

УДК 532.685  
PACS 47.56.+r, 44.30.+v

## Уточнение модели концентрационной конвекции в пористой среде с учетом иммобилизации примеси и слабой закупорки

Л. С. Клименко<sup>1\*</sup>, И. А. Кольцова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

<sup>2</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

\* lyudmilaklimenko@gmail.com

Изучено влияние слабой закупорки на процесс транспорта тяжелой примеси через горизонтальный слой пористой среды. На границах слоя задан постоянный перепад концентрации, течение вдоль слоя создаётся постоянным перепадом давления. Настоящая задача является концентрационным аналогом известной задачи Хортон-Роджерса-Лапвуда (ХРЛ). Получены уравнения, описывающие транспорт примеси с учетом осаждения (иммобилизации) частиц примеси на пористом скелете. Процесс осаждения описан в рамках известной линейной модели сорбции (линейной ММ модели). Закупорка предполагалась слабой, в том смысле, что влияние иммобилизованных частиц на пористость среды считалось незначительным и учитывалось только в уменьшении проницаемости среды. Найдено, что основное решение этой системы допускает режим стационарной фильтрации вдоль слоя. При этом распределение примеси линейно, что совпадает с известным решением ХРЛ. Численно проанализирована устойчивость основного состояния. Получены и проанализированы нейтральные кривые, а также минимальные значения критических параметров (числа Релея-Дарси, волнового числа и частоты) в зависимости от параметров системы. Показано, что возникающая неустойчивость, как и в задаче ХРЛ, носит колебательный характер. Учет закупорки, наряду с учетом осаждения, приводит к повышению устойчивости режима стационарной фильтрации и затуханию колебаний. Определены границы применимости распространенной в литературе линейной ММ модели без учета закупорки.

**Ключевые слова:** концентрационная конвекция; ММ модель; закупорка

Поступила в редакцию 11.09.2023; после рецензии 01.10.2023; принята к опубликованию 09.10.2023

## Refinement of the model of concentration convection in a porous medium taking into account immobilization of impurity and weak clogging

L. S. Klimenko<sup>1\*</sup>, I. A. Koltsova<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

<sup>2</sup> Perm State University, Perm, Russia

\* lyudmilaklimenko@gmail.com

The influence of weak clogging on the process of a heavy impurity transport through a horizontal layer of a porous medium is studied. A constant concentration drop is set at the boundaries of the layer, the flow along the layer is maintained by a constant pressure drop. The present problem is a concentration analog of the well-known Horton-Rogers-Lapwood (HRL) problem. The equations

describing the transport of the impurity taking into account the deposition (immobilization) of the impurity particles on the porous skeleton are obtained. The deposition process is described in the framework of the well-known linear sorption model (linear MIM model). Clogging is assumed to be weak in the sense that the influence of deposited particles on porosity is considered to be negligible and is taken into account only with respect to the reduction of the permeability of the medium. It is found that the basic solution to this system admits the regime of stationary filtration along the layer. In this case, the impurity distribution is linear, which coincides with the known HRL solution. The stability of the basic state is analyzed numerically. Neutral curves as well as minimum values of critical parameters (Rayleigh-Darcy number, wave number, and frequency) depending on the system parameters are obtained and analyzed. It is shown that the arising instability, as in the HRL problem, is oscillatory by nature. Taking into account the clogging (along with taking into account the deposition) leads to an increase in the stability of the stationary filtration flow and attenuation of the oscillations. The study determines the limits of applicability of the linear MIM model, widespread in the literature, that does not taking into account the clogging.

**Keywords:** concentration convection; MIM model; clogging

*Received 11 September 2023; revised 01 October 2023; accepted 09 October 2023*

doi: 10.17072/1994-3598-2023-4-35-44

## 1. Введение

Процесс транспорта примеси в пористой среде осложняется взаимодействием частиц примеси со скелетом среды. В наиболее простых случаях этим взаимодействием пренебрегают и описывают транспорт с помощью стандартной модели адвекции диффузии (ADE) [1]. Однако результаты, полученные в рамках такого подхода, противоречат многим экспериментальным данным [2]. Наиболее широко используемым в настоящее время подходом к описанию такого транспорта является MIM модель (mobile/immobile media) [3]. В рамках этой концепции предполагается, что примесь можно разделить на две «фазы»: подвижную (движущуюся с потоком жидкости) и неподвижную (сцепленную или адсорбированную). В этом случае перенос примеси осуществляется через подвижную фазу и описывается моделью ADE с дополнительным слагаемым, которое описывает отток примеси в неподвижную фазу.

Поскольку концентрация выражается двумя функциями, необходимо дополнительное уравнение, описывающее кинетику обмена примеси между фазами [4]. Конкретный вид кинетического уравнения определяется характером взаимодействия примеси со скелетом среды [3]. В случае, если концентрация примеси велика, появляется необходимость учитывать эффект насыщения неподвижной фазы. Поскольку только конечный объем примеси может осесть на стенку необходимо ограничивать интенсивность адсорбционного потока, что приводит к нелинейной модели с Ленгмюровской изотермой сорбции [5]. В случае же, если объемная концентрация примеси существенно ниже объема порового пространства, линейная MIM модель [6] дает хорошее согласие с экспериментальными данными. Более подробную

информацию о различных моделях можно найти в работе [7].

Задача о конвекции в горизонтальном слое пористой среды довольно подробно изучена в литературе. Настоящая задача аналогична классической задаче Хортона–Роджерса–Лэпвуда (ХРЛ) [9, 10]. Режим течения в рамках задачи ХРЛ определяется двумя безразмерными параметрами: безразмерным горизонтальным волновым числом и числом Рэлея–Дарси. Последнее число характеризует действие сил плавучести, которые приводят к возникновению конвективного течения. В работе [10] также было проведено исследование случая проницаемой верхней границы – в такой ситуации минимальное значение критического числа Рэлея и волновое число уменьшаются.

Устойчивость режима однородной фильтрации жидкости вдоль горизонтального слоя пористой среды при наличии заданного внешнего потока изучалась в работах [11, 12]. В этом случае скорость внешнего потока описывается дополнительным безразмерным параметром – числом Пекле. В работе [11] показано, что наличие горизонтальной прокачки вдоль слоя приводит к замене монотонного режима неустойчивости на колебательный режим. Однако критические значения волнового числа и числа Рэлея–Дарси не меняются, а частота колебаний оказывается пропорциональной числу Пекле. Более того, позже в работе [13] показано, что модулированный во времени внешний поток влияет на колебательный режим течения, но порог остается неизменным.

В дальнейшем задача была усложнена учетом иммобилизации частиц растворенного вещества с использованием MIM-подхода [13, 14]. Исследование проводилось численно в рамках линейной [14] и фрактальной [15] MIM-модели. Показано, что учет иммобилизации частиц приводит к появлению зависимости критических параметров (чис-

ла Релея-Дарси, волнового числа, частоты) от параметров задачи: интенсивности внешнего потока, параметров адсорбции и десорбции.

В настоящей работе проведено уточнение модели, описанной в работе [15], а именно, произведен учет влияния немобильных частиц на проницаемость. Рассмотрение проведено для случая малой концентрации примеси, поэтому для описания транспорта примеси была использована линейная МММ модель [6]. Поскольку наличие адсорбированных частиц приводит к сокращению объема пор, что, в свою очередь, обуславливает увеличение гидравлического сопротивления среды или падение проницаемости. В настоящей работе предполагается, что пористость меняется медленно и можно использовать модель с однозначной зависимостью. Как показывают экспериментальные данные, наиболее универсальной моделью такого типа является формула Козени-Кармана [8], которая и используется в настоящей работе.

Настоящая статья состоит из трех частей. В первой части обсуждается уточнение модели транспорта примеси при наличии слабой закупорки, применение полученных уравнений к течению в горизонтальном слое, а также вид основного состояния системы. Во второй части исследована устойчивость основного состояния, получены нейтральные кривые в пространстве параметров системы. Последняя часть является заключением и посвящена обсуждению результатов работы.

## 2. Постановка задачи

### 2.1. Основные уравнения

Для описания транспорта примеси рассмотрим некоторый объем насыщенной пористой среды  $V$ . Обозначим за  $V_0$  объем порового пространства чистой (незагрязнённой) пористой среды объема  $V$ . При фильтрации через пористую среду смеси предположим, что часть примеси может оседать на стенках скелета и, как следствие, объем порового пространства будет уменьшаться. Обозначим за  $V_i$  объем, занимаемый примесью, осевшей на стенке пор, при этом пусть  $V_l$  обозначает объём несущей жидкости, а  $V_m$  – объём свободной примеси, переносимой общим потоком жидкости. Следовательно, можно ввести новую величину  $V_p = V_l + V_m$  – текущий объём поры, т.е. объём пространства, в котором несущая жидкость и свободная примесь могут перемещаться. При этом, очевидно, что  $V_0 = V_p + V_i$ . Поделив этот объём на объём пористой среды  $V$ , получаем

$$\frac{V_0}{V} = \frac{V_p}{V} + \frac{V_i}{V}. \quad (1)$$

В этом соотношении по определению величина  $\phi_0 = V_0/V$  является пористостью чистой среды (без примеси). Тогда отношение  $V_p/V = \phi$  можно назвать текущей пористостью среды, а слагаемое  $V_i/V = \tilde{Q}$  определяет объемную концентрацию осевшей части примеси. В этих терминах равенство (1) переписывается следующим образом:

$$\phi = \phi_0 - \tilde{Q}. \quad (2)$$

Определим объемную концентрацию подвижной части примеси как  $\tilde{C} = V_m/V_p$ , разделив для этого выражение  $V_p = V_m + V_l$  на текущий объём поры:

$$1 = \frac{V_l}{V_p} + \tilde{C}, \quad (3)$$

где  $V_l/V_p$  есть объемная концентрацией несущей жидкости в текущем поровом пространстве.

Уравнение для эволюции концентрации получим из законов сохранения массы. Запишем закон сохранения массы для частиц примеси:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{V_m}{V} + \frac{V_i}{V} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \tilde{C} + \tilde{Q}) = -\text{div}(\phi \mathbf{J}_c). \quad (4)$$

Здесь поток массы  $\mathbf{J}_c$  – это поток подвижной примеси и, согласно закону Фика, может быть записан как  $\mathbf{J}_c = -D\nabla\tilde{C} + \mathbf{v}\tilde{C}$ , где  $D$  – эффективный коэффициент диффузии,  $\mathbf{v}$  – скорость жидкости в поре. Тогда уравнение (4) можно переписать как

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \tilde{C} + \tilde{Q}) = \text{div}(\phi D \nabla \tilde{C} - \phi \mathbf{v} \tilde{C}). \quad (5)$$

Аналогичным образом можно записать закон сохранения для массы несущей жидкости:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{V_l}{V} \right) = \text{div} \left( \phi D \nabla \left( \frac{V_l}{V} \right) - \mathbf{v} \left( \frac{V_l}{V} \right) \right), \quad (6)$$

что с учетом (3) имеет вид

$$\frac{\partial (\phi(1-\tilde{C}))}{\partial t} = \text{div}(\phi D \nabla(1-\tilde{C}) - \mathbf{v}(1-\tilde{C})), \quad (7)$$

суммируя выражения (5) и (7) с учетом (4), получаем, что для скорости верно условие несжимаемости:

$$\text{div}(\phi \mathbf{v}) = \text{div} \mathbf{u} = 0, \quad (8)$$

где  $\mathbf{u} = \phi \mathbf{v}$  – скорость фильтрации.

В настоящем исследовании мы ограничиваемся случаем слабой закупорки и малой начальной концентрации, в этом случае можно считать, что пористость постоянна  $\phi \approx \phi_0$  везде, кроме проницаемости. Таким образом, транспорт примеси описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_0 \tilde{C} + \tilde{Q}) = \operatorname{div}(\phi_0 D \nabla \tilde{C} - \mathbf{u} \tilde{C}), \quad (9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Данную систему уравнений необходимо дополнить еще двумя соотношениями: уравнением, связывающим поле скорости с внешними задаваемыми параметрами, а также уравнением, описывающим переход примеси из подвижного состояния в неподвижное (кинетическим соотношением). Для связи скорости фильтрации с приложенным внешним давлением будем использовать известное уравнение Рейля-Дарси [16]:

$$\frac{\eta}{\kappa(\phi)} \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \beta_c \mathbf{g} \tilde{C}, \quad (10)$$

где  $\kappa(\phi)$  – проницаемость среды,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости,  $\rho$  – плотность несущей жидкости,  $\beta_c$  – коэффициент концентрационного расширения,  $\mathbf{g}$  – гравитационное ускорение.

Поскольку мы ограничены случаем малых концентраций, можно предположить, что оседание частиц на стенки пор происходит достаточно медленно без существенного изменения формы пористой среды. В этом случае можно использовать соотношение Козени-Кармана [8]:

$$\kappa(\phi) = \gamma \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}, \quad (11)$$

где  $\gamma$  – параметр Козени-Кармана, связанный с геометрическими свойствами пористой среды.

Переход примеси из подвижного состояния (фазы) в неподвижное будем описывать в рамках МММ подхода [3]. В случае слабых концентраций, как было показано в [6, 14], линейная модель сорбции является применимой, ее и будем использовать в настоящем исследовании

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} = \alpha(\tilde{C} - K_d \tilde{Q}), \quad (12)$$

где  $\alpha, K_d$  – коэффициенты массопереноса и распределения примеси, соответственно [17].

Таким образом, замкнутая система уравнений, которая описывает транспорт примеси в пористой среде с учетом слабой закупорки, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_0 \tilde{C} + \tilde{Q}) = \phi_0 D \Delta \tilde{C} - \mathbf{u} \nabla \tilde{C},$$

$$\mathbf{u} = -\frac{\kappa(\phi)}{\eta} (\nabla p - \rho \beta_c \mathbf{g} \tilde{C}),$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} = \alpha(\tilde{C} - K \tilde{Q}), \quad (13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

$$\kappa(\phi) = \gamma \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}, \quad \phi = \phi_0 - \tilde{Q}.$$

Применим описанную модель к задаче о фильтрации примеси в горизонтальном слое пористой среды.

## 2.2. Задача о горизонтальном слое

Рассмотрим фильтрацию примеси через бесконечный горизонтальный слой пористой среды (рис. 1). Будем считать, что смесь состоит из несущей несжимаемой жидкости и мелкодисперсной тяжелой примеси. Фильтрация обеспечивается заданным постоянным градиентом давления в горизонтальном направлении. Между верхней и нижней границами поддерживается постоянный перепад концентрации. Горизонтальные границы предполагаются непроницаемыми для жидкости.

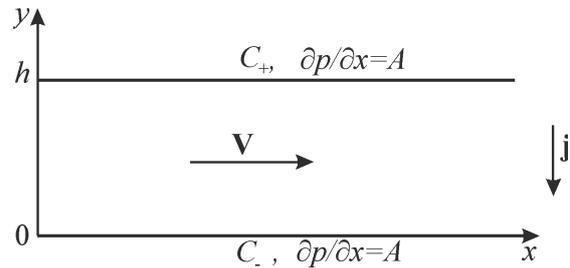


Рис. 1. Конфигурация задачи

Представим уравнения (13) в безразмерной форме, выберем следующие единицы измерения для искомых переменных:

$$[L] = h, \quad [T] = h^2 / D,$$

$$[u] = D \phi_0 / h, \quad [p] = Ah,$$

$$[q] = \phi_0 C_0, \quad [c] = C_0 = C_+ - C_-.$$

Тогда уравнения (13) переписутся в следующем виде:

$$\partial_t (C + Q) = -\mathbf{U} \cdot \nabla C + \Delta C,$$

$$\mathbf{U} = -\kappa(\phi) (Pe \nabla P - R_p C \mathbf{j}),$$

$$\partial_t Q = aC - bQ, \quad (14)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0,$$

$$\phi = \phi_0 (1 - C_0 Q),$$

где вектор  $\mathbf{j}$  – единичный вектор, направленный вдоль поля тяжести.

В данной задаче мы ограничимся случаем слабой начальной концентрации, поэтому будем считать, что величина  $C_0 Q \ll 1$ . Раскладывая проницаемость в ряд по этому малому параметру, получаем

$$\kappa(\phi_0 (1 - C_0 Q)) = \kappa_0 + \kappa_1 Q.$$

Здесь  $\kappa_0 = \phi_0^3 (1 - \phi_0)^{-2}$  – проницаемость чистой среды,  $\kappa_1 = \kappa_0 (\phi_0 - 3)(1 - \phi_0)^{-1} C_0$  – малая добавка, связанная с возможной адсорбцией примеси и описывающая слабую закупорку среды.

Таким образом, система (14) содержит следующие безразмерные параметры: безразмерные коэффициенты адсорбции и десорбции  $a = C_0 \alpha L^2 / D$ ,  $b = \alpha K_d L^2 / D$ , число Пекле  $Pe = AL\gamma / (D\phi_0\eta)$ , описывающее интенсивность фильтрации вдоль слоя, и число Рейля-Дарси  $Rp = C_0 \rho \beta_c g \gamma L / (\eta D \phi_0)$ , описывающее интенсивность течения возникающего из-за сил плавучести. Кроме того, систему характеризуют пористость чистой среды  $\phi_0$  и начальная концентрация мобильной компоненты  $C_0$ .

Обсудим граничные условия. Будем считать, что на границах слоя задан постоянный перепад концентрации и они не проницаемы для жидкости. Поток вдоль слоя создается постоянным перепадом давления:

$$\begin{aligned} c|_{y=0} &= 0, \quad c_{y=1} = C_0, \\ \partial P / \partial x|_{x=\infty} &= 1. \end{aligned} \quad (15)$$

### 2.3. Основное состояние

Рассматриваемая задача (14)–(15) допускает решение, соответствующее режиму стационарной горизонтальной фильтрации, которое может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} q &= Q^0(y), \quad c = C^0(y), \\ \vec{U} &= (U^0(y), 0). \end{aligned} \quad (16)$$

Подстановка (16) в (14) дает следующее решение в основном состоянии

$$\begin{aligned} P^0 &= -x - \frac{R_p}{2Pe} y^2, \\ U^0 &= \kappa Pe = \left( \kappa_0 + \kappa_1 \frac{a}{b} y \right) Pe, \\ Q^0 &= \frac{a}{b} y, \quad C^0 = y. \end{aligned} \quad (17)$$

Как и ожидалось, концентрация примеси имеет линейное распределение, что совпадает с полученными ранее результатами без учета закупорки [3, 14]. Следует отметить, что несмотря на то, что решение (17), полученное для случая слабой закупорки отличается от решения, полученного без учета [14], лишь коэффициентом, это приводит к тому, что скорость жидкости вдоль слоя уже не является постоянной и зависит от проницаемости среды.

### 2.4. Малые возмущения

Перейдем к изучению устойчивости этого состояния, для этого рассмотрим задачу о малых возмущениях вида:

$$\begin{aligned} Q &= Q^0 + q, \quad C = C^0 + c, \\ \vec{U} &= (U^0 - \partial \psi / \partial y, \partial \psi / \partial x). \end{aligned}$$

Для удобства перейдем к функции тока для возмущений  $\psi$ . В этом случае задача (14) с граничными условиями (15) с учетом линеаризации по возмущениям может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \partial_t(c + q) &= (\Delta - \kappa Pe \partial_x)c - \partial_x \psi, \\ \Delta_2 \psi &= -R_p \kappa \partial_x c + \frac{a \kappa_1}{\kappa b} (\partial_y \psi + \kappa_1 q Pe) - \\ &\quad - \kappa_1 Pe \partial_y q, \\ \partial_t q &= ac - bq, \end{aligned} \quad (18)$$

Стоит отметить, что без учета закупорки ( $\kappa_1 = 0$ ) система переходит в

$$\begin{aligned} \partial_y^2 \psi + \partial_x^2 \psi &= -R_p \kappa \partial_x c, \\ \partial_t(c + q) &= (\Delta_2 - \kappa Pe \partial_x)c - \partial_x \psi, \\ \partial_t q &= ac - bq. \end{aligned}$$

что совпадает с видом, полученным в работе [14].

Для случай нормальных возмущений система (18) переписывается в виде

$$\begin{aligned} -i\omega(c + q) &= (\partial_y^2 - k^2 - ik\kappa Pe A)c - ik\psi, \\ (\partial_y^2 - k^2)\psi &= \\ &= -ikR_p \kappa c + \frac{\kappa_1 a}{\kappa b} (\partial_y \psi + \kappa_1 Pe q) - \kappa_1 Pe \partial_y q, \\ -i\omega q &= ac - bq. \end{aligned}$$

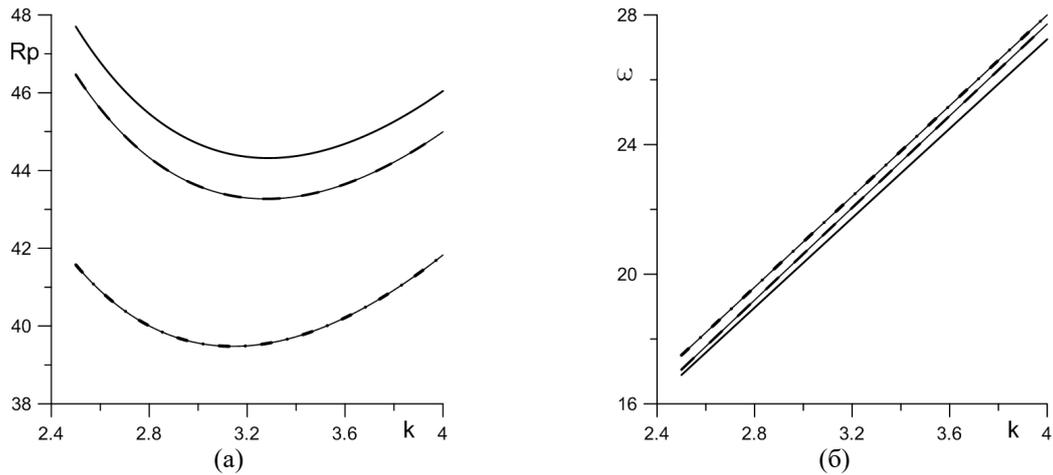
### 3. Результаты

Система (19) решалась численно методом дифференциальной прогонки [18]. Решение системы (19) имеет вид стандартной нейтральной кривой, представленной на рис. 2.

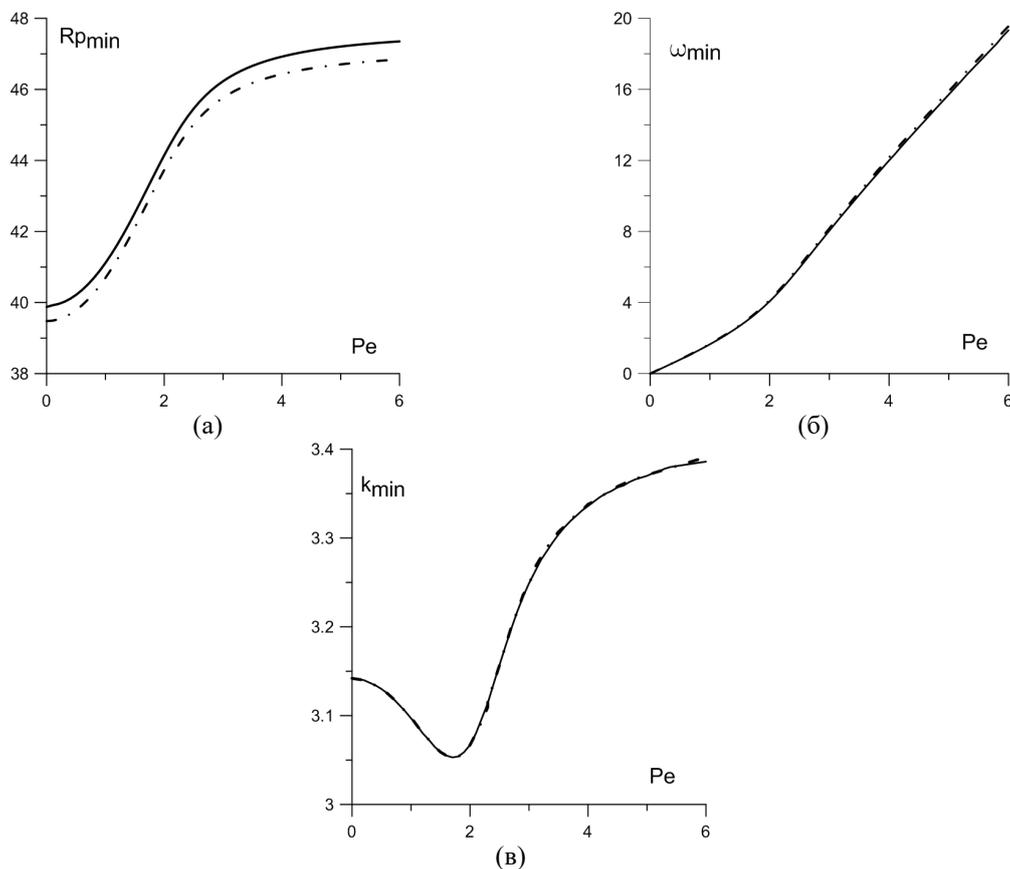
Как видно из рисунка, в случае от отсутствия иммобилизации и закупорки, т.е. при значениях  $a=0$  и  $\kappa = \kappa(\phi_0) = const$ , результаты вычислений совпадают с классическими результатами, полученными в работе [11]:  $Rp = (\pi^2 + k^2)^2 / k^2$ . При учете иммобилизации, но постоянной проницаемости  $\kappa = \kappa(\phi_0) = const$ , как отмечено в работе [14], устойчивость системы повышается. Результаты, полученные в данной работе, совпадают с результатами, полученными ранее в [14]:

$$Rp = (\pi^2 + k^2)^2 / k^2 + (\pi^2 + k^2) / k^2 \cdot \omega^2 a / (b^2 + \omega^2).$$

Учет слабой закупорки приводит к еще большему повышению устойчивости (сплошная линия на рис. 2).



**Рис. 2.** Зависимости числа Релея (а) и частоты (б) от волнового числа. Для случая отсутствия закупорки и иммобилизации – штрих-пунктирная линия, для случая отсутствия закупорки но с учетом иммобилизации – пунктирная линия, с учетом закупорки и иммобилизации сплошная ( $C_0 = 0.005$ ). Значения остальных параметров  $\phi_0 = 0.4$ ,  $a = b = 4$ ,  $Pe = 4$ .

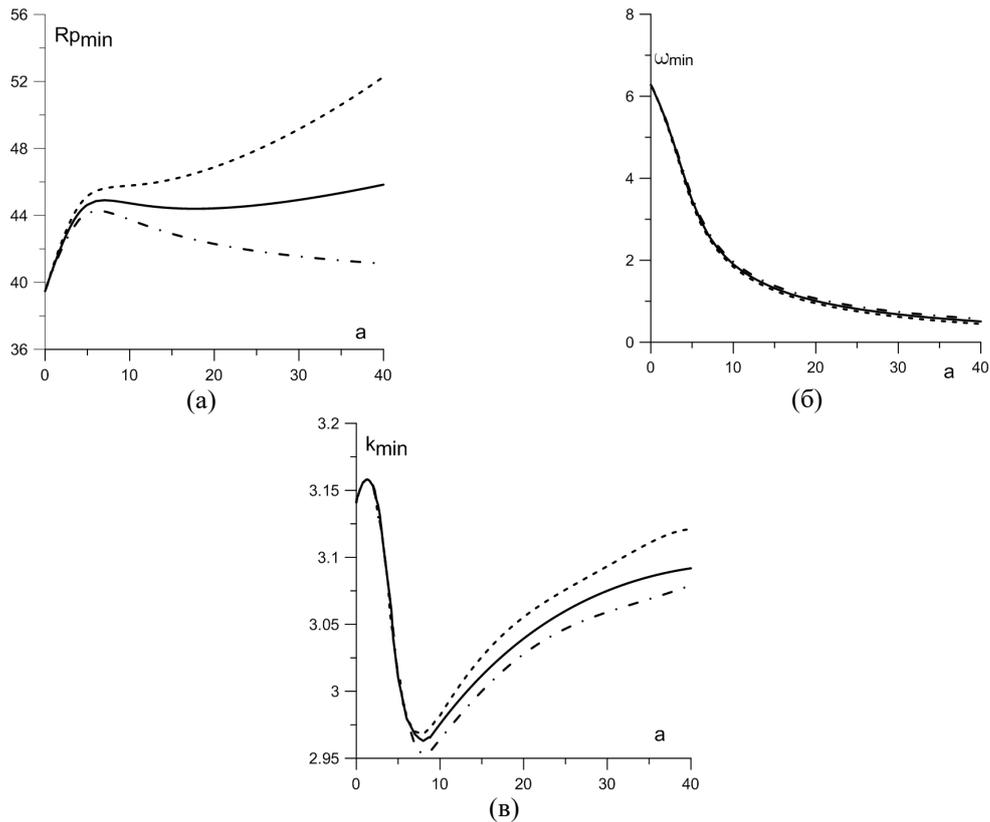


**Рис. 3.** Зависимости критического числа Релея (а), критической частоты (б) и волнового числа (в) от числа Пекле. Для случая отсутствия закупорки – штрих-пунктирная линия, с учетом закупорки сплошная линия ( $C_0 = 0.005$ )  $\phi_0 = 0.4$ ,  $a = b = 4$ .

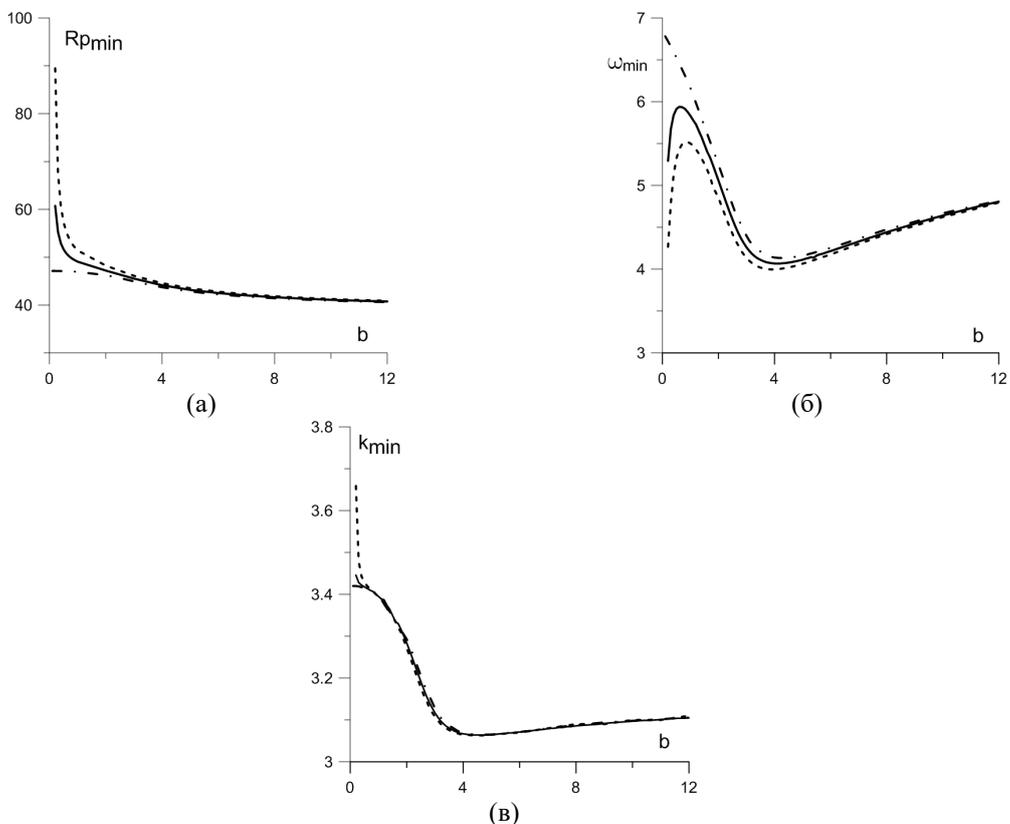
Обратимся к зависимостям минимальных значений числа Релея, частоты нейтральных колебаний и волнового числа от параметров задачи.

Как можно увидеть из рис. 3, интенсивный режим горизонтальной фильтрации более устойчив, так как интенсивный поток делает возмущения

концентрации примеси более однородной. Однородность растворенного вещества также приводит к ускорению перехода примеси между фазами, что, в свою очередь, увеличивает частоту колебаний. Волновое число критических возмущений не является монотонным, но его вариация в зависимости



**Рис. 4.** Зависимости критического числа Рейля (а), критической частоты (б) и волнового числа (в) от параметра адсорбции. Для случая отсутствия закупорки – штрих-пунктирная линия, с учетом закупорки: сплошная ( $C_0 = 0.005$ ) и пунктирная ( $C_0 = 0.01$ ).  $\phi_0 = 0.4$ ,  $b = 4$ ,  $Pe = 2$



**Рис. 5.** Зависимости критического числа Рейля (а), критической частоты (б) и волнового числа (в) от параметра десорбции. Для случая отсутствия закупорки – штрих-пунктирная линия, с учетом закупорки: сплошная ( $C_0 = 0.005$ ) и пунктирная ( $C_0 = 0.01$ ).  $\phi_0 = 0.4$ ,  $a = 4$ ,  $Pe = 2$

от числа  $Re$  не превышает 10%. Это позволяет контролировать распределение примеси, регулируя скорость внешнего потока. Влияние закупорки при этом заметно только на графике Релей–Пекле. То есть учет закупорки незначительно повышает устойчивость системы, но не оказывает влияния на частоту и форму колебаний.

При малых значениях параметра адсорбции, как видно из рис. 4, критическое число Релей–Дарси возрастает почти линейно, как это было получено ранее без учета закупорки [17]. Этот рост можно объяснить переходом примеси из подвижной фазы в неподвижную. Рост достигает максимума при одном и том же значении параметра  $a$ , но при этом максимальное число Релей увеличивается с ростом эффекта закупорки.

При больших же значениях числа адсорбции поведение существенно отличается. Если без учета закупорки, как и ожидается, число Релей уменьшается, то при учете даже слабой закупорки идет возрастание числа Релей. Это связано с тем, что все большее число примеси находится в неподвижной фазе и, следовательно, значительно меняется проницаемость среды, и становится сложнее возбудить конвекцию. Таким образом, увеличение параметра адсорбции приводит к засорению среды, что в свою очередь стабилизирует горизонтальную фильтрацию и замедляет колебательную динамику. При этом учет закупорки практически не влияет на частоту колебаний.

На размер критических конвективных ячеек влияние ещё заметнее. С ростом закупорки, происходит увеличение минимального волнового числа, но оно не достигает максимального значения, полученного, как и в случае отсутствия закупорки и соответствующего состоянию, когда наиболее интенсивный переход между фазами (адсорбция примерно равна десорбции).

Эффекты десорбции обратны эффектам адсорбции (рис. 5). С ростом параметра десорбции устойчивость повышается. Учет закупорки особенно заметен при малых значениях  $b$ . В этом случае он приводит к повышению устойчивости и замедлению колебательной динамики. Видно, что зависимость критической длины волны и частоты колебаний от коэффициента десорбции носит немонотонный характер.

#### 4. Заключение

В ходе работы был исследован транспорт тяжелой примеси через горизонтальный слой пористой среды при наличии осаждения (иммобилизации) частиц и учете закупорки. Закупорка предполагалась слабой в том смысле, что влияние осевших частиц на пористость незначительно и сказывается только в уменьшении проницаемости среды. Из законов сохранения для подвижной примеси и несущей жидкости выведены уравнения, описываю-

щие изучаемые явления. Показано, что настоящая задача допускает режим стационарной горизонтальной фильтрации с известным ранее линейным законом распределения примеси, однако скорость фильтрации вдоль слоя при учете даже слабой закупорки теперь является функцией координаты поперек слоя.

Исследована устойчивость найденного стационарного режима фильтрации по отношению к малым возмущениям. Численно получены нейтральные кривые в широком диапазоне пространства параметров задачи. Показано, что возникающая неустойчивость, как и без учета закупорки, носит колебательный характер. Однако в целом, учет закупорки приводит к повышению устойчивости режима стационарной фильтрации и затуханию колебательной динамики системы. Определены значения параметров числа Пекле (характеризующего интенсивность потока), безразмерных параметров адсорбции и десорбции, для которых учет закупорки не влияет на результаты. Таким образом, определены границы применимости распространенной в литературе линейной МММ модели без учета закупорки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (бюджетная тема No 121031700169-1)

#### Список литературы

1. *Einstein A.* Zur Theorie der Brownschen Bewegung // *Annalen der Physik.* 1906. Vol. 324. N. 2. P. 371–381.
2. *Bromly M., Hinz C.* Non-Fickian transport in homogeneous unsaturated repacked sand // *Water Resources Research.* 2004. Vol. 40, W07402.
3. *Deans H. A.* A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media // *Society of Petroleum Engineers Journal.* 1963. Vol. 3. N. 01. P. 49–52.
4. *Derjaguin B. V., Landau L. D.* Theory of the stability of strongly charged lyophobic sol and of the adhesion of strongly charged particles in solutions of electrolytes // *Acta Phys. Chim. URSS.* 1941. Vol. 14. P. 633–662.
5. *Selim H. M.* Prediction of contaminant retention and transport in soils using kinetic multireaction models // *Environmental Health Perspectives.* 1989. Vol. 83. P. 69–75.
6. *van Genuchten M. T., Wierenga P. J.* Mass transfer studies in sorbing porous media I. Analytical solutions 1 // *Soil Science Society of America Journal.* 1976. Vol. 40. N. 4. P. 473–480.
7. *Maryshev B.* A Non-linear model for solute transport, accounting for sub-diffusive concentration decline and sorption saturation // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena.* 2016. Vol. 11. N. 3. P. 179–190.

8. Carman P. C. Fluid flow through a granular bed // *Trans. Inst. Chem. Eng. London*. 1937. Vol. 15. P. 150-156.
9. Horton C. W., Rogers F. T. Convection currents in a porous medium // *Journal of Applied Physics*. 1945. Vol. 16. N. 6. P. 367-370
10. Lapwood E. R. Convection of a fluid in a porous medium // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1948. Vol. 44. N. 4. P. 508-521.
11. Prats M. The effect of horizontal fluid flow on thermally induced convection currents in porous mediums // *Journal of Geophysical Research*. 1966. Vol. 71. N. 20. P. 4835-4838.
12. Nield D. A., Barletta A. The Horton-Rogers-Lapwood problem revisited: the effect of pressure work // *Transport in Porous Media*. 2009. Vol. 77. P. 143-158.
13. Любимов Д. В., Теплов В. С. Устойчивость модулированного прокачивания жидкости в подогреваемой снизу пористой среде // *Гидродинамика*. 1998. №. 11. С. 176-190.
14. Maryshev B. S. The effect of sorption on linear stability for the solutal Horton-Rogers-Lapwood problem // *Transport in Porous Media*. 2015. Vol. 109. N. 3. P. 747-764.
15. Klimenko L. S., Maryshev B. S. Effect of solute immobilization on the stability problem within the fractional model in the solute analog of the Horton-Rogers-Lapwood problem // *The European Physical Journal E*. 2017. Vol. 40, 104.
16. Nield D. A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. Cham: Springer, 2017. 988 p.
17. Harter R. D., Baker D. E. Applications and misapplications of the Langmuir equation to soil adsorption phenomena // *Soil Science Society of America Journal*. 1977. Vol. 41. N. 6. P. 1077-1080.
18. Гольдшттик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
5. Selim H. M. Prediction of contaminant retention and transport in soils using kinetic multireaction models *Environmental Health Perspectives*, 1989, vol. 83, pp. 69-75.
6. Van Genuchten M. T., Wierenga P. J. Mass transfer studies in sorbing porous media I. Analytical solutions 1 *Soil Science Society of America Journal*, 1976, vol. 40, no. 4, pp. 473-480.
7. Maryshev B. A Non-linear model for solute transport, accounting for sub-diffusive concentration decline and sorption saturation. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2016, vol. 11, no. 3, pp. 179-190.
8. Carman P. C. Fluid flow through a granular bed. *Trans. Inst. Chem. Eng. London*, 1937, vol. 15, pp. 150-156.
9. Horton C. W., Rogers Jr F. T. Convection currents in a porous medium. *Journal of Applied Physics*, 1945, vol. 16, no. 6, pp. 367-370.
10. Lapwood E. R. Convection of a fluid in a porous medium. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1948. Vol. 44. N. 4. P. 508-521.
11. Prats M. The effect of horizontal fluid flow on thermally induced convection currents in porous mediums. *Journal of Geophysical Research*, 1966, vol. 71, no. 20, pp. 4835-4838.
12. Nield D. A., Barletta A. The Horton-Rogers-Lapwood problem revisited: the effect of pressure work. *Transport in Porous Media*, 2009, vol. 77, pp. 143-158.
13. Lyubimov D. V., Teplov V. S. Ustoichivost modulirovannogo prokachivaniya zhidkosti v podogrevaemoi snizu poristoi srede [Stability of modulated pumping of a liquid in a porous medium heated from below]. *Gidrodinamika*, 1998, no. 11, pp. 176-190 (In Russian)
14. Maryshev B. S. The effect of sorption on linear stability for the solutal Horton-Rogers-Lapwood problem. *Transport in Porous Media*, 2015, vol. 109, no. 3, pp. 747-764.
15. Klimenko L. S., Maryshev B. S. Effect of solute immobilization on the stability problem within the fractional model in the solute analog of the Horton-Rogers-Lapwood problem. *The European Physical Journal E*, 2017, vol. 40, 104.
16. Nield D. A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. Cham: Springer, 2017. 988 p.
17. Harter R. D., Baker D. E. Applications and misapplications of the Langmuir equation to soil adsorption phenomena. *Soil Science Society of America Journal*, 1977, vol. 41, no. 6, pp. 1077-1080.
18. Goldshtik M. A., Shtern V. N. *Gidrodinamicheskaya ustoichivost i turbulentnost* [Hydrodynamic stability and turbulence]. Novosibirsk: Nauka, 1977. 366 p. (In Russian)

## References

1. Einstein A. Zur Theorie der Brownschen Bewegung. *Annalen der Physik*, 1906, vol. 324, no. 2, pp. 371-381 (In German).
2. Bromly M., Hinz C. Non-Fickian transport in homogeneous unsaturated repacked sand. *Water Resources Research*, 2004, vol. 40, no. 7.
3. Deans H. A. A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 1963, vol. 3, no. 01, pp. 49-52.
4. Derjaguin B. V., Landau L. D. Theory of the stability of strongly charged lyophobic sol and of the adhesion of strongly charged particles in solutions of electrolytes. *Acta Phys. Chim. URSS*, 1941, vol. 14, pp. 633-662.

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Клименко Л. С., Кольцова И. А. Уточнение модели концентрационной конвекции в пористой среде с учетом иммобилизации примеси и слабой закупорки // Вестник Пермского университета. Физика. 2023. № 4. С. 35–44. doi: 10.17072/1994-3598-2023-4-35-44

**Please cite this article in English as:**

Klimenko L. S., Koltsova I. A. Refinement of the model of concentration convection in a porous medium taking into account immobilization of impurity and weak clogging. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2023, no. 4, pp. 35–44. doi: 10.17072/1994-3598-2023-4-35-44

**Сведения об авторах**

1. *Клименко Людмила Сергеевна*, канд. физ-мат. наук, н.с., Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013; доцент, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614068.
2. *Ирина Андреевна Кольцова*, студент, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614068.

**Author information**

1. *Lyudmila S. Klimenko*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia; Associate Professor, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia.
2. *Irina A. Koltsova*, Student, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia.