

УДК 532.529; 532.525  
PACS 47.55.Ca, 47.27.nf

## Струя жидкости в трубе, заполненной газом

Е. С. Садилов

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия  
sadilove@icmm.ru

Исследуется струя жидкости в трубе, заполненной газом. При этом используется одномерное приближение. В трубу через вход подается жидкость с заданной скоростью. Рассмотрены две ситуации: когда жидкость подаётся в виде непрерывной струи и когда струя жидкости на входе состоит из отдельных капелек. Для струи в виде каплей учитывается влияние силы тяжести, для цельной же струи тяжестью пренебрегается. Скорость газа рядом со входом полагается равной нулю. Жидкость и газ рассматриваются в несжимаемом приближении. На выходе из трубы задается давление. Исследованы ламинарный и турбулентный режимы течения. Труба наклонена под произвольным углом к горизонтали. Найдены аналитические решения для стационарных режимов течений. Для случая цельной струи решение получено в неявной форме. Для случая же струи в виде каплей в ламинарном режиме течения решение имеет неявную форму, а в турбулентном – явную. Рассмотрены условия применимости решений.

**Ключевые слова:** труба; одномерное приближение; двухфазная среда

*Поступила в редакцию 18.10.2024; после рецензии 11.12.2024; принята к опубликованию 11.12.2024*

## A fluid jet in a gas-filled pipe

E. S. Sadilov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia  
sadilove@icmm.ru

A jet of liquid in a pipe filled with gas is investigated. A one-dimensional approximation is used. The liquid is fed into the pipe through the inlet at a given velocity. Two situations are considered: when the liquid is fed as a continuous jet and when the liquid jet at the inlet consists of individual droplets. For the jet in the form of drops, the effect of gravity is taken into account, while for the solid jet, gravity is neglected. The gas velocity near the inlet is assumed to be zero. The liquid and gas are considered in an incompressible approximation. The pressure at the outlet of the pipe is set. Laminar and turbulent flow regimes are investigated. The pipe is inclined at an arbitrary angle to the horizontal. Analytical solutions for stationary flow regimes have been found. For the case of the solid jet, the solution has been obtained in implicit form. For the case of the jet in the form of drops, the solution is implicit in the laminar flow regime and explicit in the turbulent flow regime. The conditions for the applicability of the solutions are considered.

**Keywords:** pipe; one-dimensional approximation; two-phase medium

*Received 18 October 2024; revised 11 December 2024; accepted 11 December 2024*

doi: 10.17072/1994-3598-2025-1-13-20

### 1. Введение

Изучение многофазных течений в трубах важно для таких областей промышленности, как ядерная энергетика, химическое производство и нефтегазовая отрасль [1–3]. Существуют ядерные реакторы

(ВВЭР), охлаждаемые водой, находящейся под высоким давлением. При нормальной эксплуатации таких реакторов вода всё время находится в жидком состоянии, но при аварийных ситуациях давление может понижаться, что приводит к вскипанию воды. Для расчёта охлаждения таких реакторов в

аварийных режимах и требуется создание численных кодов, рассчитывающих течения пароводяных смесей по трубам. Также существуют кипящие водо-водяные реакторы, в которых вода в ядре реактора закипает и в них уже при нормальных условиях существует две фазы. В нефтегазовой отрасли в добываемой нефти помимо самой нефти присутствуют нефтяные газы, вода и твёрдые примеси. А так как нефть транспортируется по трубам, то в связи с этим требуется создание кодов, рассчитывающих течения многофазных сред по трубам.

Для тестирования численных кодов, рассчитывающих течения многофазных сред в трубах, нередко используют специальные упрощённые задачи, которые имеют аналитическое решение. Одной из таких задач является задача о водопроводном кране, где жидкость, окружённая газом, течёт в виде струи внутри трубы. Эта задача была предложена Рансомом [4]. В его подходе внешняя среда газ фактически заменяется постоянным давлением, а жидкость считается невязкой. В более строгом подходе аналитическое решение для этой задачи было найдено Цзоу и др. [5]. Они не вводили предположения о постоянстве давления в газе. При этом было найдено точное стационарное течение в невязком случае для двух ситуаций. Во-первых, было получено решение для несжимаемых жидкости и газа. Во-вторых, был изучен случай, когда давление жидкости и газа линейно зависит от плотности. Также было найдено нестационарное решение для несжимаемых жидкости и газа, но при искусственном предположении о неравенстве давления в жидкости и газе (локально). Эти решения использовались для сравнения с численным методом, созданным этими же авторами. К примеру, задача о кране исследовалась численно в работах [5, 6].

В данной работе рассматривается стационарная задача для двух несжимаемых жидкостей, но учитывается трение между жидкостями.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается круглая вертикальная труба, заполненная газом. В эту трубу сверху либо снизу подаётся жидкость в виде цельной струи, либо в виде струи, состоящей из капель. Для первой ситуации жидкость и газ стратифицированы так, что жидкость находится в центре трубы, а газ – вблизи стенок трубы. Схематически эта ситуация показана на рис. 1. Слева изображён случай цельной струи, а справа – случай струи в виде капель. На входе заданы скорость и объёмная доля жидкости.  $z$ -компонента скорости жидкости на входе будет считаться положительной, т.е. жидкость втекает в трубу. Скорость газа на входе считается равной нулю. На выходе зафиксировано давление. Жидкость и газ считаются несжимаемыми.

Для описания течения в трубах нередко используется одномерное приближение. Оно получается

путём осреднения уравнений в поперечном направлении. Подробнее данная процедура описана в [1, 7].

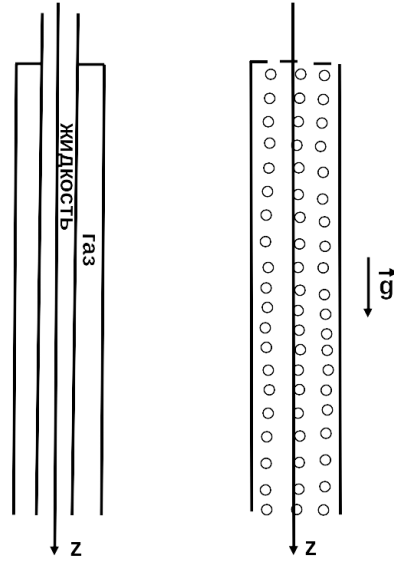


Рис. 1. Геометрия задачи

Система уравнений в одномерном приближении, описывающая данную ситуацию, имеет вид:

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_g u_g)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \alpha_l}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_l u_l)}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\alpha_g \rho_g \left( \frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial z} \right) = -\alpha_g \frac{\partial p}{\partial z} - f_i - \mu_g u_g + \alpha_g \rho_g g_z, \quad (3)$$

$$\alpha_l \rho_l \left( \frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial z} \right) = -\alpha_l \frac{\partial p}{\partial z} + f_i + \alpha_l \rho_l g_z, \quad (4)$$

$$\alpha_g + \alpha_l = 1. \quad (5)$$

Здесь индексы “ $g$ ” и “ $l$ ” относятся к газовой и жидкой фазам соответственно,  $\alpha$  – объёмная доля,  $u$  – скорость,  $p$  – давление,  $t$  – время,  $z$  – пространственная координата,  $g_z$  –  $z$ -компонента гравитационного ускорения,  $\mu_g$  – коэффициент трения газа о стенку,  $f_i$  – межфазная сила трения, выражение для которой различно для цельной струи и струи, состоящей из капель, а также для ламинарного и турбулентного режимов течения. Конкретные выражения для силы межфазного трения будут рассмотрены ниже в соответствующих разделах.

Система уравнений (1)–(5) должна быть дополнена следующими граничными условиями:

$$z = 0: u_l = U_l > 0, u_g = 0, \alpha_g = \alpha_g^{(0)}, \quad \alpha_l = 1 - \alpha_g^{(0)}, \quad (6)$$

$$z = L: p = P. \quad (7)$$

В работе изучается стационарный случай, что означает равенство нулю всех временных производных. Тогда система уравнений (1)–(5) может быть переписана в виде:

$$\frac{d(\alpha_g u_g)}{dz} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d(\alpha_l u_l)}{dz} = 0, \quad (9)$$

$$\rho_g u_g \frac{du_g}{dz} = -\frac{dp}{dz} - \frac{f_i}{\alpha_g} - \frac{\mu_g}{\alpha_g} u_g + \rho_g g_z, \quad (10)$$

$$\rho_l u_l \frac{du_l}{dz} = -\frac{dp}{dz} + \frac{f_i}{\alpha_l} + \rho_l g_z, \quad (11)$$

$$\alpha_g + \alpha_l = 1. \quad (12)$$

### 3. Цельная струя. Аналитические решения

Для цельной струи закон для межфазного трения для ламинарного течения имеет следующий вид (см., например, [8]):

$$f_i = \mu_i(u_g - u_l), \quad (13)$$

где  $\mu_i$  – параметр, зависящий от диаметра трубы, вязкостей жидкости и газа, от диаметра струи. Для простоты будем считать его постоянным. Данный закон трения аналогичен закону трения для пористой среды.

Напомним, что ламинарные течения наблюдаются для чисел Рейнольдса меньше некоторого критического. В случае межфазного трения число Рейнольдса определяется через разность скоростей фаз. То есть для разности скоростей меньше некоторой критической (для трубы с фиксированным поперечным сечением) течение будет ламинарным. Для числа Рейнольдса больше некоторого критического наблюдается турбулентное течение.

В турбулентном случае будет использоваться закон для межфазного трения, рассмотренный в статье Хана и Гуо [8] (он почти совпадает с законом трения, предложенным Тайтелем и Дуклером [7, 9]):

$$f_i = \bar{\mu}_i |u_g - u_l|^{1-\delta} (u_g - u_l), \quad (14)$$

Этот закон записан в обозначениях, отличных от обозначений статьи Хана и Гуо [8]. Закон трения очень похож на закон трения Блазиуса [10, 11], полученный для гладких труб для однофазной среды. Только у Блазиуса  $\delta = 0.25$  и коэффициент  $\bar{\mu}_i$  имеет другой вид (так как Блазиус рассматривал однофазную среду). При нахождении решения будет использоваться предположение, что коэффициент  $\bar{\mu}_i$  постоянный, что является некоторым приближением (в реальности он зависит от диаметра струи).

Для цельной струи будем пренебрегать силой тяжести, т.е. будем считать, что  $g_z = 0$ .

Как видно, уравнения (8), (9) имеют следующее решение:

$$\alpha_g u_g = A_g, \quad (15)$$

$$\alpha_l u_l = A_l, \quad (16)$$

где  $A_g, A_l$  – константы. Использование граничных условий (6) позволяет получить следующие значения для этих констант:

$$A_g = 0, \quad (17)$$

$$A_l = \alpha_l^{(0)} U_l. \quad (18)$$

Подстановка полученных значений констант  $A_g, A_l$  в решения (15) и (16), а  $\alpha_l$  – в уравнение (12) даёт:

$$u_g = 0, \quad (19)$$

$$\alpha_l = \frac{A_l}{u_l} = \frac{\alpha_l^{(0)} U_l}{u_l}, \quad (20)$$

$$\alpha_g = 1 - \frac{A_l}{u_l} = 1 - \frac{\alpha_l^{(0)} U_l}{u_l}. \quad (21)$$

Подставляя выражения (19)–(21) в уравнения (10), (11) и используя граничные условия (6), (7), можно получить решения для скорости и давления:

$$u_l \exp\left(\frac{\alpha_l^{(0)} U_l}{u_l}\right) = U_l \exp\left(\alpha_l^{(0)} - \frac{\mu_l z}{\rho_l \alpha_l^{(0)} U_l}\right), \quad (22)$$

$$p = -\mu_i \int_z^L \frac{u_l^2}{u_l - \alpha_l^{(0)} U_l} d\xi + P. \quad (23)$$

Заметим, что найденное решение корректно для объемных долей жидкой и газовой фаз, принадлежащих диапазонам  $0 \leq \alpha_l \leq 1$  и  $0 \leq \alpha_g \leq 1$ . Для достаточно длинной трубы возможна ситуация, когда  $\alpha_l = 1$  (и, соответственно,  $\alpha_g = 0$ ) для некоторого значения  $z = z_*$  и при увеличении  $z$ :  $\alpha_l > 1$ . В данной точке происходит контакт жидкости со стенкой трубы. Это означает, что в этой точке контакта и для  $z > z_*$  нужно решать задачу для жидкости, полностью заполняющей трубу, и сшивать с предыдущим решением в точке первоначального контакта жидкости со стенкой трубы. Для  $z = z_*$  скорость жидкости будет равна  $u_l = \alpha_l^{(0)} U_l$ , а для  $z < z_*$ :  $u_l > \alpha_l^{(0)} U_l$ .

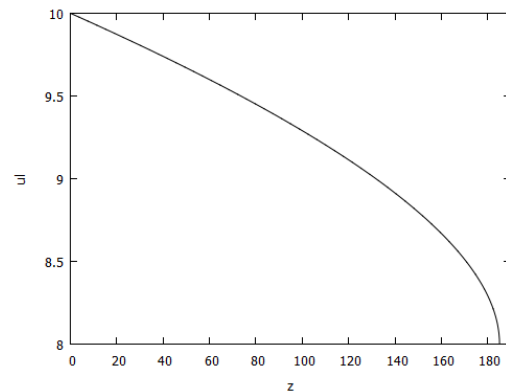


Рис. 2: Зависимость скорости жидкости  $u_l$  от координаты  $z$  (монотонный режим).

Зависимость скорости жидкости от  $z$  для ламинарного режима течения показана на рис. 2. Для расчетов были использованы следующие значения

параметров:  $\rho_l = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu_l = 1 \text{ кг/(м}^3\text{с)}$ ,  $U_l = 10 \text{ м/с}$ ,  $\alpha_l^{(0)} = 0.8$ . Решение построено для  $z \leq z_*$ , где  $z_*$  такое, что  $\alpha_l = 1$  и  $u_l = \alpha_l^{(0)} U_l$ .

Как видно из рис. 2, скорость с удалением от входа непрерывно убывает. Решение приводится до той точки, в которой первая жидкость касается стенки (и полностью вытесняет вторую жидкость). В этой точке производная от скорости становится бесконечной.

Для турбулентного режима течения решение имеет вид:

$$u_g = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\alpha_l^{(0)}}{2 - \delta} \left[ \left( \frac{U_l}{u_l} \right)^{2 - \delta} - 1 \right] - \frac{1}{1 - \delta} \left[ \left( \frac{U_l}{u_l} \right)^{1 - \delta} - 1 \right] = - \frac{\bar{\mu}_l}{\rho_l \alpha_l^{(0)} U_l^\delta} z, \quad (22)$$

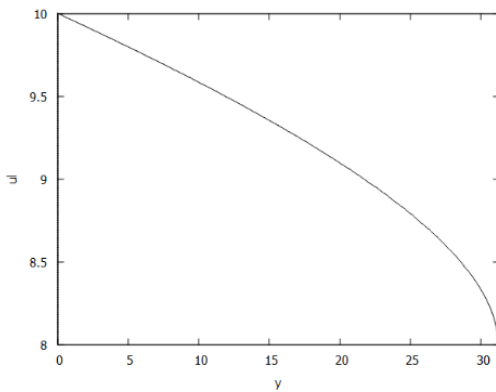
$$\alpha_l = \frac{A_l}{u_l} = \frac{\alpha_l^{(0)} U_l}{u_l}, \quad (20)$$

$$\alpha_g = 1 - \frac{A_l}{u_l} = 1 - \frac{\alpha_l^{(0)} U_l}{u_l}. \quad (21)$$

$$p = -\bar{\mu}_l \int_z^L \frac{u_l^{3 - \delta}}{u_l - \alpha_l^{(0)} U_l} d\xi + P. \quad (23)$$

Зависимость скорости жидкости от  $z$  турбулентного режима течения показана на рис. 3. Для расчетов были использованы следующие значения параметров:  $\rho_l = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\bar{\mu}_l = 1$ ,  $U_l = 10 \text{ м/с}$ ,  $\alpha_l^{(0)} = 0.8$ . Решение построено для  $z \leq z_*$ , где  $z_*$  такое, что  $\alpha_l = 1$  и  $u_l = \alpha_l^{(0)} U_l$ .

Как видно, рис. 3 качественно похож на рис. 2. Решение также приводится до той точки, в которой первая жидкость касается стенки (и полностью вытесняет вторую жидкость), и производная от скорости также обращается в бесконечность.



**Рис. 3:** Зависимость скорости жидкости  $u_l$  от координаты  $z$  (турбулентный режим).

Обратим внимание, что при  $\mu_l = 0$  и  $\bar{\mu}_l$  для обоих случаев получается тривиальное решение:

$$u_g = 0,$$

$$u_l = U_l,$$

$$p = P,$$

$$\alpha_l = \alpha_l^{(0)},$$

$$\alpha_g = 1 - \alpha_l^{(0)},$$

показывающее, что в предельном случае нулевой вязкости полученные решения сходятся к правильному пределу.

#### 4. Струя в виде капель.

##### Аналитические решения

Для капельной струи закон межфазного трения в ламинарном случае будет рассмотрен в том же виде, что и в статье [12] (с точностью до обозначений):

$$f_i = C \alpha_g \alpha_l (u_g - u_l), \quad (24)$$

где  $C$  – некоторая положительная константа.

Для турбулентного же случая будем использовать закон межфазного трения в том же виде, что и в статье [13] (с точностью до обозначений):

$$f_i = \bar{C} \alpha_g \alpha_l |u_g - u_l| (u_g - u_l), \quad (25)$$

где  $\bar{C}$  – некоторая положительная константа.

Рассмотренная выше система уравнений (8)-(12) и граничных условий (6), (7) для ламинарного режима течения имеет следующее аналитическое решение:

$$u_g = 0, \quad (26)$$

$$\exp\left(\frac{u_l}{B}\right) |u_l - B| = |U_l - B| \exp\left\{\frac{1}{B} \left(U_l - \frac{cz}{\rho_l}\right)\right\}, \quad (27)$$

$$p = (C \alpha_l^{(0)} U_l + \rho_g g_z)(z - L) + P, \quad (28)$$

$$\alpha_l = \frac{\alpha_l^{(0)} U_l}{u_l}, \quad (29)$$

$$\alpha_g = 1 - \frac{\alpha_l^{(0)} U_l}{u_l}, \quad (30)$$

где

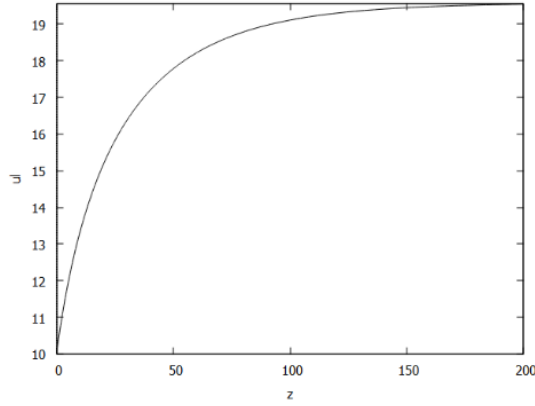
$$B = \frac{(\rho_l - \rho_g) g_z}{c}. \quad (31)$$

Как и в предыдущем случае, это решение корректно для объемных долей жидкой и газовой фаз, находящихся в диапазонах  $0 \leq \alpha_l \leq 1$  и  $0 \leq \alpha_g \leq 1$  (при этом  $u_l > \alpha_l^{(0)} U_l$ ).

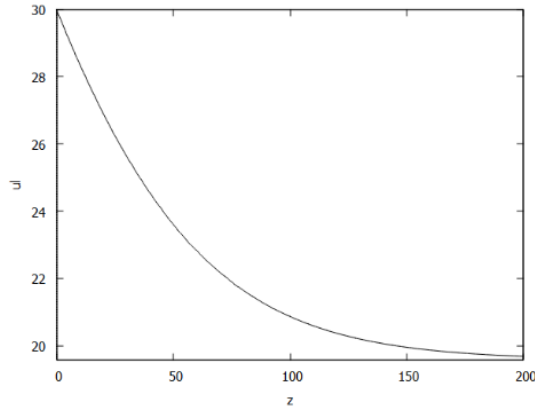
Заметим, что для случая, когда струя направлена вниз ( $g_z > 0$ ), при  $U_l = B$ , скорости и объемная доли постоянны вдоль  $z$ :  $u_l = B$ ,  $u_g = 0$ ,  $\alpha_l = \alpha_l^{(0)}$ ,  $\alpha_g = 1 - \alpha_l^{(0)}$ . Это также означает, что для  $g_z > 0$  существуют три качественно разных случая:  $U_l < B$ ,  $U_l = B$ ,  $U_l > B$ .

Зависимость скорости жидкости от  $z$  показана на рис. 4, 5. Для этих расчетов были использованы

следующие значения параметров:  $\rho_l = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_g = 1.2041 \text{ кг/м}^3$ ,  $C = 500 \text{ кг/(м}^3\text{с)}$ ,  $\alpha_l^{(0)} = 0.8$ ,  $g_z = 9.8 \text{ м/с}^2$  (направление движения струи вертикально вниз),  $U_l = 10 \text{ м/с}$  – для рис. 3 и  $U_l = 30 \text{ м/с}$  – для рис. 4. Для этих значений параметров  $B \approx 19.58$ , т.е.  $U_l < B$  – для рис. 4 и  $U_l > B$  – для рис. 5.



**Рис. 4.** Зависимость скорости жидкости  $u_l$  от координаты  $z$  при  $g_z > 0$  ( $U_l < B$ )



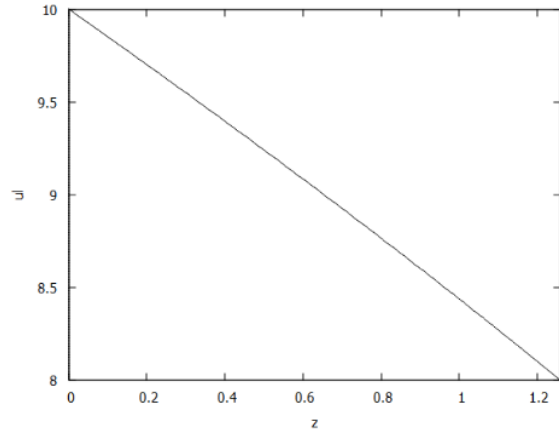
**Рис. 5.** Зависимость скорости жидкости  $u_l$  от координаты  $z$  при  $g_z > 0$  ( $U_l > B$ )

Как видно, для  $U_l = 10 \text{ м/с} < B$  скорость жидкости с увеличением координаты растет и постепенно выходит на стационар ( $u_l \rightarrow B$ ). Для случая же  $U_l = 30 \text{ м/с} > B$  скорость жидкости с увеличением координаты уменьшается и также постепенно выходит на стационар ( $u_l \rightarrow B$ ).

Для противоположного направления движения струи для скорости жидкости на входе  $U_l = 10 \text{ м/с}$  (вертикально вверх,  $g_z = -9.8 \text{ м/с}^2$ ) решение представлено на рис. 6.

Заметим, что коэффициент  $B$  (формула (31)) не изменится, если мы поменяем местами индексы  $l$  и  $g$  и одновременно изменим знак  $g_z$ . В этом случае выход на стационар будет наблюдаться для трубы, направленной вверх, а значение предельной скорости не изменится. Это соответствует ситуации, когда мы в трубу, заполненную водой, запускаем газ

в виде пузырей. Подобное в практических приложениях наблюдается, например, при флотации.



**Рис. 6.** Зависимость скорости жидкости  $u_l$  от координаты  $z$  при  $g_z < 0$

Теперь рассмотрим предельный случай  $C \rightarrow 0$ , что соответствует отсутствию силы межфазного трения. В этом случае решение имеет вид

$$u_g = 0, \quad (32)$$

$$u_l = \sqrt{U_l^2 + 2 \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_l}\right) g_z z}, \quad (33)$$

$$p = \rho_g g_z (z - L) + P, \quad (34)$$

$$\alpha_l = \frac{\alpha_l^{(0)} U_l}{u_l}, \quad (35)$$

$$\alpha_g = 1 - \frac{\alpha_l^{(0)} U_l}{u_l}. \quad (36)$$

Это решение совпадает со стационарным решением для несжимаемой невязкой жидкости, полученным Цзоу и др. [5], что говорит о согласованности полученного решения с известными решениями. Отметим, что в отличие от вязкого случая для данного решения отсутствует выход на стационар.

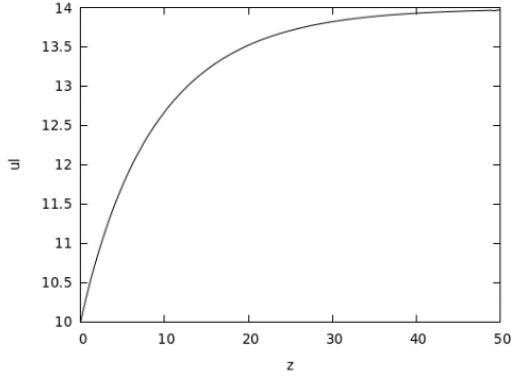
Для турбулентного режима течения аналитическое решение имеет вид:

$$u_g = 0, \quad (37)$$

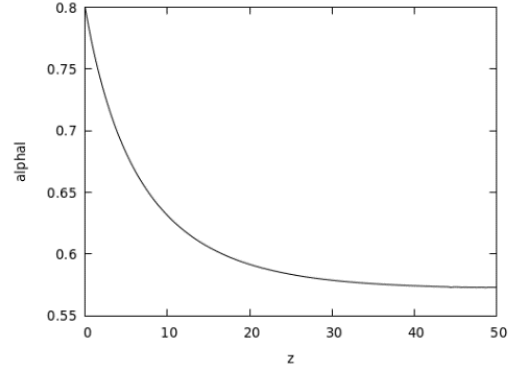
$$u_l = \sqrt{(U_l^2 - \bar{B}) \exp\left(-\frac{2\bar{C}z}{\rho_l}\right) + \bar{B}}, \quad (38)$$

$$p = \frac{\alpha_l^{(0)} \rho_l U_l}{2} \left\{ \left[ \sqrt{\bar{B}} \ln \left( \frac{F(z) + \sqrt{\bar{B}}}{F(L) + \sqrt{\bar{B}}} \right) - \sqrt{\bar{B}} \ln \left( \frac{F(z) - \sqrt{\bar{B}}}{F(L) - \sqrt{\bar{B}}} \right) + 2[F(L) - F(z)] \right] + \rho_g g_z (z - L) + P, \right. \quad (39)$$

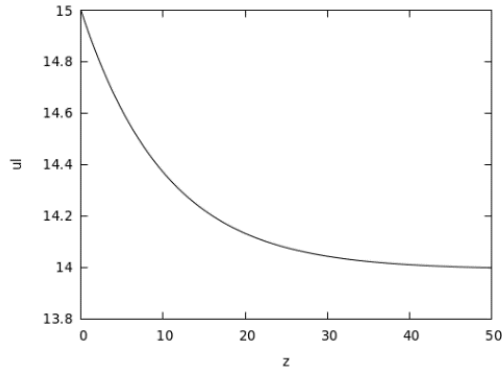
$$\alpha_l = \frac{\alpha_l^{(0)} U_l}{\sqrt{(U_l^2 - \bar{B}) \exp\left(-\frac{2\bar{C}z}{\rho_l}\right) + \bar{B}}}, \quad (40)$$



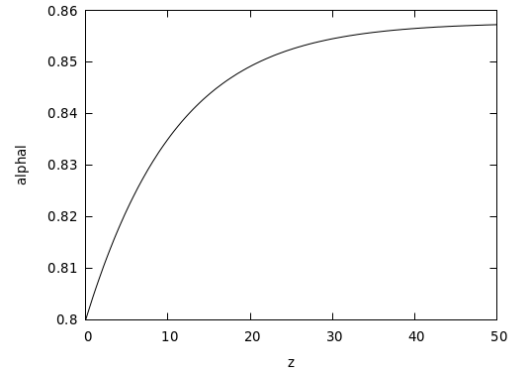
**Рис. 7.** Зависимость скорости жидкости  $u_l$  от координаты  $z$  при  $g_z > 0$  ( $U_l < \sqrt{B}$ )



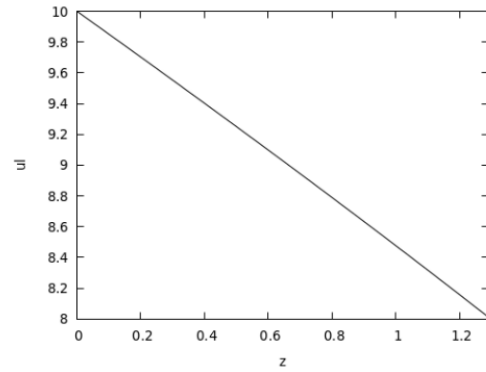
**Рис. 8.** Зависимость объёмной доли жидкости  $\alpha_l$  от координаты  $z$  при  $g_z > 0$  ( $U_l < \sqrt{B}$ )



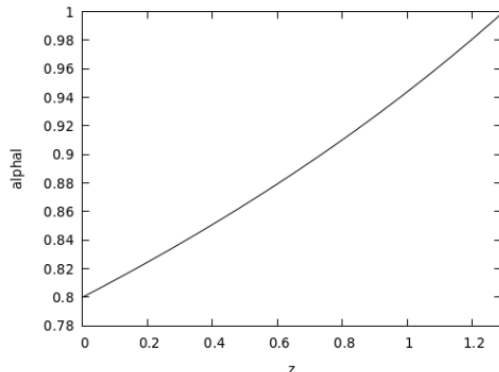
**Рис. 9.** Зависимость скорости жидкости  $u_l$  от координаты  $z$  при  $g_z > 0$  ( $U_l > \sqrt{B}$ )



**Рис. 10.** Зависимость объёмной доли жидкости  $\alpha_l$  от координаты  $z$  при  $g_z > 0$  ( $U_l > \sqrt{B}$ )



**Рис. 11.** Зависимость скорости жидкости  $u_l$  от координаты  $z$  при  $g_z < 0$



**Рис. 12.** Зависимость объёмной доли жидкости  $\alpha_l$  от координаты  $z$  при  $g_z < 0$

$$\alpha_g = 1 - \frac{\alpha_l^{(0)} U_l}{\sqrt{(U_l^2 - \bar{B}) \exp\left(-\frac{2\bar{C}z}{\rho_l}\right) + \bar{B}}}, \quad (41)$$

где

$$\bar{B} = \frac{(\rho_l - \rho_g)g_z}{\bar{C}}, \quad (42)$$

$$F(z) = \sqrt{(U_l^2 - \bar{B}) \exp\left(-\frac{2\bar{C}z}{\rho_l}\right) + \bar{B}}.$$

Как и в предыдущих двух случаях, решение корректно только при  $0 \leq \alpha_l \leq 1$  и  $0 \leq \alpha_g \leq 1$  ( $u_l > \alpha_l^{(0)} U_l$ ).

Подобно предыдущему случаю для струи, направленной вниз ( $g_z > 0$ ), существует особое решение, а именно, при  $U_l = \sqrt{B}$  скорости и объёмная доли постоянны вдоль  $z$ :  $u_l = \sqrt{B}$ ,  $u_g = 0$ ,  $\alpha_l = \alpha_l^{(0)}$ ,  $\alpha_g = 1 - \alpha_g^{(0)}$ . При этом также существуют три качественно разных случая:  $U_l < \sqrt{B}$ ,  $U_l = \sqrt{B}$ ,  $U_l > \sqrt{B}$ .

Зависимости скорости и объёмной доли жидкости от  $z$  для  $U_l < \sqrt{B}$  показаны на рис. 7, 8. Для этого случая были использованы следующие значения параметров:  $\rho_l = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_g = 1.2041$

кг/м<sup>3</sup>,  $\bar{C}$  направлена вниз). Для этих значений параметров  $\sqrt{\bar{B}} \approx 13.99$ .

На рис. 9, 10 приведён случай:  $U_l > \sqrt{\bar{B}}$ . При этом  $U_l = 15$  м/с, остальные значения параметров те же, что на рис. 7, 8.

Как видно из рис. 7, 8, при  $U_l < \sqrt{\bar{B}}$  скорость с увеличением координаты растёт и постепенно выходит на стационар ( $u_l \rightarrow \sqrt{\bar{B}}$ ). Объёмная же доля убывает и также выходит на стационар.

В случае же  $U_l > \sqrt{\bar{B}}$  (рис. 9, 10) все происходит наоборот. Скорость с увеличением координаты уменьшается и постепенно выходит на стационар ( $u_l \rightarrow \sqrt{\bar{B}}$ ), а объёмная доля растёт и постепенно выходит на стационар.

На рис. 11, 12 представлен случай для обратного направления струи,  $g_z = -9.8$  м/с<sup>2</sup>.

По аналогии с ламинарным случаем можно заметить, что коэффициент  $\bar{B}$  (формула (42)) не изменится, если поменять местами индексы  $l$  и  $g$  и одновременно изменить знак  $g_z$ . Также, как и в ламинарном случае, выход на стационар будет наблюдаться для трубы, направленной вверх, а значение предельной скорости не изменится.

В невязком пределе ( $\bar{C} \rightarrow 0$ ) полученное решение, как и должно быть, совпадает с решением для ламинарного случая (32)–(36).

## 5. Заключение

В рамках одномерного подхода и предположения о несжимаемости жидкостей получены новые аналитические решения для течения жидкости в виде цельной струи в трубе, заполненной газом, а также для случая, когда струя течёт в виде капель. Рассмотрены ламинарный и турбулентный режимы течения. Для случая цельной струи для ламинарного и турбулентного режимов течения решение найдено в неявной форме. Для случая же струи в виде капель для ламинарного режима течения решение найдено в неявной форме, в то время как для турбулентного режима течения решение получено в явной форме. В отличие от аналитического решения из статьи [5] расчёты проведены с учетом вязкости, но в пренебрежении сжимаемостями жидкости и газа. Также рассмотрены случаи, когда труба направлена вверх и вниз. Приводятся условия применимости решений. Для трубы, направленной вниз, обнаружено явление выхода течения на стационар (в случае достаточно длинной трубы), что не наблюдается для невязкой жидкости. Полученные точные решения могут быть использованы для тестирования численных алгоритмов, предназначенных для расчёта двухфазных течений в трубах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 121031700169-1).

## Список литературы

1. Bratland O. Pipe flow 2: Multi-phase flow assurance, 2009. (Электронный ресурс) URL: <https://drbratland.com/PipeFlow2/> (дата обращения: 12.12.2024)
2. Barre F., Bernard M. The CATHARE Code Strategy and Assessment // Nucl. Eng. Des. 1990. Vol. 124. P. 257–284.
3. Bendiksen K. H., Malnes D., Moe R., Nuland S. The dynamic two-fluid model OLGA: Theory and application // SPE Prod. Eng. 1991. Vol. 6. P. 171–180.
4. Ransom V. H. Numerical benchmark tests // Multi-phase Sci. Technol. 1987. Vol. 3. P. 465–473.
5. Zou L., Zhao H., Zhang H. New analytical solutions to the two-phase water faucet problem // Progress in Nuclear Energy. 2016. Vol. 91. P. 389–398. DOI: 10.1016/j.pnucene.2016.05.013
6. Wang Zh., Gong J., Wu Ch. Numerical simulation of one-dimensional two-phase flow using a pressure-based algorithm // Numerical Heat Transfer, Part A. 2015. Vol. 68. P. 369–387. DOI: 10.1080/10407782.2014.986383
7. Ombga-Essama C. Numerical modelling of transient gas-liquid flows (Application to stratified and slug flow regimes): PhD Thesis. Cranfield: Cranfield University, 2004. 272 p.
8. Han P., Guo L. Numerical simulation of terrain-induced severe slugging coupled by hydrodynamic slugs in a pipeline-riser system // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2015. Vol. 56. P. 355–366.
9. Taitel Y., Duckler A. E. A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near-horizontal gas-liquid flow // AIChE Journal. 1976. Vol. 22. N 1. P. 47–55.
10. Blasius H. Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten // Forsch. Arb. Ing.-Wes. 1913. N. 134. Berlin. 41 p.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 713 с.
12. Zeng Q. L., Aydemir N. U., Lien F. S., Xu T. Extension of staggered-grid-based AUSM-family schemes for use in nuclear safety analysis codes // Int. J. Multiphase Flow. 2017. Vol. 93. P. 17–32. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2017.03.014
13. Zou L., Haihua Zh., Hongbin Zh. Implicitly solving phase appearance and disappearance problems using two-fluid six-equation model // Progress in Nuclear Energy. 2016. Vol. 88. P. 198–210. DOI: 10.1016/j.pnucene.2015.12.006

## References

1. Bratland O. Pipe flow 2: Multi-phase flow assurance, 2009. (Electronic Resource) URL: <https://drbratland.com/PipeFlow2/> (Access date: 12 December 2024).
2. Barre F., Bernard M. The CATHARE Code Strategy and Assessment. Nucl. Eng. Des., 1990, vol. 124, pp. 257–284.

3. Bendiksen K. H., Malnes D., Moe R., Nuland S. The dynamic two-fluid model OLGA: theory and application. *SPE Prod. Eng.*, 1991, vol. 6, pp. 171–180.
4. Ransom V. H. Numerical benchmark tests. *Multiphase Sci. Technol.*, 1987, vol. 3, pp. 465–473.
5. Zou L., Zhao H., Zhang H. New analytical solutions to the two-phase water faucet problem. *Progress in Nuclear Energy*, 2016, vol. 91, pp. 389–398. DOI: 10.1016/j.pnucene.2016.05.013
6. Wang Zh., Gong J., Wu Ch. Numerical simulation of one-dimensional two-phase flow using a pressure-based algorithm. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 2015, vol. 68, pp. 369–387. DOI: 10.1080/10407782.2014.986383
7. Ombga-Essama C. *Numerical modelling of transient gas-liquid flows (Application to stratified and slug flow regimes)*: PhD Thesis. Cranfield: Cranfield University, 2004. 272 p.
8. Han P., Guo L. Numerical simulation of terrain-induced severe slugging coupled by hydrodynamic slugs in a pipeline–riser system. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2015, vol. 56, pp. 355–366.
9. Taitel Y., Duckler A. E. A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near-horizontal gas-liquid flow. *AIChE Journal*, 1976, vol. 22, no 1, pp. 47–55.
10. Blasius H. Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. *Forschg. Arb. Ing.-Wes.*, 1913, no. 134, 41 p. (In German)
11. Schlichting G. *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill series in mechanical engineering. 1979. 838 p.
12. Zeng Q. L., Aydemir N. U., Lien F. S., Xu T. Extension of staggered-grid-based AUSM-family schemes for use in nuclear safety analysis codes. *Int. J. Multiphase Flow.*, 2017, vol. 93, pp. 17–32. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2017.03.014
13. Zou L., Haihua Zh., Hongbin Zh. Implicitly solving phase appearance and disappearance problems using two-fluid six-equation model. *Progress in Nuclear Energy*, 2016, vol. 88, pp. 198–210. DOI: 10.1016/j.pnucene.2015.12.006

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Садилов Е. С. Струя жидкости в трубе, заполненной газом // Вестник Пермского университета. Физика. 2025. № 1. С. 13–20. doi: 10.17072/1994-3598-2025-1-13-20

**Please cite this article in English as:**

Sadilov E. S. A fluid jet in a gas-filled pipe. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2025, no. 1, pp. 13–20. doi: 10.17072/1994-3598-2025-1-13-20

**Сведения об авторах**

Евгений Сергеевич Садилов, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королёва, 1, Пермь, 614013

**Author information**

Evgeniy S. Sadilov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia.