$, определяемое формулой (18).

Используя схему работы [15] по аналогии, доказывается оценка

$$\|x(t+1)\|\le L_1\prod_{j=t_0}^{t-1}(1+A_\alpha(t,j)\|\Delta u(j)\|),$$

здесь $L_1=const>0, t\in T\cup t_1$.

Из этого неравенства получаем, что

$$\|\Delta x(t;\varepsilon)\|\le L_1\prod_{j=t_0}^{t-1}(1+A_\alpha(t,j)\|\Delta u(j);\varepsilon\|)\le\varepsilon L_2\prod_{j=t_0}^{t-1}(\|v(j)-u(j)\|). \qquad (19)$$

С учетом оценки (19) получаем, что

$$\|\Delta x(t;\varepsilon)\|\le\varepsilon\|v(t)-u(t)\|.$$

Можно показать, что

$$\Delta x(t:\varepsilon)=\varepsilon l(t)+o(\varepsilon;t), \qquad (20)$$

где $l(t)-$ n-мерная вектор-функция является решением системы уравнений

$$\Delta^\alpha l(t+1)=f_x[t]l(t)+f_u[t]\big(v(t)-u(t)\big), \qquad (21)$$

с начальным условием

$$l(t_0)=0. \qquad (22)$$

Принимая во внимание формулы (18)–(22) из формулы приращения (16) получим

$$S\big(u(t)+\Delta u(t:\varepsilon)\big)-S\big(u(t)\big)=$$

$$=-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_u'[t]\big(v(t)-u(t)\big)+\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta l'(t_1)\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)\Delta l(t_1)-$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\big[l'(t)H_{xx}[t]l(t)+l'(t)H_{xu}[t]\big(v(t)-u(t)\big)+$$

$$+\big(v(t)-u(t)\big)'H_{ux}[t]l(t\,)+$$

$$+\big(v(t)-u(t)\big)'(t)H_{uu}[t]\big(v(t)-u(t)\big)\big]+o(\varepsilon^2). \qquad (23)$$

Разделяя обе части разложения (23) на ε и переходя пределу при $\varepsilon\to0$ получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{v(t)}H_u'[t]\big(v(t)-u(t)\big)\le0. \qquad (24)$$

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *(линеаризованный принцип максимума).* Для оптимальности допустимого управления $\mathrm{u}(\mathrm{t})$ необходимо, чтобы неравенство (24) выполнялось для всех $v(t) \in U,\ t \in T$.

Соотношение (24) представляет собой аналог линеаризованного (дифференциального) условия максимума и является необходимым условием оптимальности первого порядка.

Изучим случай его вырождения.

Определение 4. Допустимое управление $u(t)$ назовем *квазиособым управлением*, если для всех $v(t) \in U, t \in T$:

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u'[t]\big(v(t)-u(t)\big)=0. \tag{25}$$

Из разложения (23) с учетом (25) сразу следует, что для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$l'(t_1)\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)l(t_1)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\big[l'(t)H_{xx}[t]l(t)+2l'(t)H_{xu}[t]\big(v(t)-u(t)\big)+ \\ +\big(v(t)-u(t)\big)'(t)H_{uu}[t]\big(v(t)-u(t)\big)\big]\geq 0\,. \tag{26}$$

выполнялось для всех $v(t) \in U,\ t \in T$.

Неравенство (26) является неявным необходимым условием оптимальности квазиособых управлений. Но используя его можно получить необходимое условие оптимальности, выраженное непосредственно через параметры рассматриваемой задачи.

Уравнение (21) является линейным неоднородным разностным уравнением дробного порядка относительно $l(t)$ с начальным условием (22). Поэтому решение задачи (21)–(22) на основе результата теоремы 2 допускает представление

$$l(t)=\sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1,j)f_u[j]\big(v(j)-u(j)\big)\times \\ \times\prod_{k=j+1}^{t-1}\big[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]\big]\,. \tag{27}$$

Используя представления (27), займемся преобразованием отдельных слагаемых в неравенстве (26).

Ясно, что

$$l'(t_1)\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)l(t_1)= \\ =\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1} R_\alpha(t-1,\tau)f_u[\tau]\big(v(\tau)-u(\tau)\big)\times \\ \times\prod_{k=\tau+1}^{t_1-1}\big[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]\big]\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)\times \\ \times R_\alpha(t-1,s)f_u[s]\big(v(s)-u(s)\big)\prod_{k=s+1}^{t_1-1}\big[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]\big].$$

Неравенство (26) можно преобразовать к виду

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1} R_\alpha(t-1,\tau)f_u[\tau]\big(v(\tau)-u(\tau)\big)\times$$
$$\times\prod_{k=\tau+1}^{t_1-1}\left[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]\right]\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)\times$$
$$\times R_\alpha(t-1,s)f_u[s]\big(v(s)-u(s)\big)\prod_{k=s+1}^{t_1-1}\left[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]\right]-$$
$$-\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1} R_\alpha(t-1,\tau)f_u[\tau]\big(v(\tau)-u(\tau)\big)\times$$
$$\times\prod_{k=\max(\tau+1,s+1)}^{t_1-1}\left[1+R_\alpha(t-1,\tau)f_x[\tau]\right]H_{xx}[t]\times$$
$$\times\left[1+R_\alpha(t-1,s)f_x[s]\right]R_\alpha(t-1,s)f_u[s]\big(v(s)-u(s)\big)+$$
$$+2\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1,\tau)f_u[\tau]\big(v(\tau)-u(\tau)\big)\times\right.$$
$$\times\prod_{k=\tau+1}^{t-1}\left[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]\right]H_{xu}[t]\big(v(t)-u(t)\big)$$
$$\left.+\big(v(t)-u(t)\big)'(t)H_{uu}[t]\big(v(t)-u(t)\big)\right]\geq 0\,. \tag{28}$$

Пусть $\Phi(\tau,s)-(n\times n)$ матричная функция, определяемая формулой

$$\Phi(\tau,s)=-R_\alpha(t-1,\tau)\prod_{k=\tau+1}^{t_1-1}\left[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]\right]\varphi_{xx}\big(x(t_1)\big)\times$$
$$\times R_\alpha(t-1,\tau)\prod_{k=s+1}^{t_1-1}\left[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]\right]+ \tag{29}$$
$$+R_\alpha(t-1,\tau)\prod_{k=\max(\tau+1,s+1)}^{t_1-1}\left[1+R_\alpha(t-1,\tau)f_x[\tau]\right]H_{xx}[t]\left[1+R_\alpha(t-1,s)f_x[s]\right].$$

Учитывая формулу (29), неравенство (28) записывается в виде

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\big(v(\tau)-u(\tau)\big)f'_u[\tau]\Phi(\tau,s)f_u[s]\big(v(s)-u(s)\big)+$$
$$+2\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1,\tau)f_u[\tau]\big(v(\tau)-u(\tau)\big)\times\right.$$
$$\times\prod_{k=\tau+1}^{t-1}\left[1+R_\alpha(t-1,k)f_x[k]\right]H_{xu}[t]\big(v(t)-u(t)\big)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left(v(t)-u(t)\right)' H_{uu}[t]\left(v(t)-u(t)\right)\leq 0. \tag{30}$$

Теорема 4. Для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство (30) выполнялось для всех $u(t)\in U, t\in T$.

Приведем одно следствие, вытекающее из теоремы 3.

Следствие. Если $u(t)$ квазиособое управление, то для его оптимальности необходимо, чтобы неравенство

$$\left(v-u(\theta)\right)' f_u'[\theta]\Phi(\theta,\theta) f_u[\theta]\left(v-u(\theta)\right)+$$
$$+\left(v-u(\theta)\right)' H_{uu}[\theta]\left(v-u(\theta)\right)\leq 0 \tag{31}$$

выполнялось для всех $\theta\in T$ и $v\in U$.

Доказательство: Используя произвольность $v(t)$, определим его следующим образом:

$$v(t)=\begin{cases} v, t=\theta\in T, \\ u(t), t\neq\theta\in T, \end{cases} \tag{32}$$

где $\theta\in T$ и $v\in U$ произвольный вектор.

Учитывая формулы (32) в неравенстве (30), приходим к неравенству (31). Этим следствие доказано.

Заключение

В рассматриваемой терминальной задаче оптимального управления, при предположении о выпуклости области допустимых управлений, получен аналог линеаризованного условия оптимальности, представляющего собой дискретный аналог принципа максимума Понтрягина. Особое внимание уделено случаю, когда линеаризованное условие максимума вырождается, то есть становится тривиальным. Такие управления называются квазиособыми и требуют отдельного анализа. Для квазиособых управлений получены квадратичные необходимые условия оптимальности, которые являются более информативными, чем линеаризованные условия.

Полученные результаты могут быть использованы для решения практических задач управления системами с дробной динамикой, в частности, в экономике, в биологии и технике. В качестве перспективных направлений дальнейших исследований можно отметить разработку численных методов для решения задач оптимального управления с квазиособыми управлениями на основе полученных условий, расширение результатов на случай невыпуклых областей управления, исследование влияния параметров дробного порядка на свойства оптимальных управлений. Таким образом, данная работа внесла вклад в теорию оптимального управления разностными системами дробного порядка и открывает перспективы для дальнейших исследований в этой области.

Список источников

1. *Nuno R., Bastos O., Rui A., Ferreira C., Delfim F., Torres M.* Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations // Discret. Contin. Dynam. Syst. 2011.Vol. 29, № 2. P. 417–437.
2. *Bahaa G. M.* Fractional optimal control problem for differential system with delay argument // Advanc. Differen. Equat. 2017. № 1. P. 1−19.
3. *Bahaa G. M.* Fractional optimal control problem for differential system with control constraints // Filomat. 2016. Vol. 30. № 8. P. 2177–2189.

4. *Miller K., Ross B*. An introduction to fractional calculus and fractional differential equations/. New York: Wiley. 1993. 366 p.
5. *Podlubny I.* Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999. 340 p.
6. *Mohan J. J., Deekshitulu G. V. S. R*. Fractional Order Difference Equations. // Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations Volume. 2012. Article ID 780619. 11 p. doi:10.1155/2012/780619
7. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
8. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations // Elsevier. Amsterdam, The Netherlands. 2006.
9. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of their Applications. Minsk: Nauka and Tekhnika. Belarus, 1987.
10. *Discrete* fractional calculus / C. Goodric, A. C. Piterson. Department of Mathematic University of Nebraska–Lincoln Lincoln, NE, USA, 2015.
11. *Алиева С. Т*. Принцип максимума Понтрягина для нелинейных разностных уравнений дробного порядка // Вестник Томского Государственного Университета. Управление, вычислительная техника. 2021. № 54. С. 4–11.
12. *Алиева С. Т*. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной задаче управления, описываемой нелинейными разностными уравнениями дробного порядка // Автоматика и телемеханика. 2023. № 2. С. 54–64.
13. *Габасов Р., Кириллова Ф. М*. Особые оптимальные управления. М.: URSS, 2011.
14. *Мансимов К. Б*. Дискретные системы. Баку: изд-во Бакинского Государственного Университета, 2013. 151 с.
15. *Джаббарова А. Я., Мансимов К. Б.* Исследование квазиособых управлений в дискретно-непрерывной задаче оптимального управления типа Россера // Вестник Белорусского государственного университета. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. 2004. № 4. С. 13–23.
16. *Алиева С. Т., Мансимов К. Б*. Аналог линеаризованного принципа максимума для задачи оптимального управления нелинейными разностными уравнениями дробного порядка // Вестник Пермского Университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. № 1(52). С. 9–15.

References

1. Nuno, R., Bastos, O., Rui, A., Ferreira, C., Delfim, F. and Torres, M. (2011), "Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations", *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, vol. 29, no 2, pp. 417–437.
2. Bahaa, G. M. (2017), "Fractional optimal control problem for differential system with delay argument", *Advances in Difference Equations*, no 1, pp. 1–19.
3. Bahaa, G. M. (2016), "Fractional optimal control problem for differential system with control constraints", *Filomat*, vol. 30, no 8, pp. 2177–2189.
4. Miller, K. and Ross, B. (1993), *An introduction to fractional calculus and fractional differential equations*, Wiley, New York, 366 p.
5. Podlubny, I. (1999), *Fractional differential equations*, Academic Press, San Diego, 340 p.
6. Mohan, J. J. and Deekshitulu, G. V. S. R. (2012), "Fractional order difference equations", *Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations*, article ID 780619, 11 p., doi: 10.1155/2012/780619.
7. Nakhushev, A. M. (2003), *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its applications]. Fizmatlit, Moscow, 272 p.
8. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. (2006), *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.

9. Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. (1987), *Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications*, Nauka and Tekhnika, Minsk, Belarus, 587 p.
10. Goodrich, C. and Peterson, A. C. (2015), *Discrete fractional calculus. Department of Mathematic*s, University of Nebraska–Lincoln, Lincoln, NE, USA.
11. Alieva, S. T. (2021), "Printsip maksimuma Pontryagina dlya nelineynykh raznostnykh uravneniy drobnogo poryadka" [Pontryagin's maximum principle for nonlinear difference equations of fractional order], *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science], no 54, pp. 4–11.
12. Alieva, S. T. (2023), "Neobkhodimye usloviya optimal'nosti pervogo i vtorogo poryadkov v odnoy zadache upravleniya, opisyvaemoy nelineynymi raznostnymi uravneniyami drobnogo poryadka" [Necessary optimality conditions of first and second order in a control problem described by nonlinear difference equations of fractional order], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], no 2, pp. 54–64.
13. Gabasov, R. and Kirillova, F. M. (2011), *Osobye optimal'nye upravleniya* [Special optimal controls], URSS, Moscow, 224 p.
14. Mansimov, K. B. (2013), *Diskretnye sistemy* [Discrete systems], Baku State University Press, Baku, 151 p.
15. Jabbarova, A. Ya. and Mansimov, K. B. (2004), "Issledovanie kvaziosobykh upravleniy v diskretno-nepreryvnoy zadache optimal'nogo upravleniya tipa Rossera" [Investigation of quasi-special controls in a discrete-continuous optimal control problem of Rossler type], *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika* [Bulletin of Belarusian State University. Series 1. Physics. Mathematics. Computer Science], no 4, pp. 13–23.
16. Alieva, S. T. and Mansimov, K. B. (2021), "Analog linearizovannogo printsipa maksimuma dlya zadachi optimal'nogo upravleniya nelineynymi raznostnymi uravneniyami drobnogo poryadka" [Analogue of the linearized maximum principle for an optimal control problem with nonlinear difference equations of fractional order], *Vestnik Permskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], no 1 (52), pp. 9–15.

Информация об авторах:

С. Т. Алиева – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры математической кибернетики Бакинского Государственного Университета (AZ1148, Азербайджан, Баку, улица Захида Халилова, 23);

К. Б. Мансимов – доктор физико-математических наук, профессор; AuthorID 247352.

Information about the authors:

S. T. Alieva – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor of the Department of Mathematical Cybernetics at Baku State University (23 Zahid Khalilov Street, Baku, Azerbaijan, AZ1148);

K. B. Mansimov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; AuthorID 247352.