

УДК 532.5.013.4; 531.19  
PACS 44.25.+f, 05.40.–a

## Стохастическое параметрическое возбуждение конвекции Рэля-Бенара

Э. В. Пермякова<sup>1,2\*</sup>, Д. С. Голдобин<sup>1,2†</sup>

<sup>1</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

<sup>2</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

\*evelina.v.permyakova@gmail.com

†denis.goldobin@gmail.com

Рассматривается проблема возбуждения тепловой конвекции в горизонтальном слое с изотермическими свободными границами при случайной модуляции силы тяжести. Для системы получены уравнения стохастической динамики амплитуды малых возмущений полей температуры и функции тока. Для этих уравнений выводятся условия роста среднеквадратичных значений, которые используются в качестве критерия возбуждения конвективных движений в системе. Возбуждение течений описано как для случая подогрева снизу, так и для подогрева сверху. Проверено, что найденные моды самого быстрого роста среднеквадратичных значений при всех значениях параметров лежат в области фазового пространства, имеющей физический смысл. В противоположность случаю высокочастотных периодических вибраций белый гауссов шум всегда оказывает дестабилизирующее воздействие на состояние механического равновесия. Случаи белого гауссового шума и гармонических высокочастотных вибраций также сопоставлены в общем виде, без привязки к частному виду уравнений тепловой конвекции.

**Ключевые слова:** параметрическая стохастическая неустойчивость; тепловая конвекция; стохастические вибрации

Поступила в редакцию 24.09.2022; после рецензии 14.10.2022; принята к опубликованию 17.10.2022

## Stochastic parametric excitation of Rayleigh-Bénard convection

E. V. Permyakova<sup>1,2\*</sup>, D. S. Goldobin<sup>1,2†</sup>

<sup>1</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

<sup>2</sup> Perm State University, Perm, Russia

\*evelina.v.permyakova@gmail.com

†denis.goldobin@gmail.com

The paper is devoted to the problem of the thermal convection excitation in a horizontal layer with isothermal free boundaries caused by a random modulation of the gravity acceleration. Equations for the stochastic dynamics of the amplitude of small perturbations of the temperature field and the stream function are derived for the system. For these equations, the conditions for the growth of mean-square values are derived; these conditions are used as a criterion for the excitation of convective motions in the system. The excitation of flows is considered both for the case of heating from below and for heating from above. It is verified that, for any parameter values, the obtained modes of the fastest growth of mean-square values lie within the physically meaningful domain of the phase space. In contrast to the case of high-frequency periodic vibrations, white Gaussian noise always exerts a destabilizing effect on the heat-conducting state of the system. The cases of white

Gaussian noise and harmonic high-frequency vibrations are also compared in a general form, without reference to a particular form of thermal convection equations.

**Keywords:** parametric stochastic instability; thermal convection; stochastic vibrations

Received 24 September 2022; revised 14 October 2022; accepted 17 October 2022

doi: 10.17072/1994-3598-2022-4-34-44

## 1. Введение

Влияние высокочастотных периодических вибраций и модуляции конечной частоты на конвективную устойчивость неизотермических систем довольно хорошо описано в литературе, но до сих пор остается актуальной темой как теоретических, так и экспериментальных исследований. Случай нерегулярных (стохастических) вибраций интересен как в связи с механикой гидродинамических систем в условиях микрогравитации, так и в связи с возможной случайной модуляцией параметров в земных условиях. Однако в литературе широко представлен случай изотермических систем, в которых исследуется стохастическое возбуждение ряби Фарадея и подобные задачи [1, 2] тогда как для термоконвективных систем проблема изучена в значительно меньшей степени [2–3].

В настоящей работе исследуется стохастическое параметрическое возбуждение конвекции Рэлея-Бенара в слое со свободными границами.

## 2. Конвективная неустойчивость при случайной модуляции силы тяжести

В данном разделе мы напоминаем математическую формулировку задачи о конвекции Рэлея-Бенара [2, 5–7], а также вводим в нее случайную модуляцию силы тяжести. Обозначим толщину горизонтального слоя жидкости  $h$ . Линейная устойчивость данной системы может быть исследована в рамках  $(x, z)$ -геометрии, ось  $z$  направлена вертикально вверх: течение предполагается однородным вдоль координаты  $y$ . В приближении Буссинеска плотность жидкости  $\rho$  полагается линейной функцией температуры  $T$ ,  $\rho(T) = \rho_0(1 - \beta T)$ , где  $\beta$  – коэффициент объемного расширения, для слагаемых, описывающих плавучесть, а во всех остальных отношениях сжимаемостью пренебрегаем. В таком случае закон сохранения импульса, массы и уравнение переноса тепла выглядят следующим образом:

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho_0 \nu \Delta \mathbf{v} - \rho_0 \beta T \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \chi \Delta T, \quad (3)$$

где  $\mathbf{v} = \{v^{(x)}, 0, v^{(z)}\}$  – вектор скорости среды,  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$  – оператор Лапласа,  $p$  – давление,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения, которое модулируется со временем,  $\chi$  – теплопроводность.

Для изучения линейной устойчивости состояния равновесия рассмотрим малые  $\mathbf{v}$  и возмущение температуры  $\theta$ ,  $T = -sAz + \theta$ , где  $A$  – абсолютное значение градиента температуры,  $s = -1$  для подогрева сверху и  $s = +1$  для подогрева снизу. После перемасштабирования

$$(x, y) \rightarrow (hx, hz), \quad t \rightarrow (h^2 / \nu)t,$$

$$\theta \rightarrow Ah\theta, \quad p \rightarrow (\rho_0 \nu^2 / h^2)p$$

и линеаризации уравнения (1) и (3) можно переписать в безразмерной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + Ra\theta \mathbf{e}_z, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\text{Pr}} (\Delta \theta + sv^{(z)}), \quad (5)$$

где  $Ra = g\beta Ah^4 / (\nu\chi)$  – число Рэлея,  $\text{Pr} = \nu / \chi$  – число Прандтля и  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор, направленный по  $z$ . Для несжимаемого двумерного течения (2) можно ввести функцию тока:

$$v^{(x)} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v^{(z)} = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Следовательно, разность между частной производной по  $x$   $z$ -компоненты уравнения (4) и частной производной по  $z$   $x$ -компоненты того же уравнения дает:

$$\Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta^2 \psi + Ra \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (6)$$

а уравнение (5) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \theta + \frac{s}{\text{Pr}} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (7)$$

Рассмотрим случай фиксированной температуры на границах [2, 5]:

$$\theta|_{z=0} = \theta|_{z=1} = 0.$$

Для упрощения аналитических вычислений, без потери общности, будем рассматривать случай свободной недеформируемой границы:

$$\psi|_{z=0} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}|_{z=0} = \psi|_{z=1} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}|_{z=1} = 0.$$

С данными граничными условиями уравнения (6)–(7) имеют решения в следующей форме:

$$\psi = \Psi(t) \cos kx \sin \pi z, \quad \theta = \Theta(t) \sin kx \sin \pi z.$$

Временная эволюция “амплитуд”  $\Psi(t)$  и  $\Theta(t)$  определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которые действуют и в случае зависимости гравитационного ускорения от времени  $Ra(t) = Ra_0(1 + \sigma\xi(t))$  [2, 8–10]:

$$\frac{d}{dt} \psi = -\mathcal{D}\psi - \frac{kRa_0}{\mathcal{D}} \theta - \frac{k\sigma Ra_0}{\mathcal{D}} \xi(t) \theta, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} \theta = -\frac{sk}{Pr} \psi - \frac{\mathcal{D}}{Pr} \theta, \quad (9)$$

где  $\mathcal{D} = \pi^2 + k^2$ ,  $\sigma$  – амплитуда шума. Будем рассматривать быстро осциллирующий шум с коротким временем автокорреляции, в естественной математической идеализации для дельта-коррелированного шума можно записать:

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\delta(t - t'),$$

где  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по реализациям шума. Согласно центральной предельной теореме дельта-коррелированный шум должен быть гауссовским (для других альфа-устойчивых шумов интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle$  расходится). Для стохастической системы уравнений (8)–(9) будем предполагать интерпретацию Стратоновича.

### 3. Стохастическое параметрическое возбуждение

Напомним базовый математический аппарат для описания явления стохастического параметрического возбуждения в линейных системах [11, 12]. Запишем систему линейных дифференциальных уравнений в интерпретации Стратоновича:

$$\frac{d}{dt} x_j = \sum_{n=1}^N L_{jn} x_n + \sigma \xi(t) \sum_{n=1}^N G_{jn} x_n, \quad (10)$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

Уравнение Фоккера–Планка для этой системы задает эволюцию плотности вероятности  $w(\mathbf{x}, t)$ , осредненную по реализациям шума:

$$\frac{\partial w(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_n L_{jn} x_n w(\mathbf{x}, t) \right) = \hat{Q}^2 w(\mathbf{x}, t), \quad (11)$$

где  $\hat{Q}f \equiv \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sum_n \sigma G_{jn} x_n f \right]$ . Умножая уравнение (11) на  $x_i$  и интегрируя по всему пространству  $\mathbf{x}$ , получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int \dots \int dx_1 \dots dx_N x_i w + \\ & + \sum_j \int \dots \int dx_1 \dots dx_N x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_n L_{jn} x_n w \right) = \\ & = \sum_j \int \dots \int dx_1 \dots dx_N x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_n \sigma G_{jn} x_n \hat{Q}w \right). \end{aligned} \quad (12)$$

В последующих уравнениях для осреднения по реализациям шума  $\langle x_j \rangle = \int \dots \int dx_1 \dots dx_N x_j w$  с  $w(\mathbf{x}, t)$ , затухающей на бесконечности, будем использовать интегрирование по частям для вычисления

$$\int dx_i dx_l \frac{\partial}{\partial x_j} (\dots) = - \int dx_i \delta_{jl} (\dots).$$

Важно, что для неотрицательной функции координат  $w(\mathbf{x}, t)$  интеграл по поверхности сферы достаточно большого радиуса  $R \oint_R x_l w(\mathbf{x}, t) dS$  имеет тот же порядок величины, что и интеграл от  $w(\mathbf{x}, t)$  по всему пространству, лежащему за пределами этой сферы. Последний интеграл стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ , так как интеграл от  $w(\mathbf{x}, t)$  по всему пространству равен 1.

Используя в уравнении (12) интегрирование по частям один раз для второго слагаемого и дважды для третьего, приходим к выражению

$$\frac{d}{dt} \langle x_j \rangle = \sum_{n=1}^N L_{jn} \langle x_n \rangle + \sigma^2 \sum_n (\mathbf{G}^2)_{jn} \langle x_n \rangle. \quad (13)$$

Матрица  $\mathbf{G}^2$  может существенно изменить собственные значения задачи и создать экспоненциальный рост средних полей систем, где колебания постоянны или затухают в отсутствие шума. Данное явление было впервые изучено для гармонического осциллятора со стохастической модуляцией собственной частоты  $\ddot{x} + [\omega_0^2 + \varepsilon\xi(t)]x = 0$ , где шум «раскачивает» энергию колебаний [11, 12].

В литературе [11, 12] это явление упоминается как «стохастический параметрический резонанс». Однако здесь будем избегать использования слова

“резонанс”, поскольку это предполагает совпадение некоторых фундаментальных временных масштабов, как это наблюдается в случае параметрического резонанса (периодической модуляции) [14–16], стохастического резонанса [17–19] или когерентного резонанса [20]. В рассматриваемом явлении такие совпадения не наблюдаются. Технически данный эффект может быть интерпретирован как дрейф Стратоновича для энергоподобных функционалов.

#### 4. Стохастическое параметрическое возбуждение тепловой конвекции

Приводя систему уравнений (8)–(9) к виду (10), имеем следующие матрицы  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -\mathcal{D} & -\frac{kRa_0}{\mathcal{D}} \\ -\frac{sk}{Pr} & -\frac{\mathcal{D}}{Pr} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{kRa_0}{\mathcal{D}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Из данного вида матрицы  $\mathbf{G}$  можно вычислить, что  $\mathbf{G}^2 = 0$ . Следовательно, на динамику средних значений, заданную уравнением (13), параметрический шум не влияет:

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi \rangle = -\mathcal{D} \langle \Psi \rangle - \frac{kRa_0}{\mathcal{D}} \langle \Theta \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle \Theta \rangle = -\frac{sk}{Pr} \langle \Psi \rangle - \frac{\mathcal{D}}{Pr} \langle \Theta \rangle.$$

Однако это не означает отсутствие влияния шума на конвективную устойчивость. К примеру, если шум вызывает колебания со случайными сдвигами фазы колебаний и эти сдвиги стремятся к равномерному распределению, то сумма всех решений для множества реализаций шума может быть мала из-за симметрии. Такая сумма дает среднее по реализациям шума значение, которое может быть мало для достаточно интенсивных складываемых течений. На рис. 1 проиллюстрировано, как сумма всех решений (штриховая линия) незатухающих стохастических колебаний стремится к нулю.

Далее будем использовать более надежные переменные для описания конвективного движения. Обоснованными являются такие переменные, как  $\langle \Psi^2 \rangle$  и  $\langle \Theta^2 \rangle$ , которые не будут стремиться к нулю из-за симметричного распределения незатухающих конвективных движений. Ранее такой подход был продемонстрирован для описания стохастического параметрического возбуждения гармонического осциллятора [12], оценки свободной энергии в модели Изинга [21] и показателя локализации конвективных структур [22], возбуждаемых при стационарном пространственном параметри-

ческом беспорядке [22, 23]. Из уравнений (8)–(9) можно вывести замкнутую систему уравнений для  $\Psi^2$ ,  $\Psi\Theta$  и  $\Theta^2$  вида (10):

$$\frac{d}{dt} \Psi^2 = -2\mathcal{D}\Psi^2 - \frac{2kRa_0}{\mathcal{D}} \Psi\Theta - \frac{2k\sigma Ra_0}{\mathcal{D}} \xi \Psi\Theta, \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} (\Psi\Theta) = -\frac{sk}{Pr} \Psi^2 - \frac{Pr+1}{Pr} \mathcal{D}\Psi\Theta - \frac{kRa_0}{\mathcal{D}} \Theta^2 - \frac{k\sigma Ra_0}{\mathcal{D}} \xi \Theta^2, \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \Theta^2 = -\frac{2sk}{Pr} \Psi\Theta - \frac{2\mathcal{D}}{Pr} \Theta^2. \quad (17)$$

Данная система соответствует виду (10) с  $x = \{\Psi^2, \Psi\Theta, \Theta^2\}$  и матрицами:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -2\mathcal{D} & -\frac{2kRa_0}{\mathcal{D}} & 0 \\ -\frac{sk}{Pr} & -\frac{Pr+1}{Pr} \mathcal{D} & -\frac{kRa_0}{\mathcal{D}} \\ 0 & -\frac{2sk}{Pr} & -\frac{2\mathcal{D}}{Pr} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2kRa_0}{\mathcal{D}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{kRa_0}{\mathcal{D}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{G}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2k^2 Ra_0^2}{\mathcal{D}^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, используя уравнение (13), можно написать:

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi^2 \rangle = -2\mathcal{D} \langle \Psi^2 \rangle - \frac{2kRa_0}{\mathcal{D}} \langle \Psi\Theta \rangle - \frac{2\sigma^2 k^2 Ra_0^2}{\mathcal{D}^2} \langle \Theta^2 \rangle, \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi\Theta \rangle = -\frac{sk}{Pr} \langle \Psi^2 \rangle - \frac{Pr+1}{Pr} \mathcal{D} \langle \Psi\Theta \rangle - \frac{kRa_0}{\mathcal{D}} \langle \Theta^2 \rangle, \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \Theta^2 \rangle = -\frac{2sk}{Pr} \langle \Psi\Theta \rangle - \frac{2\mathcal{D}}{Pr} \langle \Theta^2 \rangle. \quad (22)$$

Спектр инкрементов  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  собственных

векторов  $\{\langle \Psi^2 \rangle, \langle \Psi\Theta \rangle, \langle \Theta^2 \rangle\} \sim e^{\lambda t}$  системы уравнений (20)–(22) вычисляется из следующей задачи на собственные значения:

$$\begin{pmatrix} -2\mathcal{D} - \lambda & -\frac{2kRa_0}{\mathcal{D}} & \frac{2\sigma^2 k^2 Ra_0^2}{\mathcal{D}^2} \\ -\frac{sk}{Pr} & -\frac{Pr+1}{Pr}\mathcal{D} - \lambda & -\frac{kRa_0}{\mathcal{D}} \\ 0 & -\frac{2sk}{Pr} & -\frac{2\mathcal{D}}{Pr} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \Psi^2 \rangle \\ \langle \Psi\Theta \rangle \\ \langle \Theta^2 \rangle \end{pmatrix} = 0. \quad (23)$$

Характеристическое уравнение для задачи (23) имеет вид:

$$\lambda^3 + 3\mathcal{D}\frac{Pr+1}{Pr}\lambda^2 + \mathcal{D}^2\left(2 + \frac{8}{Pr} + \frac{2}{Pr^2} - \frac{4sk^2 Ra_0^2}{\mathcal{D}^3 Pr}\right)\lambda + \frac{4(Pr+1)}{Pr^2}(\mathcal{D}^3 - sk^2 Ra_0) - \frac{4\sigma^2 k^4 Ra_0^2}{\mathcal{D}^3 Pr^2} = 0. \quad (24)$$

Система уравнений (15)–(17) определена в фазовом пространстве  $\{X, P, Y\}$  ( $X = \Psi^2$ ,  $P = \Psi\Theta$ ,  $Y = \Theta^2$ ), которое является расширением исходного физического пространства переменных  $\Psi$  и  $\Theta$ . Таким образом, не все формальные решения системы (20)–(22) имеют физический смысл. В частности, если рассматривать задачу с начальными условиями, то начальным состоянием, усредненным по реализациям шума, является просто начальное состояние системы. То есть начальные условия должны удовлетворять соотношению

$$\left(\langle \Psi\Theta \rangle\right)_{t=0}^2 = \left(\langle \Psi^2 \rangle\right)_{t=0} \left(\langle \Theta^2 \rangle\right)_{t=0}.$$

В процессе эволюции средние значения могут отклоняться от данного соотношения, но решение все равно должно удовлетворять некоторым условиям. А именно:

$$\langle \Psi^2 \rangle \geq 0, \quad \langle \Theta^2 \rangle \geq 0. \quad (25)$$

Кроме того, имеем ограничение на  $\langle \Psi\Theta \rangle$ . Так как  $(\alpha\Psi + \Theta)^2 \geq 0$  для всех действительных  $\alpha$ , то, осредняя это выражение, получаем

$$\alpha^2 \langle \Psi^2 \rangle + 2\alpha \langle \Psi\Theta \rangle + \langle \Theta^2 \rangle \geq 0.$$

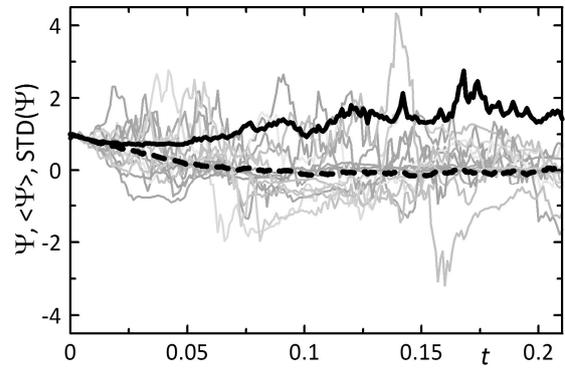
Последнее неравенство справедливо для всех действительных значений  $\alpha$ , если соответствующее квадратное уравнение для  $\alpha$  не имеет вещественных корней или пару совпадающих, т.е.:

$$\langle \Psi\Theta \rangle^2 \leq \langle \Psi^2 \rangle \langle \Theta^2 \rangle. \quad (26)$$

В частности, условие (25) означает, что физически осмысленное решение системы (20)–(22) с наибольшей скоростью роста не может быть колебательным. Наблюдаемая физическая неустойчивость квадратов полей должна быть строго монотонной.

Кубическое уравнение (24) может быть записано в форме  $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$ ; следовательно, слагаемое при нулевой степени  $\lambda$  полинома (24) равно  $-\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ :

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{4\sigma^2 k^4 Ra_0^2}{\mathcal{D}^3 Pr^2} - \frac{4(Pr+1)}{Pr^2}(\mathcal{D}^3 - sk^2 Ra_0).$$



**Рис. 1.** Динамика системы выше порога стохастического возбуждения представлена зависимостями  $\Psi(t)$  (серые кривые) для 14 реализаций шума. Осреднение  $\langle \Psi(t) \rangle$  (штриховая кривая) и  $STD \equiv \sqrt{\langle \Psi^2(t) \rangle}$  (жирная кривая) производится по 250 реализациям шума. Параметры:  $s = -1$ ,  $k = \pi$ ,  $Pr = 1$ ,  $Ra_0 = \mathcal{D}^3 / k^3 = 8\pi^4$ ,  $\sigma^2 = 2\sigma_*^2 = 8 / \mathcal{D}$

Там, где ведущее значение  $\lambda_1$  является действительным и переходит из отрицательных значений в положительные, значения  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  отрицательны или  $\lambda_2 = \lambda_3^*$  – в любом случае,  $\lambda_2\lambda_3 > 0$ . Следовательно, условие существования монотонно растущей моды:

$$\sigma^2 > \sigma_*^2(k) = \frac{(Pr+1)\mathcal{D}^2}{k^2 Ra_0^2} \left( \frac{\mathcal{D}^3}{k^2} - sRa_0 \right). \quad (27)$$

Можно видеть, что достаточно интенсивные стохастические вибрации ведут к росту возмущений не только при подогреве снизу ( $s = 1$ ), но и при подогреве сверху ( $s = -1$ ).

Физически осмысленная мода должна подчиняться условиям (25) и (26). Из (23) для  $\lambda = 0$

можем получить соотношение

$$\langle \Psi^2 \rangle = \left( \frac{\sigma_*^2 R a_0^2 \text{Pr}}{\text{Pr}+1} \frac{k^2}{\mathcal{D}^3} + \frac{\mathcal{D}^2}{k^2} \right) \langle \Theta^2 \rangle,$$

которое всегда согласуется с условием (25), и соотношение

$$sk \langle \Psi \Theta \rangle = -\mathcal{D} \langle \Theta^2 \rangle,$$

которое дает:

$$\langle \Psi \Theta \rangle^2 = \frac{\langle \Psi^2 \rangle \langle \Theta^2 \rangle}{1 + \frac{\sigma_*^2 R a_0^2 \text{Pr}}{\text{Pr}+1} \frac{k^4}{\mathcal{D}^5}}.$$

Последнее также всегда удовлетворяет условию (26). Таким образом, растущее решение, возникающее при критическом значении  $\sigma_*$ , всегда имеет физический смысл.

На рис. 1 можно наблюдать затухание  $\langle \Psi \rangle(t)$ , получающееся осреднением по незатухающим стохастическим траекториям. Вместе с тем видно, что переменная  $\langle \Psi^2 \rangle(t)$  хорошо подходит для иллюстрации затухания/возрастания интенсивности стохастических колебаний.

#### 4.1. Задача с начальными условиями и ведущее собственное решение

Проверим, должна/может ли траектория системы, осредненная по реализациям шума и имеющая начальное состояние  $\{\Psi_0, \Theta_0\}$ , содержать ведущее формальное собственное решение задачи (23) хотя бы на пороге неустойчивости. Для  $\lambda = 0$  решением эрмитово-сопряженной задачи (23) является

$$\{X^+, P^+, Y^+\} = \left\{ \frac{k}{\text{Pr}}, -2s\mathcal{D}, \frac{\text{Pr} \mathcal{D}^2}{k} + \frac{\sigma_*^2 k^3 R a_0^2}{\mathcal{D}^3 (\text{Pr}+1)} \right\}.$$

Для начального состояния системы  $\{\Psi_0, \Theta_0\}$  начальным состоянием задачи (15)–(17) является  $\{\Psi_0^2, \Psi_0 \Theta_0, \Theta_0^2\}$ . Разложение данного начального состояния по базису собственных векторов задачи (23) не содержит в себе ведущий собственный вектор, если  $\{X^+, P^+, Y^+\} \cdot \{\Psi_0^2, \Psi_0 \Theta_0, \Theta_0^2\} = 0$ . Последнее уравнение

$$\begin{aligned} \{X^+, P^+, Y^+\} \cdot \{\Psi_0^2, \Psi_0 \Theta_0, \Theta_0^2\} = \\ = \left\{ \frac{k}{\text{Pr}}, -2s\mathcal{D}, \frac{\text{Pr} \mathcal{D}^2}{k} + \frac{\sigma_*^2 k^3 R a_0^2}{\mathcal{D}^3 (\text{Pr}+1)} \right\} \cdot \{\Psi_0^2, \Psi_0 \Theta_0, \Theta_0^2\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{k}{\text{Pr}} \Psi_0^2 - 2s\mathcal{D} \Psi_0 \Theta_0 + \frac{\text{Pr} \mathcal{D}^2}{k} \Theta_0^2 + \frac{\sigma_*^2 k^3 R a_0^2}{\mathcal{D}^3 (\text{Pr}+1)} \Theta_0^2$$

может быть переписано следующим образом:

$$\left( \sqrt{\frac{k}{\text{Pr}}} \Psi_0 - s\mathcal{D} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{k}} \Theta_0 \right)^2 + \frac{\sigma_*^2 R a_0^2 k^3}{\mathcal{D}^3 (\text{Pr}+1)} \Theta_0^2 = 0.$$

Очевидно, это уравнение допускает только тривиальное решение  $\Psi_0 = \Theta_0 = 0$ . Таким образом, все начальные состояния системы содержат ненулевую компоненту ведущей формальной моды, и рост этой моды определяет рост траекторий физической системы с шумом.

Минимизируя  $\sigma_*$  по  $k$ , можно найти критическое значение  $k_{cr}$ , соответствующее самым опасным конвективным структурам, и пороговую амплитуду шума  $\sigma_{cr}$  как функцию  $R a_0$ . Ниже порога конвективной неустойчивости системы без модуляции ( $s R a_0 < R a_{cr} = 27\pi^4 / 4$ ) зависимость  $\sigma_*(k)$  имеет единственный локальный экстремум. Зависимость предельной амплитуды шума от  $s R a_0$  может быть представлена в параметрической форме:

$$\sigma_{cr}^2 = \frac{(\text{Pr}+1)(2k_{cr}^2 - \pi^2)(\pi^2 - k_{cr}^2)}{(k_{cr}^2 + \pi^2)(2\pi^2 - 3k_{cr}^2)^2}, \quad (28)$$

$$s R a_0 = \frac{(k_{cr}^2 + \pi^2)^3 (2\pi^2 - 3k_{cr}^2)}{k_{cr}^2 (\pi^2 - k_{cr}^2)}, \quad (29)$$

где  $\pi / \sqrt{2} \leq k_{cr} < \pi$ . С помощью этих уравнений можно найти асимптотические выражения, справедливые при  $s R a_0 \rightarrow -\infty$  (или  $\pi - k_{cr} \ll 1$ ):

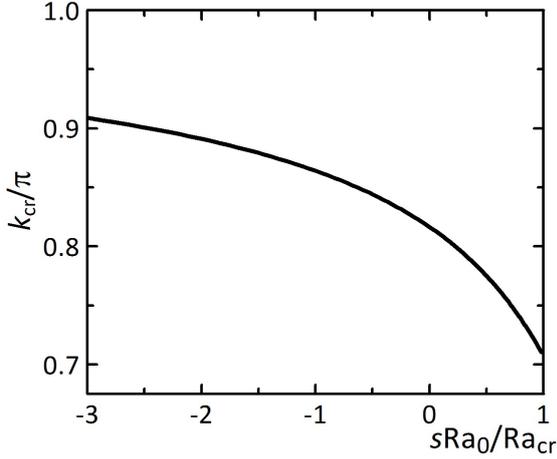
$$\frac{\sigma_{cr}^2}{\text{Pr}+1} \approx \frac{27\pi^6}{R a_0^2} \left( \frac{32}{27} - \frac{s R a_0}{R a_{cr}} \right), \quad (30)$$

$$k_{cr}^2 \approx \pi^2 \left( 1 - \frac{1}{7/2 - s R a_0 / R a_{cr}} \right).$$

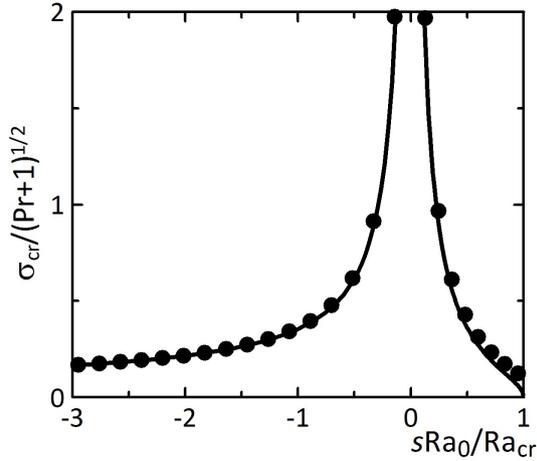
Критические значения (28)–(29) и асимптотическая зависимость (30) проиллюстрированы на рис. 2. Можно видеть, что неустойчивость возможна как при подогреве снизу ( $s = 1$ ), так и при подогреве сверху ( $s = -1$ ). Причем при подогреве сверху более сильный подогрев позволяет достичь неустойчивости при меньшей безразмерной интенсивности случайных вибраций.

## 5. Сравнение с высокочастотной периодической модуляцией

Рассмотрим случай высокочастотной модуляции параметров, где  $\xi(t) = \sigma\Omega \cos \Omega t$  в системе уравнений (10),  $\Omega \gg |L_{jk}|$  [8–10].



(a)



(б)

**Рис. 2.** Волновое число самой опасной моды  $k_{cr}$  (а) и порог стохастического параметрического возбуждения  $\sigma_{cr}$  (б). Асимптотическая зависимость (30) для  $sRa_0 \rightarrow -\infty$  представлена кругами

### 5.1. Уравнения осредненной динамики для высокочастотной периодической модуляции

Используя метод многих масштабов и полагая формальный малый параметр  $\varepsilon = \Omega^{-1}$ , можем написать:

$$\frac{d}{dt} = \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial t_{-1}} + \frac{\partial}{\partial t_0} + \dots, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{x}^{(1)} + \dots,$$

$$\begin{aligned} & \left( \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial t_{-1}} + \frac{\partial}{\partial t_0} + \dots \right) (\mathbf{x}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{x}^{(1)} + \dots) = \\ & = L \cdot (\mathbf{x}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{x}^{(1)} + \dots) + \\ & \quad + \varepsilon^{-1} \sigma_0 \cos t_{-1} \mathbf{G} \cdot (\mathbf{x}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{x}^{(1)} + \dots). \end{aligned} \quad (31)$$

В порядке  $\varepsilon^{-1}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{x}^{(0)}}{\partial t_{-1}} = \sigma_0 \cos t_{-1} \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}^{(0)}. \quad (32)$$

Следовательно,

$$\mathbf{x}^{(0)} = e^{q\mathbf{G}} \cdot \mathbf{y}(t_0, t_1, \dots), \quad q = \sigma_0 \sin t_{-1},$$

где  $\exp \mathbf{A} \equiv \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 / 2! + \mathbf{A}^3 / 3! + \dots$ ,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица,  $\mathbf{y}(t_0, t_1, \dots)$  – произвольный вектор, который является постоянным для быстрого времени  $t_{-1}$ .

Эрмитово сопряженная задача для (32) следует из

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{z} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t_{-1}} \mathbf{x}^{(0)} - \sigma_0 \cos t_{-1} \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}^{(0)} \right) dt_{-1} = 0,$$

что может быть переписано как

$$\int_0^{2\pi} \left( -\frac{\partial}{\partial t_{-1}} \mathbf{z} - \sigma_0 \cos t_{-1} \mathbf{z} \cdot \mathbf{G} \right) \cdot \mathbf{x}^{(0)} dt_{-1} = 0$$

и имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial t_{-1}} \mathbf{z} - \sigma_0 \cos t_{-1} \mathbf{z} \cdot \mathbf{G} = 0.$$

Общее решение эрмитово сопряженной задачи:

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 \cdot e^{-q\mathbf{G}}, \quad (33)$$

где  $\mathbf{z}_0$  – произвольный постоянный (во времени  $t_{-1}$ ) вектор.

В порядке  $\varepsilon^0$ :

$$\frac{\partial \mathbf{x}^{(1)}}{\partial t_{-1}} + \frac{\partial \mathbf{x}^{(0)}}{\partial t_0} = L \cdot \mathbf{x}^{(0)} + \sigma_0 \cos t_{-1} \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}^{(1)}.$$

Умножая последнее уравнение на (33) и осредняя по  $t_{-1}$ , находим:

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \overline{\mathbf{z}_0 \cdot e^{-q\mathbf{G}} \cdot \mathbf{x}^{(0)}} = \overline{\mathbf{z}_0 \cdot e^{-q\mathbf{G}} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}^{(0)}},$$

где  $\overline{(\dots)}$  обозначает осреднение по времени  $t_{-1}$ .

Исключая произвольный вектор  $\mathbf{z}_0$  и подставляя  $\mathbf{x}^{(0)}$ , получаем

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \mathbf{y} = \overline{e^{-q\mathbf{G}} \cdot \mathbf{L} \cdot e^{q\mathbf{G}}} \cdot \mathbf{y}. \quad (34)$$

Для многих конкретных задач матрица  $\mathbf{G}$  является разряженной и имеет только нулевые собственные значения. Со всеми собственными значениями, равными нулю, матрица  $\mathbf{G}^n = 0$  для достаточно больших  $n$  (например, в (14)  $\mathbf{G}^2 = 0$ , в (19)  $\mathbf{G}^3 = 0$ ); поэтому  $\exp(q\mathbf{G})$  содержит в себе конечное число слагаемых. Для случая  $\mathbf{G}^3 = 0$ , пренебрегая  $\sigma^4$ -слагаемыми, или для случая  $\mathbf{G}^3 \neq 0$ , пренебрегая  $\sigma^3$ -слагаемыми, можно вычислить среднее  $\overline{e^{-q\mathbf{G}} \cdot \mathbf{L} \cdot e^{q\mathbf{G}}}$  в (34) и найти

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \left[ \mathbf{L} - \frac{\sigma^2}{2} \left( \mathbf{G} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{G} - \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{G}^2 + \mathbf{G}^2 \cdot \mathbf{L}}{2} \right) \right] \cdot \mathbf{y}. \quad (35)$$

Наблюдаемое в экспериментах решение  $\mathbf{x}(t)$  сглажено по быстрым колебаниям

$$\overline{\mathbf{x}(t)} = \overline{e^{q\mathbf{G}}} \cdot \mathbf{y} = \left( \mathbf{I} + \frac{\sigma^2}{4} \mathbf{G}^2 + O(\sigma^4) \right) \cdot \mathbf{y}(t). \quad (36)$$

Отметим разницу между уравнением (13) для случая стохастической модуляции и уравнениями (34) (или (35)) и (36) для случая высокочастотной периодической модуляции.

### 5.2. Конвекция при вертикальных периодических колебаниях

Для задачи (8)–(9) с матрицами (14) можно получить:

$$\mathbf{L} - \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{G} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -\mathcal{D} & -\frac{kRa_0}{\mathcal{D}} + \frac{sk^3\sigma^2 Ra_0^2}{2\mathcal{D}^2 Pr} \\ -\frac{sk}{Pr} & -\frac{\mathcal{D}}{Pr} \end{pmatrix}$$

и  $\overline{\mathbf{x}(t)} = \overline{e^{q\mathbf{G}}} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}$ . Характеристическое уравнение инкремента  $\lambda$  имеет вид

$$\lambda^2 + \mathcal{D} \frac{Pr+1}{Pr} \lambda + \frac{\mathcal{D}^2}{Pr} + \frac{k^4 \sigma^2 Ra_0^2}{2\mathcal{D}^2 Pr^2} - \frac{sk^2 Ra_0}{\mathcal{D} Pr} = 0.$$

Следовательно, критическое число Рэлея для возмущений с волновым числом  $k$  повышается при периодических вибрациях

$$sRa_{cr} = sRa_{cr,\sigma=0} + \frac{\sigma^2 k^2 Ra_{cr}^2}{2\mathcal{D} Pr}.$$

Периодические вибрации оказывают исключительно стабилизирующее воздействие на тепловую

конвекцию в этой системе [8–10]. В частности, в противоположность случаю стохастических вибраций, система всегда устойчива при подогреве сверху ( $s = -1$ ) [8].

### 6. Заключение

Отличие случая стохастической модуляции от случая высокочастотной периодической модуляции является более фундаментальным, чем просто различие между уравнениями (13) и (34). Для периодической модуляции точное решение следует осредненному, оставаясь в его окрестности; как следствие, затухание осредненных решений определяет затухание всех точных решений. Напротив, для стохастической модуляции затухание решения, осредненного по шумовым реализациям, не определяет затухание конвекции в системе; флуктуирующие решения могут расти, как на рис. 1.

Рассматривая явление стохастического параметрического возбуждения конвективных течений в гидродинамических системах, следует четко отличать данную задачу от задач с «силовым» воздействием флуктуаций, как в случае тепловых флуктуаций в жидкости. Математически, можно вспомнить синхронизацию общим шумом [24–26], где общий шум индуцирует взаимную согласованность между мгновенными состояниями осцилляторов, управляемых общим шумом, тогда как собственный (тепловой) шум противодействует такой согласованности [27]. Таким же образом, в случае локализации Андерсона [28, 29], статичный параметрический беспорядок приводит к пространственной локализации волн, тогда как нестационарные во времени возмущения параметров уничтожают локализацию.

Случай почти консервативных систем с малой диссипацией из-за вязкости и без подвода энергии заслуживает особого внимания. Действие высокочастотных периодических вибраций может быть представлено полем осредненных консервативных массовых сил [10]. Такие силы, подобно консервативной силе тяжести, могут накачивать систему механической энергией посредством взаимодействия с дефектами плотности, которые одновременно вводятся в систему и удаляются из нее (например, возмущения температуры, создаваемые перемешивающими течениями на фоне потока тепла через систему). Без активной манипуляции плотностью высокочастотные вибрации не могут быть источником механической энергии осредненного движения. Следовательно, высокочастотные периодические вибрации в почти консервативной гидродинамической системе (например, однокомпонентной изотермической жидкости) с медленной вязкостной диссипацией не могут возбуждать рост течений. Напротив, случайная параметрическая модуляция разрушает симметрию по отношению к сдвигам времени (как непрерывным, так и дис-

кретным), тем самым ликвидируя закон сохранения энергии (см. теорему Нёттер). Как результат, случайная модуляция может возбуждать макроскопическое движение в тех системах, где влияние высокочастотных периодических вибраций было бы чисто консервативным.

Резюмируя, стохастическая модуляция параметров способна индуцировать возбуждение макроскопических конвективных течений в тех гидродинамических системах, в которых высокочастотная периодическая модуляция аналогичной интенсивности способна только подавлять конвективную неустойчивость. Классическая задача Рэлея со свободными границами, допускающая аналитическое решение, является удобным примером для иллюстрации. В этом примере стохастические вибрации не влияют на пространственную структуру возбуждаемой моды (как и в работах [3, 4]), однако мы ожидаем, что представленный анализ дает универсальное понимание природы явления.

Работы выполнены в рамках бюджетной темы № 121112200078-7.

### Список литературы

1. *Ibrahim R. A.* Recent advances in physics of fluid parametric sloshing and related problems // *Journal of Fluids Engineering*. 2015. Vol. 137. N. 9. 090801. DOI: 10.1115/1.4029544
2. *Cross M. C., Hohenberg P. C.* Pattern formation outside of equilibrium // *Reviews of Modern Physics*. 1993. Vol. 65. N. 3. P. 851–1112. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.851
3. *Dandapat B. S., Gupta A. S.* Thermal instability in a porous medium with random vibrations // *Acta Mechanica*. 1982. Vol. 43. P. 37–47. DOI: 10.1007/BF01175814
4. *Dandapat B. S.* Onset of buoyancy and surface-tension driven instabilities in presence of random vibrations // *Zeitschrift für Naturforschung A*. 1990. Vol. 45. P. 1235–1240. DOI: 10.1515/zna-1990-11-1203
5. *Lord Rayleigh O.M.F.R.S.* On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side // *Philosophical Magazine: Series 6*. 1916. Vol. 32. N. 192. P. 529–546. DOI: 10.1080/14786441608635602
6. *Bénard H.* Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide // *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*. 1900. Vol. 11. P. 1261–1271.
7. *Bénard H.* Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide // *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*. 1900. Vol. 11. P. 1309–1328.
8. *Зеньковская С. М., Симоненко И. Б.* О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1966. № 5. С. 51–55.
9. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Юрков Ю. С.* О конвективной устойчивости при наличии периодически меняющегося параметра // *Прикладная математика и механика*. 1970. Т. 34. № 3. С. 470–483.
10. *Gershuni G. Z., Lyubimov D. V.* *Thermal Vibrational Convection*. Chichester: John Wiley & Sons, 1998, 376 p.
11. *Klyatskin V. I.* *Stochastic parametric resonance // Fundamentals of Stochastic Nature Sciences. Understanding Complex Systems*. Cham: Springer, 2017, pp. 55–57. DOI: 10.1007/978-3-319-56922-2\_6
12. *Кляцкин В. И.* Статистическое описание систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975. 240 с.
13. *Gardiner C. W.* *Handbook of Stochastic Methods*. 2nd ed. Berlin: Springer, 1997. 442 p.
14. *Faraday M.* On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by a group of particles upon vibrating elastic surfaces // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1831. Vol. 121. P. 299–318.
15. *Lord Rayleigh Sec. R. S.* On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with periodic structure // *Philosophical Magazine, Series 5*. 1887. Vol. 24. P. 145–159. DOI: 10.1080/14786448708628074
16. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* *Механика*. 5-е изд., стереотип. М.: Физматлит, 2012. 224 с.
17. *Benzi R., Suter A., Vulpiani A.* The mechanism of stochastic resonance // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1981. Vol. 14. N. 11. P. L453–L457. DOI: 10.1088/0305-4470/14/11/006
18. *Gang H., Ditzinger T., Ning C. Z., Haken H.* Stochastic resonance without external periodic force // *Physical Review Letters*. 1993. Vol. 71. N. 6. P. 807–810. DOI: 10.1103/PhysRevLett.71.807
19. *Gammaitoni L., Häanggi P., Jung P., Marchesoni F.* Stochastic resonance // *Reviews of Modern Physics*. 1998. Vol. 70. N. 1. P. 223–287. DOI: 10.1103/RevModPhys.70.223
20. *Pikovsky A. S., Kurths J.* Coherence resonance in a noise-driven excitable system // *Physical Review Letters*. 1997. Vol. 78. N. 5. P. 775–778. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.775
21. *Zillmer R., Pikovsky A.* Continuous approach for the random-field Ising chain // *Physical Review E*. 2005. Vol. 72. N. 5. 056108. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.056108
22. *Goldobin D. S., Shklyueva E. V.* Localization and advective spreading of convective flows under parametric disorder // *Journal of Statistical Me-*

- chanics: Theory and Experiment. 2013. P09027. DOI: 10.1088/1742-5468/2013/09/P09027
23. Goldobin D. S. Two scenarios of advective washing-out of localized convective patterns under frozen parametric disorder // *Physica Scripta*. 2019. Vol. 94. 014011. DOI: 10.1088/1402-4896/aaeefa
  24. Пиковский А. С. Синхронизация и стохастизация ансамбля автогенераторов внешним шумом // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1984. Т. 27. № 5. С. 576–581.
  25. Teramae J. N., Tanaka D. Robustness of the noise-induced phase synchronization in a general class of limit cycle oscillators // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93. N. 20. 204103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.204103
  26. Голдобин Д. С., Пиковский А. С. О синхронизации периодических автоколебаний общим шумом // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2004. Т. 47. № 10–11. С. 1013–1019.
  27. Goldobin D. S., Pikovsky A. Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise // *Physical Review E*. 2005. Vol. 71. N. 4. 045201(R). DOI: doi:10.1103/PhysRevE.71.045201
  28. Anderson P. W. Absence of diffusion in certain random lattices // *Physical Review*. 1958. Vol. 109. N. 3. P. 1492–1505. DOI: 10.1103/PhysRev.109.1492
  29. Maynard J. D. Colloquium: acoustical analogs of condensed-matter problems // *Reviews of Modern Physics*. 2001. Vol. 73. N. 2. P. 401–417. DOI: 10.1103/RevModPhys.73.401
- ### References
1. Ibrahim R. A. Recent advances in physics of fluid parametric sloshing and related problems. *Journal of Fluids Engineering*, 2015, vol. 137, no. 9, 090801. DOI: 10.1115/1.4029544
  2. Cross M. C., Hohenberg P. C. Pattern formation outside of equilibrium. *Reviews of Modern Physics*, 1993, vol. 65, no. 3, pp. 851–1112. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.851
  3. Dandapat B. S., Gupta A. S. Thermal instability in a porous medium with random vibrations. *Acta Mechanica*, 1982, vol. 43, pp. 37–47. DOI: 10.1007/BF01175814
  4. Dandapat B. S. Onset of buoyancy and surface-tension driven instabilities in presence of random vibrations. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 1990, vol. 45, pp. 1235–1240. DOI: 10.1515/zna-1990-11-1203
  5. Lord Rayleigh O.M. F.R.S. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *Philosophical Magazine: Series 6*, 1916, vol. 32, no. 192, pp. 529–546. DOI: 10.1080/14786441608635602
  6. Bénard H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide [Cellular vortices in a sheet of liquid]. *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, 1900, vol. 11, pp. 1261–1271 (In French).
  7. Bénard H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide [Cellular vortices in a sheet of liquid]. *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, 1900, vol. 11, pp. 1309–1328 (In French).
  8. Zen'kovskaya S. M., Simonenko I. B. Effect of high frequency vibration on convection initiation. *Fluid Dynamics*, 1966, vol. 1, no. 5, pp. 35–37. DOI: 10.1007/BF01022147
  9. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M., Iurkov Iu. S. On convective stability in the presence of periodically varying parameter. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1970, vol. 34, no. 3, pp. 442–452. DOI: 10.1016/0021-8928(70)90090-0
  10. Gershuni G. Z., Lyubimov D. V. *Thermal Vibrational Convection*. Chichester: John Wiley & Sons, 1998. 376 p.
  11. Klyatskin V. I. Stochastic parametric resonance. *Fundamentals of Stochastic Nature Sciences. Understanding Complex Systems*. Cham: Springer, 2017, pp. 55–57. DOI: 10.1007/978-3-319-56922-2\_6
  12. Klyatskin V. I. *Statisticheskoe opisaniye sistem s fluktuiruiushchimi parametrami* [Statistical Description of Dynamic Systems with Fluctuating Parameters]. Moscow: Nauka Publ., 1975, 240 p. (In Russian).
  13. Gardiner C. W. *Handbook of Stochastic Methods*. 2nd ed. Berlin: Springer, 1997. 442 p.
  14. Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by a group of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1831, vol. 121, pp. 299–318.
  15. Lord Rayleigh Sec. R. S. On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with periodic structure. *Philosophical Magazine: Series 5*, 1887, vol. 24, pp. 145–159. DOI: 10.1080/14786448708628074
  16. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Mechanics: Volume 1 (Course of Theoretical Physics)*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1976. 200 p.
  17. Benzi R., Sutera A., Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1981, vol. 14, no. 11, pp. L453–L457. DOI: 10.1088/0305-4470/14/11/006
  18. Gang H., Ditzinger T., Ning C. Z., Haken H. Stochastic resonance without external periodic force. *Physical Review Letters*, 1993, vol. 71, no. 6, pp. 807–810. DOI: 10.1103/PhysRevLett.71.807
  19. Gammaitoni L., Häanggi P., Jung P., Marchesoni F. Stochastic resonance. *Reviews of Modern Physics*, 1998, vol. 70, no. 1, pp. 223–287. DOI: 10.1103/RevModPhys.70.223

20. Pikovsky A. S., Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system. *Physical Review Letters*, 1997, vol. 78, no. 5, pp. 775–778. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.775
21. Zillmer R., Pikovsky A. Continuous approach for the random-field Ising chain. *Physical Review E*, 2005, vol. 72, no. 5, 056108. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.056108
22. Goldobin D. S., Shklyava E. V. Localization and advective spreading of convective flows under parametric disorder. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2013, P09027. DOI: 10.1088/1742-5468/2013/09/P09027
23. Goldobin D. S. Two scenarios of advective washing-out of localized convective patterns under frozen parametric disorder. *Physica Scripta*, 2019, vol. 94, 014011. DOI: 10.1088/1402-4896/aaefaf
24. Pikovsky A. S. Synchronization and stochasticization of the ensemble of autogenerators by external noise. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 1984, vol. 27, no. 5, pp. 390–395. DOI: 10.1007/BF01044784
25. Teramae J. N., Tanaka D. Robustness of the noise-induced phase synchronization in a general class of limit cycle oscillators. *Physical Review Letters*, 2004, vol. 93, no. 20, 204103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.204103
26. Goldobin D. S., Pikovsky A. S. Synchronization of periodic self-oscillations by common noise. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2004, vol. 47, no. 10–11, pp. 910–915. DOI: 10.1007/s11141-005-0031-8
27. Goldobin D. S., Pikovsky A. Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise. *Physical Review E*, 2005, vol. 71, no. 4, 045201(R). DOI: doi:10.1103/PhysRevE.71.045201
28. Anderson P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical Review*, 1958, vol. 109, no. 3, pp. 1492–1505. DOI: 10.1103/PhysRev.109.1492
29. Maynard J. D. Colloquium: acoustical analogs of condensed-matter problems. *Reviews of Modern Physics*, 2001, vol. 73, no. 2, pp. 401–417. DOI: 10.1103/RevModPhys.73.401

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Пермякова Э. В., Голдобин Д. С. Стохастическое параметрическое возбуждение конвекции Рэлея-Бенара // Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 4. С. 34–44. doi: 10.17072/1994-3598-2022-4-34-44

**Please cite this article in English as:**

Permyakova E. V., Goldobin D. S. Stochastic parametric excitation of Rayleigh-Bénard convection. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2022, no. 4, pp. 34–44. doi: 10.17072/1994-3598-2022-4-34-44

**Сведения об авторах**

1. *Эвелина Владимировна Пермякова*, инженер-исследователь, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013; магистрант кафедры теоретической физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614990.
2. *Денис Сергеевич Голдобин*, канд. физ-мат. наук, зав.лаб., Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013; доцент кафедры теоретической физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614990.

**Author information**

1. *Evelina V. Permyakova*, Research Engineer, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia; Master's Student, Department of Theoretical Physics, Perm State University; 15 Bukireva st., Perm, 614990, Russia.
2. *Denis S. Goldobin*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia; Associate Professor, Department of Theoretical Physics, Perm State University; 15 Bukireva st., Perm, 614990, Russia.