2022

• ФИЗИКА •

Вып. 4

УДК 532.5; 62-97 PACS 47.27.te; 61.25.Mv

Численное моделирование конвекции жидкого магния в аппарате восстановления титана с учетом эффективных граничных условий

Т. О. Карасев^{1,2*}, **А. В. Перминов**²

¹ Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

² Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь

* karasev.t@icmm.ru

Численно исследуется задача сопряженного теплового обмена между жидким магнием, стальной ретортой и зоной воздушного охлаждения печи реактора восстановления губчатого титана на начальных этапах производства. Неравномерность распределения тепловых потоков на боковой поверхности реторты существенно влияет на формирование конвективного турбулентного течения внутри аппарата. Правильный учет тепловых граничных условий позволит адекватно решать задачи тепломассопереноса в реакторе, не используя модельные представления о тепловых потоках на границах реторты. Задача решалась в осесимметричной нестационарной постановке с использованием k-ω SST модели турбулентности. В численном моделировании реализовано две концептуальные постановки решения задачи. Первая предполагает сквозной расчет в рамках сопряженной задачи тепло- и массопереноса, где вычисления выполняются во всех частях аппарата восстановления титана, а тепловые граничные условия ставятся на его внешних границах. Вторая модель подразумевает применение эффективного теплового граничного условия, которое прикладывается к внешней границе реторты, и при исследовании конвекции магния исключает расчеты в канале охлаждения. Первая модель в силу большей полноты является более точной, однако требует значительных вычислительных ресурсов и времени. Было показано, что модель с эффективным тепловым граничным условием при соответствующем подборе коэффициентов в нем дает результаты качественно и количественно близкие к тем, которые получаются в рамках сквозного расчета. При этом такая модель является более экономичной. В работе дана оценка возможности применения эффективного граничного условия. Изучены конвективные течения расплавленного магния в реторте при различных режимах обдува и нагрева. Показано влияние радиационной части теплового потока на формирование конвективных течений.

Ключевые слова: турбулентное течение; коэффициент теплоотдачи; численное моделирование; Open-FOAM; метод Кролля

Поступила в редакцию 26.08.2022; после рецензии 19.09.2022; принята к опубликованию 19.09.2022

Numerical modeling of liquid magnesium convection in a titanium reduction apparatus with consideration of effective boundary conditions

T. O. Karasev^{1,2*}, A. V. Perminov²

¹ Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

² Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

* karasev.t@icmm.ru

© Карасев Т. О., Перминов А. В., 2022



We investigate the numerical problem of conjugate heat exchange between liquid magnesium, a steel retort, and the air-cooling zone of the titanium sponge reduction reactor furnace at the initial stages of production. The uneven distribution of heat fluxes on the side surface of the retort significantly affects the formation of convective turbulent flow inside the apparatus. The accurate consideration of thermal boundary conditions will make it possible to adequately solve the problem of heat and mass transfer in the reactor without using model representations of heat flows on the boundaries of the retort. The problem was solved in the axisymmetric nonstationary formulation using the k- ω SST turbulence model. In the numerical simulation, two conceptual solutions of the problem were implemented. The first one involves the end-to-end calculation in the framework of the coupled heat and mass transfer problem, with the calculations performed in all parts of the titanium reduction apparatus and thermal boundary conditions set on its outer boundaries. The second model relies on an effective thermal boundary condition that is applied to the outer boundary of the retort and excludes calculations in the cooling channel when investigating magnesium convection. The first model, due to its greater completeness, is more accurate, but requires considerable computational resources and time. The model with an effective thermal boundary condition, provided that the coefficients in it are selected appropriately, gives results qualitatively and quantitatively close to those obtained through end-to-end calculations. At the same time, such a model is more economical. The paper evaluates the possibility of applying an effective boundary condition. Convective flows of molten magnesium in the retort under different modes of blowing and heating have been studied. The influence of the radiation part of the heat flow on the formation of convective currents is shown.

Keywords: turbulent flow; heat transfer coefficient; numerical modeling; OpenFOAM: Kroll method. *Received 26 August 2022; revised 19 September 2022; accepted 19 September 2022* doi: 10.17072/1994-3598-2022-4-05-17

1. Введение

Исследование посвящено конвекции жидкого магния (Mg) в аппарате восстановления губчатого титана. Механизм его получения через реакцию магнийтермического восстановления или методом Кролля хорошо известен и широко применяется с середины прошлого века на металлургических предприятиях [1-4]. Известно, что качество восстановленного титана зависит от большого количества факторов, таких как скорость подачи сырья, верное определение времени слива побочных продуктов реакции восстановления и конвективного течения внутри самого аппарата (реторты). Также важно отметить, что локальный перегрев реторты в ее реакционной части в ряде случаев приводит к остановке технологического процесса, который весьма энергозатратный и занимает более двух дней с дальнейшим выбраковыванием всего содержимого реактора. Неравномерность температурного распределения внешней стенки реторты и тепло от экзотермической реакции формируют конвективные вихри, влияющие на внутренние процессы внутри реторты.

В отличие от других исследований [5–8, 10] в настоящей работе рассматривается сопряженный теплообмен между жидким магнием, стальной ретортой и воздухом, движущимся в канале охлаждения аппарата, что позволяет более реалистично описывать условия прогрева расплава внутри реторты. Такая постановка исключает необходимость использования модельных граничных условий, которые идеализируют и упрощают внешние по отношению к реторте тепловые процессы, заменяя их тепловыми потоками (граничными условиями второго рода), строго разделанными на оби охлаждения. Применение ласти нагрева модельных тепловых граничных условий в ряде постановок [8, 9] обусловливало жесткую стратификацию течений внутри реторты на области с тороидальными вихрями. Как показал вычислительный эксперимент, отношение размеров этих вихрей напрямую зависит от геометрического уровня приложения тепловых потоков. Реальные тепловые потоки имеют значительно более сложную структуру, что в целом может показать совершенно иную картину и характер конвективного течения в расплаве магния.

Математическое моделирование, учитывающее Mg, стенку реторты и воздушный канал, проводилось в рамках двух концептуальных подходов. Первая концептуальная постановка предполагает сквозной расчет в рамках сопряженной задачи тепло- и массопереноса, где вычисления выполняются во всех частях аппарата восстановления титана, а тепловые гидродинамические граничные условия ставятся на его внешних границах. Они определяются мощностью и распределением тепловых источников, расположением отверстий для вдува и отвода воздуха и скоростью вдуваемого в систему охлаждения воздуха. Несмотря на корректность такого подхода, у него есть существенный недостаток, связанный с большим объемом требуемых для расчетов вычислительных ресурсов, так как необходимо производить расчет движения воздуха и теплообмена в канале охлаждения. Шаг по времени в ходе сквозных расчетов оценивается из условия устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви, которое помимо пространственного шага сетки включает скорость. Скорость воздуха в канале охлаждения реторты на один – два порядка выше скорости конвективного течения магния. В этом случае большая часть времени в течение одной итерации приходится на расчет в пределах воздушного канала.

Вторая модель подразумевает применение эффективного теплового граничного условия, которое используется на внешней границе реторты, и при исследовании конвекции магния исключает расчеты в канале охлаждения. Эффективное граничное условие учитывает тепловой поток от стенки реторты и перенос тепла к ней за счет излучения. Конвекционная часть условия, куда входит коэффициент теплоотдачи от стенки реторты, в этом случае требует отдельного определения в ходе решения задачи тепло- и массопереноса в канале воздушного охлаждения реторты [11, 12]. Найденное в ходе численного эксперимента распределение коэффициента теплоотдачи позволяет проводить расчеты конвекции для различных скоростей обдува и существенно сократить объемы вычислений. Корректность второго подхода можно оценить сравнением результатов расчета с результатами, полученными в рамках полной модели.

Основной целью данной работы является построение эффективной математической модели, описывающей процессы тепломассопереноса расплавленного магния в реторте титанового реактора, учитывающей неоднородность тепловых граничных условий на её внешней стенке. С помощью построенной модели планируется изучить конвективные течения при различных режимах обдува и нагрева.

2. Математическая постановка

Приступая к математическому описанию конвекции магния, возникает необходимость описать основные идеи построения алгоритма решения, а также методики, позволяющей свести задачу в полной постановке (рис. 1, а) к её усеченному варианту, который предполагает рассмотрение только конвекции магния в реторте (рис. 1, б). Реальные тепловые условия на внешней границе реторты заменяются на эффективные. Важным критерием адекватности перехода к эффективным граничным условиям служит качественное и количественное соответствие результатов, полученных в рамках обоих заявленных подходов для больших времен численной реализации. Таким образом, результаты численного моделирования в полной постановке будут рассматриваться как эталонные для задачи с эффективными граничными условиями.

Рассматривается задача сопряженного тепломассопереноса в жидком магнии, который находится в реторте реактора восстановления титана в рамках первой (полной) и второй (с эффективным граничным условием) математических моделей. Обе модели сформулированы в осесимметричной нестационарной постановке.

Модель конвекции жидкого магния основывается на уравнениях термогравитационной конвекции в приближении Буссинеска. Объект исследования состоит из нескольких расчетных областей (рис. 1, *a*), где Ω_{air} – воздушный канал охлаждения, Ω_r, Ω_h – стенка реторты и стенка электропечи, имеющие одинаковую толщину $H_{\text{solid}} = 0.025$ м. Геометрические параметры воздушного зазора Ω_{air}: ширина коаксиального (бокового) участка $H_{airU} = 0.155 \text{ M},$ ширина нижнего участка $H_{airD} = 0.25$ м. Радиус нижней части аппарата имеет следующие размеры $H_r = 0.929$ м, где на зону активного охлаждения приходится $H_{rD} = 0.36$ м. Ширина входного и выходного отверстий Г_{in} и Г_{out} для боковой стенки (H_z - H_z)/2. При фиксированном расположении границы Г_{іп} расстояние между ней и Γ_{out} составляет H = 0.6 м, а общая рассматриваемая высота установки $H_z = 2.775$ м.



Рис. 1. Схема расчетной области: a - вполной постановке; b - упрощенная задача с эффективными граничными усло $виями. <math>\Gamma_{Or}$ и Γ_{inr} – внутренняя и внешняя поверхности реторты, Γ_{OhD} , Γ_{OhU} , Γ_{OhB} – внешние границы печи, Γ_{inhD} , Γ_{inhU} , Γ_{inr} – границы соприкосновения внутренней части печи с областью Ω_{air} , Γ_{in} – граница входа воздушного потока в расчетную область, Γ_{out} – границы истечения воздуха, Γ_{top} . – верхняя область реторты, зона экзотермической реакции

Первая – полная постановка состоит из четырех расчетных областей Ω_{Mg} , Ω_{air} , Ω_r , Ω_h . Вторая постановка включает в себя только Ω_{Mg} и Ω_r . Радиус внутренней части реторты H_r - ($H_{airU} + H_{solid}$), ее высота (в данном случае имеется в виду не полная высота реторты, а только ее часть, заполненная Mg) H_z - ($H_{airU} + H_{solid}$).

Существенным допущением модели является представление реторты в виде цилиндрической области с плоским дном, тогда как в действительности она имеет эллиптическое дно малой кривизны, куда установлена решетка псевдодна. Данный элемент реторты предназначен для слива побочных продуктов реакции. Форма дна реторты может повлиять на распределение коэффициента теплоотдачи [12] на внешней её стенке, профиль которого вдоль реторты будет более гладким. Полагается, что кривизна реторты и псевдодно, в конечном итоге, не существенно влияют на конвективные режимы внутри реторты. Тепло снимается не непосредственно с магния, а с резервуара слива побочных продуктов реакции. Цилиндрическая форма реторты с плоским дном в целом является приемлемой и согласуется с моделями, описанными в более ранних статьях [6-12].

Общий вид системы дифференциальных уравнений для описания движения магния Ω_{Mg} и воздуха Ω_{air} выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + (\boldsymbol{U} \cdot \nabla) \boldsymbol{U} =
= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \cdot \left(\left(\boldsymbol{v}_{Mg/Air} + \boldsymbol{v}_{t} \right) \nabla \boldsymbol{U} \right) +
+ \delta_{Mg/Air} \mathbf{g} \left[1 - \beta \left(T - T_{0} \right) \right],$$
(2.1)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \ . \tag{2.2}$$

Перенос тепла в магнии и воздухе:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\boldsymbol{U} \cdot \nabla) T =$$

$$= \nabla \cdot \left(\left(\frac{\mathbf{v}_{Mg/Air}}{\Pr_{Mg/Air}} + \frac{\mathbf{v}_{t}}{\Pr_{t}} \right) \nabla T \right) + \delta_{Mg/Air} S_{rad}, \qquad (2.3)$$

в твердых стенках – Ω_r и Ω_h :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\chi_{steel} \nabla T \right). \tag{2.4}$$

Коэффициент $\delta_{Mg/Air}$ в уравнении (2.1) равен единице в области, заполненной магнием, и нулю – в воздушном зазоре. В уравнении (2.3), наоборот, данный коэффициент для магния зануляется, так как перенос излучения в непрозрачном магнии невозможен. Таким образом, в Ω_{Mg} решается система уравнений в приближении Буссинеска, учитывающая механизм естественной конвекции. Данное приближение предполагает слабую сжимаемость жидкости, а зависимость ее плотности от температуры учитывается только в правой части уравнения движения. В Ω_{air} тепловые процессы определены через вынужденную конвекцию, диффузионную теплопроводность и радиационный теплообмен.

Для учета радиационного теплопереноса между стенкой печи и стальной ретортой применялась P_1 модель [13, 14]. Для использования данной модели в уравнение переноса тепла (2.3) дописывается слагаемое $S_{rad} = (\kappa G - 4\kappa\sigma T^4)/\rho C_p$, которое можно вычислить, решив уравнение для функции *G*, описывающей поле падающего излучения

$$\nabla \cdot \frac{1}{3\kappa} \nabla G = \kappa G - 4\kappa \sigma T^4, \qquad (2.5)$$

S_{rad} описывает взаимодействие излучения со средой.

В уравнения (2.1)–(2.5) входят следующие переменные и безразмерные константы: t – время; U – вектор скорости; P – давление; T – температура; v_{Mg} , v_{air} – кинематическая вязкость магния и воздуха; χ_{steel} – температуропроводность стали; $\Pr_{Mg/air} = v_{Mg/air}/\chi_{Mg/air}$ – число Прандтля; v_t – турбулентная вязкость; \Pr_t – турбулентное число Прандтля; κ – коэффициент абсорбции; σ – постоянная Стефана–Больцмана; β – коэффициент теплового расширения магния.

Для описания турбулентного движения магния и воздуха была использована $k-\omega$ SST модель турбулентности [15], хорошо зарекомендовавшая себя при рассмотрении трехмерной конвекции магния и естественной конвекции воздуха в воздушном канале.

В предыдущей работе [9] рассматривалась возможность моделирования конвекции жидкого магния в рамках RANS подхода для описания турбулентности. Было показано, что наиболее близкие относительно LES подхода, который считается более точным, но и более затратным, моделирования получаются результаты при использовании турбулентного числа Прандтля не как константы, а как некоторого скалярного поля. В расчетах для расплавленного магния Prt = 4.1 во всей области, за исключением ее верхней части свободной (0.3)М от поверхности), гле турбулентное число Прандтля менялось по линейному закону от 4.1 до 100.

Продолжительность процесса восстановления занимает чуть больше двух суток. В это время происходит постоянный температурный контроль внешних стенок реторты. Данный контроль осуществляется путем включения и выключения рядов электропечей, имеющих мощность по 94 кВт. Несмотря на высокую вариативность возможных постановок, в работе рассмотрен один вариант тепловых граничных условий, наиболее часто встречающийся в промышленном цикле выработки титана, а именно случай, когда работают только боковые нагреватели мощностью $Q_{hs} = 329 \text{ кBT}$ с границы Γ_{OhU} . Также в систему поступает тепло через свободную, не деформируемою поверхность Γ_{top} , равную теплу выделяющемуся в ходе экзотермической реакции $Q_{Mg} = 209 \text{ кBT}$

$$q_{\Gamma_{top}} = -\lambda_{Mg} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_{top}} = \frac{Q_{Mg}}{S_{\Gamma_{top}}} \,. \tag{2.6}$$

Съем тепла осуществляется воздухом, проходящим по каналу охлаждения. Рассмотрено три скоростных режима его подачи, а именно $U_{\Gamma_{in}}$ = 3, 8 и 10 м/с с границы Г_{іп}. Температура входящего воздуха 25°С. Граничные условия на поле скорости у твердых стенок соответствовали условию прилипания (noSlip), за исключением где применялось границы Γ_{top} , условие проскальзывания (Slip). В постановке с воздушным зазором на границе Гоит предполагается свободное истечение газа $\partial T/\partial \mathbf{n} = 0$.



Рис. 2. Схема распределения тепловых потоков: а – для полной постановки (сквозной расчет), тепло подводится электропечами к внешним стенкам реактора; б – для модели с эффективными граничными условиями, где стрелочками обозначены потоки тепла от излучения и конвекции на внешней стенке реторты

Тепловое условие на внешней боковой границе реактора в случае работы на полную мощность только боковых нагревательных элементов для математической модели (рис. 2, *a*), где подразумевается сквозной расчет, имеет вид

$$q_{\Gamma_{OhU}} = -\lambda_{steel} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_{OhU}} = \frac{Q_{hs}}{S_{\Gamma_{OhU}}}$$
(2.7)

Все поля скорости и температуры в полной постановке получаются из решения системы (2.1)–(2.5) внутри всех расчетных областей, на границах которых в местах соприкосновения воздуха и магния с твердыми стенками выполняются условия теплового сопряжения:

$$\begin{aligned} \lambda_{steel} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_{solid}} &= \left(\lambda_{fluid} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right) \right|_{\Gamma_{solid}}, \\ T_{steel} \left|_{\Gamma_{solid}} &= T_{fluid} \right|_{\Gamma_{solid}}. \end{aligned}$$
(2.8)

Обсудим далее тепловые граничные условия для модели с эффективным граничным условием. Геометрия задачи в этом случае существенно упрощается (рис. 2, б). Внешняя поверхность реторты Г_{inr} находится в условиях радиационноконвективного теплообмена с атмосферным воздухом, прогоняемым по каналу охлаждения, и внешней стенкой аппарата, в которую встроены нагревательные элементы. Эффективное граничное условие ставится на внешней стенке реторты. Оно состоит из двух частей: слагаемого, отвечающего за конвективный теплообмен, куда явно входит коэффициент теплоотдачи, И слагаемого, отвечающего за радиационный теплообмен q_{rad}. Формально эффективное граничное условие выглядят следующим образом:

$$\begin{split} \lambda_{steel} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_{Or}} &= q_{cond} + q_{rad} = \\ &= \alpha \left(T_{\Gamma_{Or}} - T_{inf} \right) + q_{rad} \,. \end{split}$$
(2.9)

В работах [11, 12] были получены распределения коэффициента теплоотдачи α от внешней стенки реторты при различных скоростях её обдува воздухом, движущимся по каналу охлаждения аппарата восстановления титана. На основании этих распределений можно записать условие (2.9) в виде

$$\begin{aligned} \lambda_{steel} \frac{\partial T}{\partial n} \bigg|_{\Gamma_{Or}} &= \\ &= \frac{\lambda}{H_{airU}} \operatorname{Re}_{l}^{4/5} \operatorname{Pr}^{1/3} S(L) (T_{\Gamma_{Or}} - T_{inf}) + q_{rad}. \end{aligned}$$
(2.10)

В (2.10) $\text{Re}_l = \text{U}_{\text{inlet}} l/\nu -$ число Рейнольдса, с характерным размером l = 0.155 м, ν – кинематическая вязкость воздуха. Изменение скорости прокачки воздуха U_{inlet} приводит к изменению условий охлаждения реторты, т.е. к изменению эффективного коэффициента теплоотдачи.

В формуле (2.10) присутствует слагаемое, содержащее параметр S(L), который характеризует распределение коэффициента теплоотдачи вдоль боковой стенки реторты и состоит из двух полиномов, зависящих от координаты L, откладываемой вдоль внешней границы реторты от верхнего её края. Для вертикальной части реторты Γ_{inr}

$$S(L) = \begin{cases} 0.19 - 0.26L + 20.74L^2 - \\ -131.69L^3 + 333.44L^4 - \text{ боковая стенка} \\ -385.61L^5 + 166.85L^6, \\ (2.11) \\ 1.18 - 1.41L - 1.63L^2 + \\ + 4.67L^3 + 3.53L^4 + \\ + 1.12L^5 - 0.13L^6. \end{cases}$$

Воздух - оптически прозрачная среда для инфракрасного теплового излучения. Его коэффициенты абсорбции и эмиссии близки к нулю, т.е. потери падающего на реторту излучения в воздухе незначительны и могут не учитываться. Кроме того, присутствует механизм переизлучения теплового потока стенкой реторты, который выравнивает температурные поля и исключает появление локальных зон с перегретости. Переизлучение, а также съем и перенос тепла потоком воздуха приводят к потерям, т.е. не все 100% энергии излучаемой стенкой реактора попадают на внешнюю границу реторты И равномерно по ней распределяются.

По аналогии с (2.11) слагаемо
е $q_{\it rad}$ для радиационного теплообмена можно разделить на две части

$$q_{rad} = \begin{cases} C_{s} \frac{Q_{hs}}{S_{\Gamma inr}}, - \text{боковая поверхность,} \\ C_{b} \frac{Q_{hs}}{S_{\Gamma inr}}, - \text{дно реторты,} \end{cases}$$
(2.12)

где эмпирические коэффициенты C_s и C_b показывают какая доля полного теплового потока $q_{rad} = Q_{hs} / S_{\Gamma inr}$, излученного боковой стенкой аппарата, попала, соответственно, на внешнюю боковую границу реторты и её нижнюю часть. S_{Гіпг} – площадь границы Γ_{inr} , т.е. внешней стенки реторты. Нахождение коэффициентов C_s и C_b в результате численного моделирования является одной из задач данной работы, так как без учета излучения поставить корректную задачу конвекции магния в таком приближении будет невозможно. Отметим, что C_s + C_b ≤ 1 .

Предположим, что система в начальный момент времени находится в состоянии теплового равновесия с нулевым распределением поля скорости во всех расчетных узлах сетки. Температуры магния, стальных стенок реторты и электропечей предполагаются равными 850°С, что соответствует температуре плавления магния. Теплофизические свойства Mg, используемые в этой работе, даны в [9], воздуха и стальных стенок – в [11].

Все расчеты были выполнены в пакет программ с открытым исходным кодом OpenFOAM-extend 4.0. Дискретизация расчетных областей проводилась методом конечных объемов, где шаг сетки составлял 5 мм. Был реализован модифицированный решатель conjugateHeatFoam, куда были внесены изменения, позволяющие проводить расчет для нескольких не смешивающихся разделенных флюидов. Система уравнений (2.1)-(2.4) решалась по алгоритму PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) [16]. Временные производные дискретизировались по неявной схеме Эйлера, диффузионные слагаемые - по схеме с центральными разностями. Конвективные слагаемые аппроксимировались односторонними разностями против потока.

Для определения вычислительной эффективности упрощенной модели проводилось сравнение длительности вычисления в рамках двух математических моделей одной физической секунды. Шаг по времени во всех расчетах регулировался числом Куранта, которое не превышало 0.5. Было выполнено три расчета для различных скоростей подачи воздуха для обдува 3, 8, 10 м/с и разных постановок. Отсечка контрольного времени производилась при выходе решения в различных постановках на квазистационарный режим. Это делалось для исключения начального этапа расчетов, где в полной постановке формируется течение воздуха в канале охлаждения, и большая часть времени выполнения одной итерации тратится на сходимость численного решения СЛАУ в этой области. Расчеты были выполнены без использования распараллеливания на процессоре Intel® i7-8700k



Рис. 3. Зависимость времени выполнения одной физической секунды расчета для двух постановок, где к эффективным граничным условиям относятся круглые точки, а к полной постановке – квадраты

На рис. 3 видно, что время расчета одной физической секунды для постановки с эффективными граничными условиями для трех скоростей при-



Рис. 4. Средние поля скорости в сечении zOr для скоростей подачи воздуха $U|_{\Gamma in}$: a, $z - 3 \ M/c$; б, $d - 8 \ M/c$; в, $e - 10 \ M/c$: a, б, в соответствуют полной постановке, z, d, e - постановке c эф-фективными граничными условиями

близительно составляет 4.8–5.1 с, тогда как при сквозном расчете время увеличивается от 155 до 490 с. Такая большая разница во времени обусловлена необходимостью использования в сквозном расчете сетки с большим количеством узлов, а также вычислительного алгоритма с малым шагом по времени, что обеспечивало устойчивость численного решения.

3. Результаты расчетов

В расчетах использованы две математические постановки для моделирования конвекции жидкого магния в аппарате восстановления титана при различных скоростях его обдува $U|_{\Gamma in} = 3$; 8; 10 м/с. Подвод энергии в обеих моделях осуществлялся за счет боковых электронагревателей и экзотермической реакции. Результаты приведены для $k-\omega$ SST модели турбулентности на сетке с размером элемента $h_{r,z} = 5$ мм. Среднее время выхода течения на

квазистационарный режим для всех численных реализаций составляло 1800 с, а результаты, приведенные в статье, соответствуют 2000 с.

На фрагментах рис. 4, *a*, *б*, *в* представлены результаты расчета конвективных течений жидкого магния в реторте аппарата, которые получены на основании полной модели, соответствующей геометрии рис. 2, *a*. Поля скорости воздуха и распределения температуры в зазоре охлаждения реактора для скоростей подачи воздуха 3, 8, 10 м/с не отличаются от полученных ранее в [12], поэтому в рамках настоящей работы обсуждаться не будут.

На рис. 4, *а* представлено осредненное по времени поле скорости жидкого магния при скорости подачи воздуха 3 м/с. Видно, что формируется трехвихревое течение, причем нижний крупный вихрь, образованный путем нагрева поверхности, более интенсивный, чем верхний, находящийся в зоне непосредственного охлаждения. Нижний маленький вихрь, располагающийся вдоль оси симметрии, образуется, вероятно, по причине нахождения вблизи этого участка застойной зоны в канале охлаждения [12]. В реальной установке такого вихря, скорее всего, не будет, так как реторта имеет эллиптическое дно, и распределение коэффициента теплоотдачи будет более гладким. Конвективное течение прижато к внутренней поверхности реторты, где наблюдается максимальное значение скорости 0.0275 м/с.

На рис. 4, б показано среднее поле скорости, полученное при охлаждении реторты воздухом, подаваемым со скоростью 8 м/с. Картина течения в этом случае получается несколько иная. Многовихревая структура сменяется одновихревой, заполняющей всю внутреннюю область реторты. Направление течения (закрутки) говорит о том, что охлаждение внешней стенки реторты воздухом происходит быстрее, чем поступление тепла от электропечей. При такой скорости обдува пропадает нижний приосевой вихрь. Максимальные значения скорости конвективного течения, полученные для данной постановки, составляют 0.04 м/с. На рис. 4, *в* продемонстрировано течение магния при $U|_{\Gamma in} = 10$ м/с. Как видно из рисунка, структура течения незначительно отличается от предыдущей. Течение осталось одновихревым, увеличилась скорость конвективного течения магния, максимальное её значение составило примерно 0.05 м/с.

Полученные результаты отличаются от предыдущих работ, где рассматривалась трехмерная постановка с модельными граничными условиями в виде тепловых потоков [9]. Максимальные значения скоростей снизились приблизительно в два раза, а также поменялась структура течения.

В отличие от постановки для сквозного расчета, где известны все начальные и граничные условия, в модели с эффективным граничным условием (2.10)–(2.12) есть два неизвестных параметра C_s и C_b , которые могут принимать значения от 0 до 1. Важно отметить, что для более общего случая эмпирические параметры C_s и C_b могут являться функциями от пространственной координаты *L*. Для оценки значений этих коэффициентов была выполнена серия расчетов, где фиксировалась одна



Рис. 5. Средние поля скорости магния в сечения zOr для режима обдува $U|_{\Gamma in}=8$ м/с при различных значениях коэффициентов C_s и C_b в радиационной части граничного условия (2.10)–(2.12), $C_b=0.1$ и C_s : a - 0.2; $\delta - 0.4$; b - 0.6; c - 0.8



Рис. 6. Значения интегрального параметра $\Sigma \omega_i$ при различных отношениях коэффициентов $C_s u$ C_b для постановки с эффективными граничными условиями и трех скоростей подачи воздуха: а – 3 м/с; δ – 8 м/с; в – 10 м/с. Звездой отсечены результаты, полученные в ходе решения задачи в полной постановке

из констант, например, C_b , и с шагом в 0.1 менялась C_s .

На рис. 5 показана динамика изменения поля скорости магния в зависимости от изменения коэффициента C_s , лежащего в интервале от 0.2 до 0.8 с шагом 0.2 при фиксированном значении $C_b=0.1$ и скорости подачи воздуха 8 м/с.

Из рис. 5, *а* видно, что при малых значениях C_s образуется нисходящее течение вдоль стенки, что говорит о ее равномерном охлаждении вдоль всей боковой поверхности реторты. При дальнейшем увеличении этого коэффициента от 0.4 до 0.6 (рис. 5, *б*, *в*) происходит формирование двух разнонаправленных вихрей, причем с увеличением C_s нижний вихрь вытесняет верхний вплоть до момента, пока не займет все пространство реторты, как это показано на рис. 5, *г*.

Проведя серию расчетов, мы можем проанализировать изменение структуры течения в зависимости от эмпирических констант C_s и C_b , и подобрать такие их значения, при которых структура конвективного течения магния в реторте в модели с эффективным граничным условием качественно и количественно будет соответствовать модели со сквозным счетом.

Для анализа результатов в двумерной постановке можно выбрать вектор завихренности $\boldsymbol{\omega}$ = rot U, который имеет одну компоненту и показывает направление закрутки потока. Для каждого случая определялся интегральный параметр $\Sigma \omega_i$, равный сумме компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$ по поверхности всей расчетной области.

На рис. 6 представлены зависимости $\Sigma \omega_i$ от C_s для различных C_b и скоростей подачи воздуха. Изменению характера течения соответствуют переходы через экстремумы на этих зависимостях. При скорости подачи воздуха 3 м/с и малых значениях $C_s \leq 0.2$ для всех рассмотренных C_b конвективное течение имеет закрутку по часовой стрелке. В интервале 0.2 < C_s ≤ 0.5 происходит изменение характера течения и закрутки вихрей. Для скоростей подачи воздуха 8 м/с значения С_s соответствующие процессу смены структуры течения находятся в интервале от 0.4 до 0.8, а для скорости подачи 10 м/с – в интервале 0.5÷0.8 (см. рис. 6). Это обусловлено тем, что при высокой скорости охлаждения необходимо больше энергии для изменения закрутки течения. На всех фрагментах рис. 6 видно, что интегральные значения завихренности для полной постановки (отмечены звездой) близки к расчетным при конкретных значениях коэффициентов С_в и С_b.

Существенным недостатком использования интегральной завихренности $\Sigma \omega_i$ является потеря информации о переходных режимах и многовихревых течениях, так как этот параметр определяет лишь суммарное направление закрутки.

Разложение средних полей скорости на моды позволит более детально изучить течения при различны C_s и C_b и выбрать наиболее подходящие константы, удовлетворяющие поставленной задаче. Для этого использовались Фурье-моды с проскальзыванием (*free-slip modes*) [17]. Разложение компонент поля скорости может быть представле-



Рис. 7. Зависимость средней энергии мод: $a - E_{11}$, $\delta - E_{12}$, a также амплитуд основных мод: $b - A_{11}$, B_{11} , $c - A_{12}$, B_{12} при различных значениях коэффициентов $C_s u C_b u$ скорости обдува реторты 3 м/с. На фрагменте (д) показана карта распределения энергии в модах E_{nm} , где по осям отложены номера мод n u m, для течения с $C_b=0.6$, $C_s=0.3$

но в виде

$$\langle U_z \rangle = \sum_{n,m} A_{n,m} \cos\left(\frac{\pi nr}{L_r}\right) \sin\left(\frac{\pi mz}{L_z}\right),$$
 (3.1)

$$\langle U_r \rangle = \sum_{n,m} A_{n,m} \sin\left(\frac{\pi nr}{L_r}\right) \cos\left(\frac{\pi mz}{L_z}\right),$$
 (3.2)

Средняя энергия каждой моды задается выражением

$$E_{n,m} = \frac{1}{2} \left\langle A_{n,m}^2 + B_{n,m}^2 \right\rangle,$$
(3.3)

где $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ — радиальные и азимутальные амплитуды, индексы *n* и *m* указывают на рассматриваемую моду. Данные разложения строго применимы для течений с отсутствием прилипания на границах, так как они хорошо описывают структуру сложного течения, а также показывают, в какой моде сосредоточена наибольшая энергия. В данной постановке две границы, а именно — ось симметрии и реакционная поверхность — имеют проскальзывание.

Из рис. 7, *а*, *б* видно, что для $C_s = 0.1$ доминирует энергия моды E_{11} , а энергия моды E_{12} значительно меньше, что говорит о наличии крупной циркуляции. При увеличении C_s до 0.2 происходит мгновенное перестроение среднего течения на двухвихревое, которое при дальнейшей подкачке энергии от электропечей переходит в одновихревое. Данное состояние сохраняется при дальнейшем росте C_s . На рис. 7, *в*, *г* показаны амплитуды, соответствующие радиальным и азимутальным компонентам скорости для рассматриваемых мод.

По ним хорошо видно, как меняется знак осевой U_z и радиальной U_r компонент скорости. Звездами и снежинками отмечены значения, полученные при сквозном расчете. Сопоставляя результаты, можно определить, при каких C_s и C_b получилось наибольшее соответствие между расчетами в двух постановках. Для скорости воздуха 3 м/с приемлемыми являются значения $C_s = 0.3$, C_b = 0.6. Так как расчеты выполнялись с шагом 0.1 для этих констант, то не исключено, что более подходящее значение будет незначительно отличаться от указанных.

Карта распределения энергии по модам на рис. 7, ∂ показывает, что максимальная энергия сосредоточена в модах E_{11} и E_{12} , т.е. течение двухвихревое.

Рис. 8 демонстрирует, как и предыдущий рисунок энергию основных мод конвективного течения магния для режима охлаждения 8 м/с при различных параметрах C_s и C_b . Из рис. 8, *a*, *б* хорошо видно, что наиболее развитое двухвихревое течение образуется при эффективном нагреве боковой поверхности реторты при $C_s = 0.6$. Далее происходит резкое перестроение в одновихревой режим. Данные результаты помогли определить нужные значения эмпирических коэффициентов C_s и C_b для этой постановки, которые составили 0.1 и 0.1. Численный эксперимент показал, что при дальнейшем увеличении скорости охлаждения до 10 м/с, значения этих эмпирических констант



Рис. 8. Зависимость средней энергии мод: $a - E_{11}$, $\delta - E_{12}$, а также амплитуд основных мод: $b - A_{11}$, B_{11} , $c - A_{12}$, B_{12} при различных значениях коэффициентов C_s и C_b и скорости обдува реторты 8 м/с. На фрагменте (д) показана карта распределения энергии в модах E_{nmb} где по осям отложены номера мод n и m, для течения с $C_b=0.1$, $C_s=0.1$

остаются неизменными.

На фрагментах г, д, е рис. 4 представлены результаты моделирования конвекции магния в постановке с эффективными граничными условиями. Из рис. 8, а, г видно, что качественная картина течения в модели с эффективными граничными условиями близка к модели, где реализован сквозной расчет, но имеется различие на 11 % в максимальной средней скорости движения жидкости. В расчетах с эффективным граничным условием появляется трехвихревое течение, причем эта модель уловила эффект застойной зоны в нижней части реторты, в результате которого сформировался небольшой вихрь вдоль оси симметрии. При скоростях воздуха 8 м/с (рис. 8, б, д) результаты, полученные разными моделями, оказались близки. При структурном сходстве течений конвективные поля скоростей отличаются на 7.5%. Сравнивая поля для более интенсивного охлаждения (рис. 8, e, e), можем сделать аналогичный вывод, за тем исключением, что максимальное расхождение составило 15%.



Рис. 9. Поле средней температуры магния при охлаждении потоком воздуха 8 м/с

В данной статье большое внимание уделено структуре и формированию конвективных течений, однако стоит отметить, что в ходе моделирования были получены поля температур. На рис. 9 продемонстрировано среднее поле температуры для режима охлаждения 8 м/с при расчетах в рамках модели с эффективным граничным условием. Видно, что максимальное изменение температуры происходит в верхней реакционной части реторты. С удалением от границы Γ_{top} температура падает от 977.5°C до 842.5°C с минимальной температурой в области боковой стенки. Другие расчеты показали, что для скорости 3 м/с максимальная температура поднимается для 1030°C, а для 10 м/с составляет

960°С. Максимальное отклонение температуры при сравнении двух подходов не превышает 3%. Важно отметить, что в реальной установке реторта заполнена магнием не полностью и в ее верхней части находится инертный газ аргон. Граничное условие в таком случае немного изменится и к потоку тепла от химической реакции необходимо будет учесть условие, характеризующее потерю тепла при излучении.

В целом, применение модели с эффективным граничным условием облегчит дальнейшее изучение процессов, проходящих внутри реторты, так как позволит адекватно и с наименьшими затратами описать течения магния на начальных этапах работы установки.

4. Заключение

Разработано две модели конвекции жидкого магния в аппарате восстановления титана. Первая модель подразумевает полную постановку сопряженной задачи тепло- и массопереноса, в рамках которой реализуется сквозной расчет во всем аппарате восстановления титана. В результате численного моделирования задачи в полной постановке были определены поля скорости и температуры магния при различных скоростях обдува. Показано, что при низких скоростях обдува формируется двухвихревое течение с максимальной скоростью 0.027 м/с, тогда как при увеличении скорости обдува до 8 или 10 м/с течение имеет одновихревую структуру с максимальными скоростями 0.04 и 0.05 м/с, соответственно.

Вторая постановка подразумевает использование эффективного граничного условия на внешней стенке реторты аппарата. Это позволяет исключить из расчетов конвекции магния области с воздушным зазором охлаждения и нагревателями, расположенными в стенке аппарата. Показано, что применение модели с эффективными граничными условиями ускоряет процесс счета, что особенно заметно при условии высокой интенсивности обдува. Время выполнения расчета одной физической секунды изменилось с 155–490 с для модели в полной постановке до 4.8–5.1с для модели с эффективным граничным условием.

В ходе вычислительного эксперимента подобраны коэффициенты радиационной составляющей тепловых граничных условий, при которых достигается хорошее качественное и количественное соответствие результатов двух моделей. При скорости воздуха 3 м/с коэффициенты C_s и C_b равны 0.6 и 0.3, а для всех остальных условиях – 0.1. Максимальное расхождение результатов составило 15% для задачи с наиболее интенсивным охлаждением.

Изучено влияние коэффициентов C_s и C_b на формирование конвективных течений. С помощью параметра интегральной завихренности и разложе-

ния поля скорости на Фурье-моды определены пороговые значения этих коэффициентов, которые соответствуют изменению структуры конвективных течений.

Список литературы

- 1. Гармата В. А., Петрунько А. Н., Галицкий Н. В. и др. Титан. М.: Металлургия, 1983. 559 с.
- 2. Гармата В. А., Гуояницкий Б. С., Крамник В. Ю. и др. Металлургия титана. М.: Металлургия, 1968. 643 с.
- 3. Сергеев В. В., Галицкий Н. В., Киселев В. П., Козлов В. М. Металлургия титана. М.: Металлургия, 1971. 320 с
- 4. Мальшин В. М., Завадовская В. Н., Пампушко Н.А. Металлургия титана. М.: Металлургия, 1991. 208 с.
- Тарунин Е. Л., Шихов В. М., Юрков Ю. С. Свободная конвекция в цилиндрическом сосуде при заданном тепловом потоке на верхней границе // Гидродинамика. 1975. Т. VI. С. 85–98.
- 6. Цаплин А. И., Нечаев В. Н. Численное моделирование неравновесных процессов тепломассопереноса в реакторе для получения пористого титана // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6. № 4. С. 483–490. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.4.53
- Teimurazov A., Frick P., Stefani F. Thermal convection of liquid metal in the titanium reduction reactor // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2017. Vol. 208, 012041. DOI: 10.1088/1757-899X/208/1/012041
- Теймуразов А. С., Фрик П. Г. Численное исследование конвекции расплавленного магния в аппарате восстановления титана // Вычислительная механика сплошных сред. 2015. Т. 8. №4. С. 433–444. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.37
- Карасев Т. О., Теймуразов А. С. Моделирование турбулентной конвекции жидкого магния в аппарате восстановления титана в рамках подходов RANS и LES. // Вычислительная механика сплошных сред. 2019. Т. 12. №4. С. 353–365. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.4.30
- Teimurazov A., Frick P., Weber N., Stefani F. Numerical simulations of convection in the titanium reduction reactor // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 891, 012076. DOI: 10.1088/1742-6596/891/1/012076
- Карасев Т. О., Теймуразов, А. С., Перминов, А. В. Численное исследование теплоотдачи стенки титанового реактора при воздушном охлаждении // Вычислительная механика сплошных сред. 2020. Т. 13. № 4. С. 424-436. DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.4.33

- Карасев Т. О., Перминов А. В. Моделирование тепловых режимов в канале воздушного охлаждения аппарата восстановления титана. // Вестник Пермского университета. Физика. 2021. № 4. С. 39–51. DOI: 10.17072/1994-3598-2021-4-39-51.
- Modest M. F. The improved differential approximation for radiative heat transfer in multidimensional media. // Journal of Heat Transfer. 1990. Vol. 112. P. 819–821. DOI: 10.1115/1.2910468
- Marshak R. E. Note on the spherical harmonics method as applied to the Milne problem for a sphere. // Phys. Rev. 1947. Vol. 71. P. 443-446. DOI: 10.1103/PhysRev.71.443.
- Menter F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. 1994. Vol. 32. N. 8. P. 1598–1610. DOI: 10.2514/3.12149.
- Issa R. I. Solution of the implicitly discretized fluid flow equations by operator-splitting // J. Comput. Phys. 1985. Vol. 62. N. 1. P. 40–65. DOI: 10.1016/0021-9991(86)90099-9
- Verma M. K. Physics of Buoyant Flows: From Instabilities to Turbulence. World Scientific, 2018. 352 p. DOI: 10.1142/10928.

References

- Garmata V. A., Petrun'ko A. N., Galitsky N. V., Olesov Yu. G. Sandler R. A. *Titan* [Titanium]. Moscow: Metallurgiia Publ., 1983. 559 p. (In Russian).
- Garmata V. A, Guoyanitskiy B. S., Kramnik V. Yu., Lipkes Ya. M., Seryakov G. V., Suchkov A. B., Homyakov P. P. *Metallurgiia titana* [Titanium Metallurgy]. Moscow: Metallurgiia Publ., 1968. 643 p. (In Russian).
- Sergeev V. V., Galitsky N. V., Kiselev V. P., Kozlov V. M. *Metallurgiia titana* [Titanium Metallurgy]. Moscow: Metallurgiia Publ., 1971. 320 p. (In Russian).
- Mal'shin V. M., Zavadovskaya V. N., Pampushko N. A. *Metallurgiia titana* [Titanium Metallurgy]. Moscow: Metallurgiia Publ., 1991. 208 p. (In Russian).
- Tarunin E. L., Shikhov V. M., Yurkov Yu. S. Svobodnaia konvektsiia v tsilindricheskom sosude pri zadannom teplovom potoke na verkhnei granitse [Svobodnaya konvektsiya v tsilindricheskom sosude pri zadannom teplovom potoke na verhney granitse [Free convection in a cylindrical vessel at a given heat flux at the upper boundary]. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Perm, 1975, issue VI, pp. 85-98. (In Russian).
- 6. Tsaplin A.I., Nechaev V. N. Numerical modeling of non-equilibrium heat and mass transfer processes in a reactor for the production of porous titanium. *Computational Continuum Mechanics*, 2013,

vol. 6, no. 4, pp. 483-490. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.4.53

- Teimurazov A., Frick P., Stefani F. Thermal convection of liquid metal in the titanium reduction reactor. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2017, vol. 208, 012041. DOI: 10.1088/1757-899X/208/1/012041
- Teimurazov A. S., Frick P.G. Numerical study of molten magnesium convection in the apparatus for titanium reduction. *Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 433-444. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.37
- Karasev T. O., Teimurazov A. S. Modeling of liquid magnesium turbulent convection in the titanium reduction apparatus using RANS and LES approaches. *Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol.12, no. 4, pp. 353-365. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.4.30
- Teimurazov A., Frick P., Weber N., Stefani F. Numerical simulations of convection in the titanium reduction reactor. *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, vol. 891, 012076. DOI: 10.1088/1742-6596/891/1/012076
- Karasev T. O., Teimurazov A. S., Perminov A. V. Numerical study of heat transfer coefficient of titanium reactor wall at air cooling. *Computational Continuum Mechanics*, 2020, vol. 13, no. 4,

pp. 424–436. DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.4.33

- Karasev T. O., Perminov A. V. Modeling of thermal regimes in the air cooling channel of titanium reduction apparatus. *Bulletin of Perm University*. *Physics*, 2021, no. 4, pp. 39-51. DOI: 10.17072/1994-3598-2021-4-39-51
- Modest M. F. The improved differential approximation for radiative heat transfer in multidimensional media. *Journal of Heat Transfer*, 1990, vol. 1121, pp. 819–821. DOI: 10.1115/1.2910468.
- Marshak R. E. Note on the spherical harmonics method as applied to the Milne problem for a sphere. *Phys. Rev.*, 1947, vol. 71, pp. 443-446. DOI: 10.1103/PhysRev.71.443.
- Menter F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 1994, vol. 32, no. 8, pp. 1598 – 1610. https://doi.org/10.2514/3.12149.
- 16. Issa R. I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *J. Comput. Phys.*, 1985, vol. 62, no. 1, pp. 40-65. DOI: 10.1016/0021-9991(86)90099-9
- Verma M. K. *Physics of Buoyant Flows: From Instabilities to Turbulence*. World Scientific PC, 2018. 352 p. DOI: 10.1142/10928.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Карасев Т. О., Перминов А. В. Численное моделирование конвекции жидкого магния в аппарате восстановления титана с учетов эффективных граничных условий // Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 4. С. 05–17. doi: 10.17072/1994-3598-2022-4-05-17

Please cite this article in English as:

Karasev T. O., Perminov A. V. Numerical modeling of liquid magnesium convection in a titanium reduction apparatus with consideration of effective boundary conditions. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2022, no. 4, pp. 05–17. doi: 10.17072/1994-3598-2022-4-05-17

Сведения об авторах

- 1. Тимофей Олегович Карасев, младший научный сотрудник, Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, ул. Ак. Королева, 1, Пермь, 614013
- Анатолий Викторович Перминов, доктор физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой «Общая физика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Комсомольский пр., 29, Пермь, 614990

Author information

- 1. *Timofey O. Karasev*, Junior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia
- 2. Anatoliy V. Perminov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of General Physics, Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia