

УДК 532.6, 532.5  
PACS 47.55.D-, 47.55.dr

## Параметрическая неустойчивость одиночной капли и ансамбля капель при круговых вибрациях

А. А. Алабужев<sup>1,2</sup>, М. А. Пьянкова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

<sup>2</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь  
ya.kashina-marina@yandex.ru

В данной статье рассматриваются вынужденные колебания и параметрическая неустойчивость цилиндрической капли, а также ансамбля капель при круговых вибрациях. Капля окружена несжимаемой жидкостью другой плотности и зажата между двумя параллельными пластинами. В равновесии капля имеет форму круглого цилиндра, ограниченного в осевом направлении этими пластинами. Построены динамическая и средняя формы капли. Получена система амплитудных уравнений для возмущений и исследована параметрическая неустойчивость вынужденных колебаний одиночной капли. По аналогии написана система уравнений для исследования параметрической неустойчивости для произвольной капли в ансамбле взаимодействующих капель. Построены области неустойчивости как для взаимодействующих мод, так и для мод более высокого порядка. Показано, что в случае ненулевого взаимодействия нижние моды более опасны при наличии расстройки частоты.

**Ключевые слова:** вынужденные колебания; круговые вибрации; капля жидкости; ансамбль капель; параметрическая неустойчивость

*Поступила в редакцию 22.08.2022; после рецензии 08.09.2022; принята к опубликованию 09.09.2022*

## Parametric instability of a single drop and an ensemble of drops under circular vibrations

A. A. Alabuzhev<sup>1,2</sup>, M. A. Pyankova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

<sup>2</sup>Perm State University, Perm, Russia  
ya.kashina-marina@yandex.ru

This article discusses forced oscillations and parametric instability of a cylindrical drop and an ensemble of drops under circular vibrations. The drop is surrounded by an incompressible liquid of a different density and is sandwiched between two parallel plates. In equilibrium, the drop has the shape of a circular cylinder bounded in the axial direction by these plates. The dynamic and average shape of the drop is constructed. A system of amplitude equations for small perturbations of the forced oscillations is obtained and the parametric instability of the single drop is studied. By analogy, a system of equations was written to study the parametric instability for an arbitrary drop in an ensemble of interacting drops. The regions of instability are constructed both for interacting modes and for modes of a higher order. It is shown that in the case of nonzero interaction, the lower modes are more dangerous in the presence of frequency detuning.

**Keywords:** forced oscillations; circular vibrations; fluid drop; ensemble of drops; parametric instability

Received 22 August 2022; revised 08 September 2022; accepted 09 September 2022

doi: 10.17072/1994-3598-2022-3-56-65

## 1. Введение

Вибрационное воздействие является одним из широко используемых методов управления включениями. Оно активно используется как в исследовательских целях, так и на производстве. Кроме того, вибрации или свободные колебания, которые возникают при однократном неперiodическом воздействии, могут являться нежелательным фактором при работе, например, промышленных установок. Все это привлекает внимание ученых на протяжении нескольких десятилетий [1–10].

Одним из наиболее часто встречающихся эффектов при вибрационном воздействии является параметрический резонанс, возникающий на удвоенной частоте собственных колебаний [11]. Это особенно актуально при управлении различными включениями (частицы, капельки, пузырьки) в жидкости [12–14] или при исследовании устойчивости течения жидкости [15–20]. В работе [21] исследовались вынужденные колебания цилиндрической капли со свободной линией контакта. При трансляционных линейных вибрациях параметрический резонанс в такой системе возникает при условии равенства частоты внешнего воздействия сумме частот двух соседних азимутальных мод собственных колебаний. Параметрическая неустойчивость цилиндрической капли с мало подвижной линией контакта исследовалась в работе [14]. Параметрический резонанс для сферической капли возникает на удвоенной частоте собственных колебаний [22].

Динамика связанных осцилляторов (индивидуальных колебательных систем) демонстрирует гораздо более богатое поведение [23–25] по сравнению с одиночным осциллятором. Одним из наиболее интересных эффектов в этих ансамблях является появление коллективных мод, когда хотя бы часть осцилляторов синхронизирована, а среднее поле проявляет нетривиальную динамику. В последнее время особый интерес вызывают ансамбли параметрически возбуждаемых осцилляторов [26–29]. Одной из возможных реализаций такой системы является массив джозефсоновских контактов [30, 31]. В [26–28] проведен линейный анализ неустойчивостей в ансамбле модели, в которой параметрическая модуляция является кусочно-зависимой функцией времени. Параметрическое возбуждение синусоидальным полем в системе перемещенных параметрических гармонических осцилляторов в пределе сильной и слабой пространственной связи описано в [29]. В работе

[32] исследовались неустойчивости и коллективные моды в глобально связанных слабо нелинейных генераторах, параметрически возбуждаемых синусоидальным сигналом. Используя метод усреднения, были получены уравнения для медленно меняющихся амплитуд. Анализ этих уравнений позволяет находить линейные неустойчивости, а также анализировать нелинейные режимы, развивающиеся из этих неустойчивостей. Аналитические результаты подтверждены численными экспериментами. Неустойчивости коллективных мод приводят к режиму бегущей волны, когда интенсивность колебаний каждого осциллятора периодически меняется во времени. При больших амплитудах возбуждения наблюдается замороженное состояние с практически равномерными интенсивностями колебаний. В работах [33–36] рассматривалось влияние внешнего шума на ансамбли осцилляторов, описываемых разными моделями.

В данной работе описываются вынужденные колебания и параметрическая неустойчивость цилиндрической капли при круговых вибрациях. Линия контакта свободная и не взаимодействует с подложками, между которых зажата капля. На основе полученных результатов изучается поведение ансамбля таких капель, взаимодействующих между собой.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 формулируется постановка задачи с используемыми приближениями и оценками. В разделе 3 исследуются вынужденные колебания капли под действием круговых вибраций. В разделе 4 формулируется задача исследования устойчивости вынужденных колебаний относительно малых возмущений. В разделе 5 описывается параметрическая неустойчивость вынужденных колебаний капли. В разделе 6 рассматривается ансамбль взаимодействующих капель.

## 2. Постановка задачи

Рассматриваются вынужденные колебания цилиндрической капли (или капиллярного моста) несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho_i^*$  и кинематической вязкостью  $\nu_i^*$ , окруженной другой жидкостью другой плотности  $\rho_e^*$  и кинематической вязкостью  $\nu_e^*$ , под действием круговых вибраций  $\mathbf{f}^* = (A^* \omega^{*2} \cos(\omega^* t^*) \mathbf{e}_x + B^* \omega^{*2} \sin(\omega^* t^*) \mathbf{e}_y)$  (рис. 1). Вся система в осевом направлении ограничена двумя параллельными твердыми плоскостями.

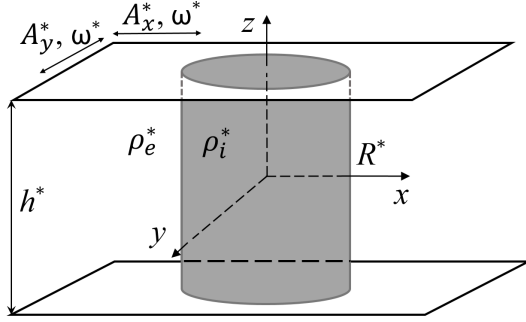


Рис. 1. Геометрия задачи

В отсутствие вынуждающей силы капля имеет форму круглого цилиндра радиуса  $R^*$ , равновесный краевой угол прямой. Будем предполагать только двухмерное движение в плоскости  $(x, y)$ , т.е. линии контакта двигаются свободно, не взаимодействуя с подложками. Следовательно, в процессе движения капля всегда имеет форму цилиндра, поперечное сечение которого меняется, а краевой угол постоянен и равен  $90^\circ$ . На боковой поверхности капли, т.е. деформированной поверхности раздела капли – внешняя жидкость, учитывается поверхностное натяжение  $\sigma^*$ .

Жидкости рассматриваются как идеальные, т.е. невязкие и несжимаемые. Для выполнения первого условия необходимо, чтобы выполнялось условие малости толщины вязкого пограничного слоя  $l^* = \sqrt{\nu_{i,e}^*/\omega_{x,y}^*} \ll R^*$ . Второе приближение о несжимаемости жидкостей выполняется при больших скоростях звука  $c^* \gg \omega_{x,y}^* R^*$ . Оценки, приведенные в работах [37, 38], показывают, что для капель радиуса  $R^* \sim 1$  мм эти приближения являются вполне оправданными.

Удобно ввести полярные координаты  $(r^*, \alpha)$ , в которых поверхность капли описывается соотношением  $r^* = R^* + \zeta^*(\alpha, t^*)$ , где  $\zeta^*(\alpha, t^*)$  – отклонение боковой поверхности капли от равновесного положения. Амплитуда колебаний капли мала по сравнению с равновесным радиусом  $R^*$ . Движение рассматриваем безвихревое, поэтому удобно ввести потенциалы скорости  $\mathbf{v}_{i,e} = \nabla \varphi_{i,e}$ . Выберем в качестве единиц измерения длины  $R^*$ , времени  $t_0$ , скорости  $v_0$ , плотности  $\rho_0$ , давления  $p_0$  и характерной амплитуды колебаний  $A_0$ , где

$$t_0 = \sqrt{(\rho_i^* + \rho_e^*)R^{*3}/\sigma^*},$$

$$v_0 = A_0 \sqrt{\sigma^*/((\rho_i^* + \rho_e^*)R^{*3})},$$

$$\rho_0 = \rho_i^* + \rho_e^*, \quad p_0 = A_0^2 \sigma^*/R^{*2}, \quad A_0 = A^* + B^*.$$

В безразмерных параметрах получаем следующую задачу:

$$\Delta \varphi_{i,e} = 0,$$

$$p_j = -\rho_j \left( \varphi_{jt} + \frac{1}{2} \varepsilon (\nabla \varphi_j)^2 + r \omega^2 (a \cos(\alpha) \cos(\omega t) + b \sin(\alpha) \sin(\omega t)) \right), \quad (1)$$

$$r = 1 + \varepsilon \zeta: [\varphi_n] = 0, \quad \varepsilon [p] = -\text{div} \mathbf{n},$$

$$\zeta_t = \nabla \varphi \nabla F,$$

$$r \rightarrow \infty: \varphi_e \rightarrow 0,$$

где  $\varepsilon = A_0/R \ll 1$  – характерная амплитуда вибраций,  $\rho_i = \rho_i^*/(\rho_e^* + \rho_i^*)$  – плотность жидкости в капле,  $\rho_e + \rho_i = 1$  – соотношение плотностей,  $\omega = \omega^* \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*)R^{*3}/\sigma^*}$  – частота вибраций,  $a = A^* A_0^{-1}$  и  $b = B^* A_0^{-1}$  – амплитуды вибраций.

### 3. Вынужденные колебания

Рассмотрим вынужденные колебания. Решение системы (1) будем искать в виде разложения в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$  – малой безразмерной амплитуде вибраций:

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varepsilon \varphi^{(1)} + \dots,$$

$$p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \dots,$$

$$\zeta = \zeta^{(0)} + \varepsilon \zeta^{(1)} + \dots$$

В нулевом порядке разложения получаем задачу:

$$\Delta \varphi^{(0)} = 0,$$

$$p_j = -\rho_j \left( \varphi_{jt}^{(0)} + \omega^2 r (a \cos(\alpha) \cos(\omega t) + b \sin(\alpha) \sin(\omega t)) \right), \quad (2)$$

$$r = 1: \quad [\varphi_r^{(0)}] = 0, \quad [p^{(0)}] = \zeta^{(0)} + \zeta_{\alpha\alpha}^{(0)},$$

$$\zeta_r^{(0)} = \varphi_r^{(0)},$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \varphi_e^{(0)} \rightarrow 0,$$

решение которой имеет вид

$$\varphi_i^{(0)} = r (C_i(t) \cos \alpha + S_i(t) \sin \alpha),$$

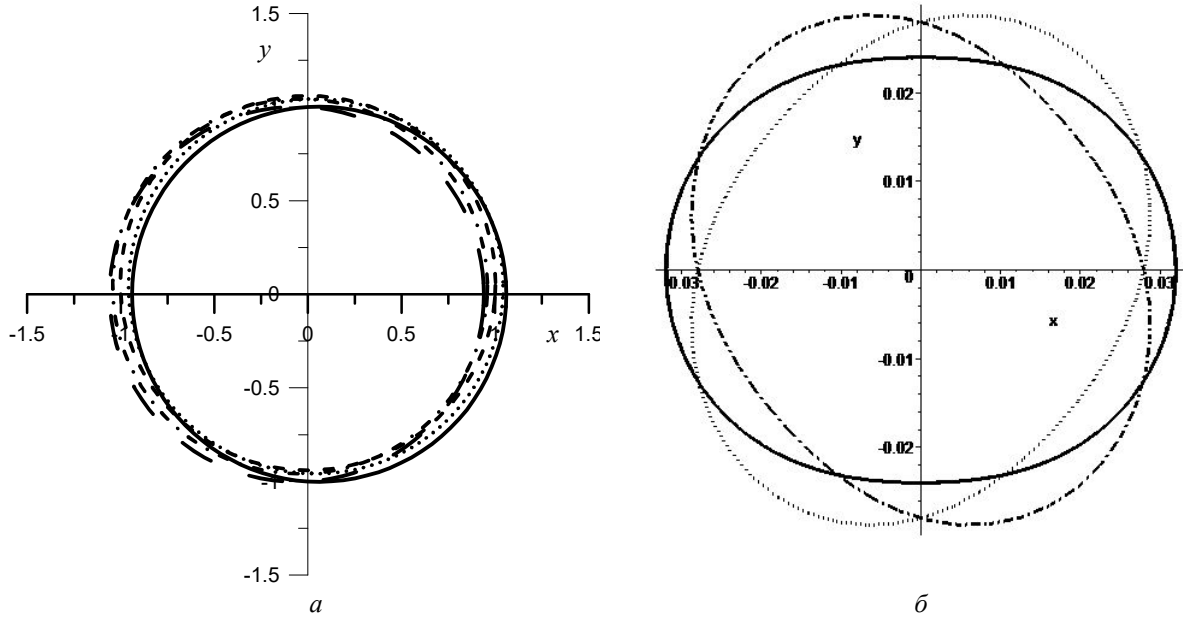
$$\varphi_e^{(0)} = -\frac{1}{r} (C_i(t) \cos \alpha + S_i(t) \sin \alpha),$$

$$\zeta^{(0)} = C(t) \cos \alpha + S(t) \sin \alpha, \quad (3)$$

$$C(t) = (\rho_i - \rho_e) a \cos \omega t,$$

$$S(t) = (\rho_i - \rho_e) b \sin \omega t.$$

Положение и форма поперечного сечения капли показаны на рис. 2, а. Из решения (3) следует, что форма этого сечения представляет собой окружность, центр которой двигается по эллиптической траектории. Система будет совершать твердотельное движение при равенстве плотностей  $\rho_i = \rho_e$ .



**Рис.2.** Форма линии контакта: а – в главном, б – в первом порядке разложения для различных фаз периода колебаний ( $\rho_i = 0.7$ ,  $a = b = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.3$ ).  $t = 0$  – сплошная,  $t = 0.125T$  – пунктирная,  $t = 0.25T$  – штриховая,  $t = 0.375T$  – штрихпунктирная,  $t = 0.5T$  – разомкнутая линии

В первом порядке получаем задачу

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^{(1)} &= 0, \quad p^{(1)} = -\rho \left( \varphi_r^{(1)} + \frac{1}{2} (\varphi_r^{(0)})^2 \right), \\ r = 1: \quad & \left[ \varphi_r^{(1)} + \varphi_{rr}^{(0)} \zeta^{(0)} - \varphi_{\alpha}^{(0)} \zeta_{\alpha}^{(0)} \right] = 0, \\ \zeta_r^{(1)} &= \varphi_r^{(1)} + \varphi_{rr}^{(0)} \zeta^{(0)} - \varphi_{\alpha}^{(0)} \zeta_{\alpha}^{(0)}, \\ \left[ p^{(1)} \right] + \left[ p_r^{(0)} \right] \zeta^{(0)} &= \zeta^{(1)} + \zeta_{\alpha\alpha}^{(1)} - \\ & - \left( \zeta^{(0)2} + \zeta^{(0)} \zeta_{\alpha\alpha}^{(0)} + \frac{1}{2} \zeta_{\alpha}^{(0)2} \right), \\ r \rightarrow \infty: \quad & \varphi_e^{(1)} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (4)$$

решение которой имеет вид

$$\varphi_i^{(1)} = a_0(t) + \frac{1}{2} r^2 (a_1(t) \cos 2\alpha + a_2(t) \sin 2\alpha), \quad (5)$$

$$\varphi_e^{(1)} = \frac{1}{2r^2} (b_1(t) \cos 2\alpha + b_2(t) \sin 2\alpha), \quad (6)$$

$$\zeta^{(1)} = c_0(t) + c_1(t) \cos 2\alpha + c_2(t) \sin 2\alpha, \quad (7)$$

$$\Omega_2^2 = 6, \quad \Pi^2 = (\rho_i - \rho_e)^2,$$

$$a_0(t) = \frac{\omega(\rho_i - 2\rho_e)}{4\rho_i} \Pi^2 (A^2 - B^2) \sin 2\omega t,$$

$$a_1(t) = -\frac{\rho_e \omega^3}{4\omega^2 - \Omega_2^2} \Pi^2 (A^2 + B^2) \sin 2\omega t,$$

$$a_2(t) = \frac{2\rho_e \omega^3}{4\omega^2 - \Omega_2^2} \Pi^2 AB \cos 2\omega t,$$

$$b_1(t) = -\frac{\omega(\omega^2(4 + \rho_e) - 6)}{4\omega^2 - \Omega_2^2} \Pi^2 (A^2 + B^2) \sin 2\omega t,$$

$$b_2(t) = \frac{2\omega(\omega^2(4 + \rho_e) - 6)}{4\omega^2 - \Omega_2^2} \Pi^2 AB \cos 2\omega t,$$

$$\begin{aligned} c_0(t) &= -\frac{1}{8} \Pi^2 (A^2 - B^2) \cos 2\omega t + \\ & + \frac{\rho_i}{2} \omega^2 \Pi^2 (A^2 + B^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{2\omega^2(1 + \rho_e) - 3}{4(4\omega^2 - \Omega_2^2)} \Pi^2 (A^2 + B^2) \cos 2\omega t + \\ & + \frac{1}{6} \left( \frac{3}{4} - \rho_e \omega^2 \right) \Pi^2 (A^2 - B^2), \end{aligned}$$

$$c_2(t) = \frac{\omega^2(2 + \rho_e) - 3}{4\omega^2 - \Omega_2^2} \Pi^2 AB \sin 2\omega t.$$

Здесь  $\Omega_m = \sqrt{m(m^2 - 1)}$  – частота  $m$ -й азимутальной моды собственных колебаний капли со свободной контактной линией [21]. Независимая от времени часть функции  $\zeta^{(1)}$  (7) описывает эффект изменения средней формы капли. Знаменатель  $4\omega^2 - \Omega_2^2$  демонстрирует наличие нелинейного резонанса, который происходит на половине собственной частоты квадрупольной азимутальной моды. Аналогичные эффекты были получены в работе [21] для линейных вибраций.

Динамическая форма капли (7) в первом порядке разложения показана на рис. 2, б. Независимо от соотношения плотностей имеет место эффект сжатия капли вдоль оси вибраций, что согласуется с результатами работы [21]. Учет взаимодействия

линии контакта с поверхностью пластин продемонстрировал принципиальную возможность вытягивания тяжелой капли, что согласуется с экспериментами.

#### 4. Устойчивость вынужденных колебаний

Рассмотрим устойчивость вынужденных колебаний, полученных выше, относительно малых возмущений. Введем возмущения основного течения в виде

$$\phi' = \phi + \varepsilon\psi, \quad p' = p + \varepsilon q, \quad \zeta' = \zeta + \varepsilon\xi,$$

где  $\phi', p', \zeta'$  – возмущенные поля,  $\phi, p, \zeta$  – основное решение,  $\psi, q, \xi$  – малые нестационарные возмущения

$$\psi = \psi^{(0)} + \varepsilon\psi^{(1)} + \dots, \quad q = q^{(0)} + \varepsilon q^{(1)} + \dots, \\ \xi = \xi^{(0)} + \varepsilon\xi^{(1)} + \dots$$

Подставляя возмущенные поля в исходную систему (1) и линеаризуя, получим для возмущений систему уравнений и граничных условий:

$$\Delta\psi = 0, \quad q = -\rho(\psi_t + \nabla\phi\nabla\psi), \\ r = 1: \quad [\psi_r] = 0, \\ [q] = \xi^{(0)} + \xi_{\alpha\alpha}^{(0)} - (\xi^{(1)} + \xi_{\alpha\alpha}^{(1)}) + \dots, \\ \xi_r^{(0)} = \nabla\psi\nabla F - \nabla\phi\nabla\xi, \\ r \rightarrow \infty: \quad \psi \rightarrow 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (1 + 2\varepsilon\xi + \varepsilon^2\xi^2)\xi \cos\alpha d\alpha = 0, \\ \int_0^{2\pi} \xi d\alpha = -\varepsilon \int_0^{2\pi} \xi\xi d\alpha.$$

Решение этой задачи будем искать методом многих масштабов:

$$\psi_i = \sum_m S_{1m} r^m e^{im\alpha} e^{i\Omega_m t}, \quad \psi_e = \sum_m S_{2m} \frac{1}{r^m} e^{im\alpha} e^{i\Omega_m t}, \\ \xi = \sum_m T_m e^{im\alpha} e^{i\Omega_m t}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \dots,$$

где  $m$  – номер моды собственных колебаний.

Таким образом, в нулевом порядке разложения получаем задачу

$$\Delta\psi^{(0)} = 0, \quad q^{(0)} = -\rho\psi_r^{(0)}, \\ r = 1: \quad [\psi_r^{(0)}] = 0, \\ [q^{(0)}] = \xi^{(0)} + \xi_{\alpha\alpha}^{(0)}, \quad \xi_r^{(0)} = \psi_r^{(0)}, \\ r \rightarrow \infty: \quad \psi_e^{(0)} \rightarrow 0,$$

решение которой имеет вид

$$\psi_i^{(0)} = \sum_m \frac{i\Omega_m}{m} A_m(t_1, \dots) r^m e^{im\alpha} e^{i\Omega_m t_0} + c.c., \\ \psi_e^{(0)} = -\sum_m \frac{i\Omega_m}{m} A_m(t_1, \dots) \frac{1}{r^m} e^{im\alpha} e^{i\Omega_m t_0} + c.c., \\ \xi^{(0)} = \sum_m A_m(t_1, \dots) e^{im\alpha} e^{i\Omega_m t_0} + c.c.$$

Собственные частоты колебаний капли являются решением задачи в нулевом порядке и представляют собой выражение  $\Omega_m^2 = m(m^2 - 1)$ , как указывалось выше. В случае монохроматических вибраций резонансное нарастание амплитуды происходит при частоте, которая вдвое меньше наименьшей частоты собственных колебаний.

В первом порядке получаем следующую задачу:

$$\Delta\psi^{(1)} = 0, \quad q^{(1)} = -\rho(\psi_{r_0}^{(1)} + \psi_{r_1}^{(0)}) - \rho\nabla\psi^{(0)}\nabla\phi^{(0)}, \\ r = 1: \quad [\psi_r^{(1)}] + \zeta^{(0)}[\psi_{rr}^{(0)}] + \xi^{(0)}[\phi_{rr}^{(0)}] - \\ - \zeta_{\alpha}^{(0)}[\psi_{\alpha}^{(0)}] - \xi_{\alpha}^{(0)}[\phi_{\alpha}^{(0)}] = 0, \\ \xi_{r_0}^{(1)} + \xi_{r_1}^{(0)} = \\ = \psi_r^{(1)} + \zeta^{(0)}\psi_{rr}^{(0)} + \xi^{(0)}\phi_{rr}^{(0)} - \zeta_{\alpha}^{(0)}\psi_{\alpha}^{(0)} - \xi_{\alpha}^{(0)}\phi_{\alpha}^{(0)}, \\ [q^{(1)}] + \xi^{(0)}[p_r^{(0)}] + \zeta^{(0)}[q_r^{(0)}] = \\ = \xi^{(1)} + \xi_{\alpha\alpha}^{(1)} - 2\zeta^{(0)}\xi_{\alpha\alpha}^{(0)} - \zeta_{\alpha}^{(0)}\xi_{\alpha}^{(0)}, \\ r \rightarrow \infty: \quad \psi^{(1)} \rightarrow 0.$$

При монохроматическом вибрационном воздействии параметрическая неустойчивость для главных резонансов появляется при выполнении условия синхронизма  $\omega = \Omega_m + \Omega_{m\pm 1}$ . Чтобы описать близость внешних частот к сумме  $\omega = \Omega_m + \Omega_{m+1}$  количественно, введем параметр расстройки  $\omega - \Omega_m - \Omega_{m+1} = \varepsilon\gamma$ .

#### 5. Параметрический резонанс

При решении системы первого порядка для возмущений уничтожение секулярных слагаемых дает дифференциальные уравнения для амплитуд с учетом расстройки частоты  $\gamma$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial A_m}{\partial t_1} + i\gamma A_m = K_1 A_{m+1}^*, \\ \frac{\partial A_{m+1}^*}{\partial t_1} - i\gamma A_{m+1}^* = K_2 A_m, \end{cases} \\ K_1 = -i \frac{m\rho_e(\rho_i - \rho_e)\omega}{2} (A+B), \\ K_2 = -i \frac{(m+1)\rho_e(\rho_i - \rho_e)\omega}{2\Omega_{m+1}} \Omega_m (A+B).$$

Решение для амплитуд  $A_m$  и  $A_{m+1}^*$  ищем в виде  $\exp(\lambda t_1)$  и получаем решение для инкремента  $\lambda$ :

$$\lambda^2 = \gamma^2 + K_1 K_2.$$

Вид нейтральной кривой  $\varepsilon(\omega)$  определяется выражением  $\omega = \Omega_m + \Omega_{m+1} \pm \varepsilon \sqrt{K_1 K_2}$  и представлен на рис. 3.

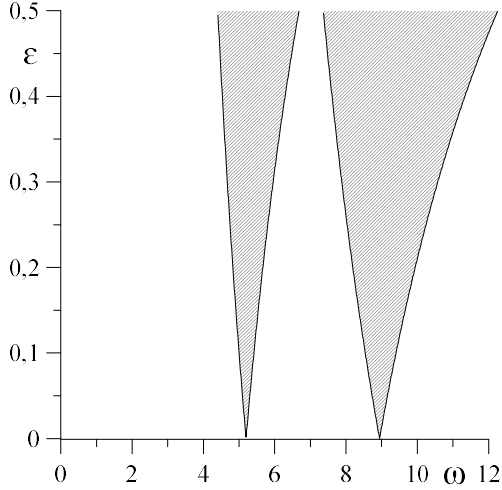


Рис. 3. Области параметрического резонанса для  $t=3$  и  $t=4$

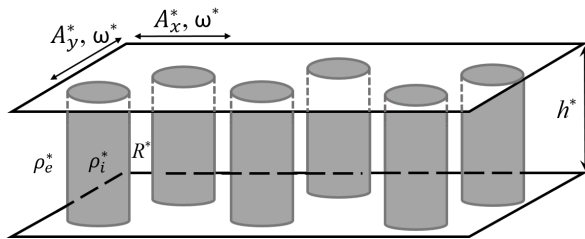
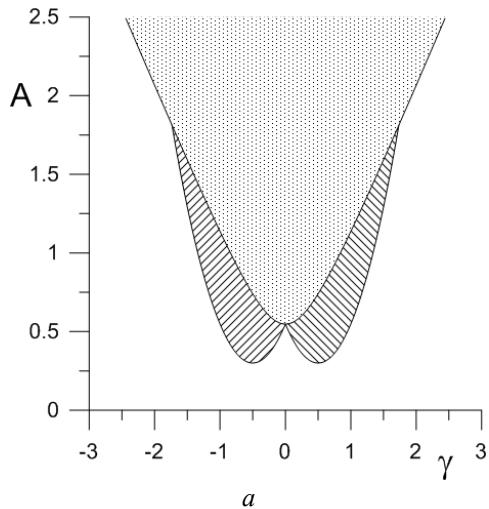


Рис. 4. Геометрия ансамбля капель



### 6. Ансамбль капель

Рассмотрим ансамбль, состоящий из  $N$  числа взаимодействующих капель (рис. 4). Мы предполагаем, что параметры осцилляторов в ансамбле одинаковы, но параметрическое возбуждение имеет разные фазы  $\tau$  для разных осцилляторов. По аналогии с рассмотренными выше вынужденными колебаниями одиночной капли запишем систему уравнений для ансамбля взаимодействующих капель с учетом трения и нелинейных слагаемых для амплитуд двух соседних азимутальных мод при параметрическом возбуждении:

$$\frac{\partial a_m^j}{\partial t} = A e^{-i\tau_j} a_{m+1}^j - r_m a_m^j - i\omega a_m^j + i\alpha_m a_m^j |a_m^j|^2 + i\beta_m a_m^j |a_{m+1}^j|^2 - i\kappa_m \langle a_m \rangle, \quad (8)$$

$$\frac{\partial a_{m+1}^j}{\partial t} = A e^{i\tau_j} a_m^j - r_{m+1} a_{m+1}^j + i\omega a_{m+1}^j + i\alpha_{m+1} a_{m+1}^j |a_{m+1}^j|^2 + i\beta_{m+1} a_{m+1}^j |a_m^j|^2 - i\kappa_{m+1} \langle a_{m+1} \rangle, \quad (9)$$

$$\tau_j = \frac{2\pi}{N} j, \quad j = 1..N, \quad |\kappa_{m+1}| \ll |\kappa_m|,$$

$$\langle a_m \rangle = \sum_{j=1}^N a_m^j = \sum_j \text{Re}(a_m^j) + i \sum_j \text{Im}(a_m^j),$$

где  $j$  – номер капли,  $r_m$  – коэффициент трения,  $A$  – амплитуда,  $\tau_j$  – сдвиг фазы,  $\omega$  – частота внешнего воздействия,  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  – коэффициенты, характеризующие консервативное взаимодействие,  $\kappa_m$  – параметр взаимодействия капли с ансамблем. Мы предполагаем, что фазы возбуждения  $\tau_j$  распределены равномерно на отрезке  $[0, 2\pi)$ .

При исследовании линейной неустойчивости

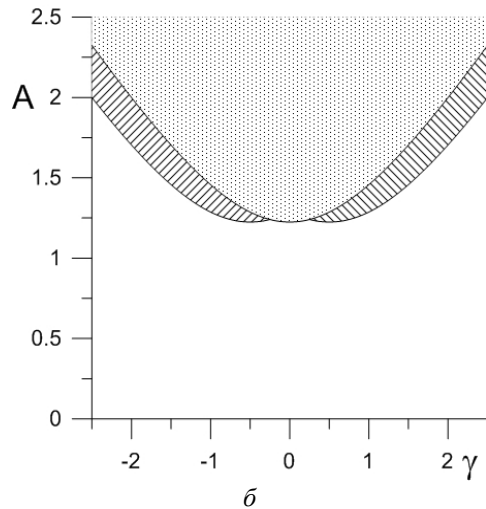


Рис. 5. Области параметрического резонанса ансамбля капель: а –  $r_m = 0.5, r_{m+1} = 0.6, \kappa = 1$ ; б –  $r_m = 2.5, r_{m+1} = 0.6, \kappa = 1$

удобно переписать уравнения (8), (9) в терминах «пространственных» гармоник, т.е. перейдем в Фурье-пространство:

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_m(\tau) e^{-ik\tau} d\tau,$$

$$B_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{m+1}(\tau) e^{-ik\tau} d\tau.$$

Следовательно, система (8), (9) для коэффициентов Фурье принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{C}_0 = (-r_m - i(\gamma + \kappa))C_0 + AB_1, \\ \dot{B}_1 = (-r_{m+1} + i\gamma)B_1 + AC_0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dot{C}_{-1} = (-r_m - i\gamma)C_{-1} + AB_0, \\ \dot{B}_0 = (-r_{m+1} + i(\gamma + \kappa))B_0 + AC_{-1}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \dot{C}_{k-1} = (-r_m - i\gamma)C_{k-1} + AB_k, \\ \dot{B}_k = (-r_{m+1} + i\gamma)B_k + AC_{k-1}. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь введена расстройка частоты  $\gamma = \omega - \Omega_m - \Omega_{m+1}$ . Отметим, что вся система распадается на пары связанных гармоник  $k \leftrightarrow k-1$ . Более того, уравнения для всех пар с  $k \neq 0$  одинаковы, а для  $k = 0$  мы имеем дополнительный член из-за связи среднего поля. Другими словами,  $\langle a_m \rangle = C_0$  и  $\langle a_{m+1} \rangle = B_0$ .

Система (10)–(12) описывает три области неустойчивости, отдельные для каждой пары, и собственные значения  $\lambda$  для  $C_k$ ,  $B_k \sim e^{\lambda t}$  определяются следующим образом, соответственно:

$$\lambda = -\frac{1}{2}(r_m + r_{m+1} \mp i\kappa_m) \pm \frac{1}{2} \left( (r_{m+1} - r_m)^2 + 4A^2 - (2\gamma + \kappa_m)^2 \pm 2i(2\gamma + \kappa_m)(r_{m+1} - r_m) \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}(r_m + r_{m+1} \pm i\kappa_{m+1}) \pm \frac{1}{2} \left( (r_m - r_{m+1})^2 + 4A^2 - (2\gamma - \kappa_{m+1})^2 \pm 2i(2\gamma - \kappa_{m+1})(r_m - r_{m+1}) \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}(r_m + r_{m+1}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{4A^2 + (r_{m+1} - r_m \pm 2i\gamma)^2}.$$

Области неустойчивости показаны на рис. 5. Из представленных графиков видно, что в некоторых случаях неустойчивость для первых двух пар  $C_0$ ,  $B_1$  (10) и  $C_{-1}$ ,  $B_0$  (11) (т.е. для  $k = 0$ ) возникает раньше, чем для остальных гармоник (12) ( $k \neq 0$ ).

## 7. Заключение

Рассмотрены вынужденные колебания цилиндрической капли в поле круговых вибраций. Построена динамическая форма капли. Обнаружено

явление нелинейного резонанса на удвоенной частоте внешнего воздействия для квадрупольной моды. Получена система амплитудных уравнений для возмущений и исследована параметрическая неустойчивость вынужденных колебаний одиночной капли.

По аналогии написана система уравнений для исследования параметрической неустойчивости для произвольной капли в ансамбле взаимодействующих капель. Построены области неустойчивости как для взаимодействующих мод, так и для мод более высокого порядка. Показано, что в случае ненулевого взаимодействия нижние моды более опасны при наличии расстройки частоты.

Добавим, что в рассматриваемом случае ансамбля капель невозможны осредненные корпоративные эффекты взаимодействия частиц в вибрационном поле, аналогичные, например, описанным в [39]. В таких случаях важно взаимодействие частиц со стенками сосуда (границами области), влиянием которых мы пренебрегаем.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-42-04120.

## Список литературы

1. *Faraday M.* On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces // *Philos. Trans. R. Soc. London.* 1831. Vol. 121. P. 319–340.
2. *Dowling A. P., Morgans A. S.* Feedback control of combustion oscillations // *Annual Review of Fluid Mechanics.* 2005. Vol. 37. P. 151–182.
3. *Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V.* Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop // *Phys. Fluids.* 2009. Vol. 21, 072104.
4. *Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V., Shklyayev S.* Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis // *Phys. Fluids.* 2011. Vol. 23, 102105.
5. *Иванцов А. О.* Акустические колебания полусферической капли // *Вестник Пермского университета. Серия: Физика.* 2012. Вып. 3 (21). С. 16–23.
6. *Клименко Л. С., Любимов Д. В.* Генерация среднего течения пульсационным потоком около искривленной свободной поверхности // *Изв. РАН. МЖГ.* 2012. № 1. С. 33–43.
7. *Ern P., Risso F., Fabre D., Magnaudet J.* Wake-induced oscillatory paths of bodies freely rising or falling in fluids // *Annual Review of Fluid Mechanics.* 2012. Vol. 44. P. 97–121.
8. *Klimenko L. S., Lyubimov D. V.* Surfactant effect on the average flow generation near curved interface // *Microgravity Science and Technology.* 2018. Vol. 30. Iss. 1–2. P. 77–84.
9. *Juniper M. P., Sujith R. I.* Sensitivity and nonlinearity of thermoacoustic oscillations // *Annual Re-*

- view of Fluid Mechanics. 2018. Vol. 50. P. 661–689.
10. Volodin I. V., Alabuzhev A. A. Influence of longitudinal vibrations of the pulsation fields of long-wave Marangoni convection in thin film // AIP Conf. Proc. 2020. Vol. 2312, 050028
  11. Манделъштам Л. И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
  12. Картавых Н. Н., Шкляев С. В. О параметрическом резонансе полуцилиндрической капли на осциллирующей твердой подложке // Вестник Пермского университета. 2007. № 1 (6). С. 23–28.
  13. Pucci G., Ben Amar M., Couder Y. Faraday instability in floating drops // Phys. Fluids. 2016. Vol. 27, 091107.
  14. Alabuzhev A. A. Oscillations and parametric instability of a cylindrical drop of a low-viscous liquid // J. Fluid Mech. Res. 2019. Vol. 46. P. 441–457.
  15. Неволин В. Г. Параметрическое возбуждение поверхностных волн // Инженерно-физический журнал. 1985. Т. 47. С. 1028–1042.
  16. Miles J., Henderson D. Parametrically forced surface waves // Annu. Rev. Fluid Mech. 1990. Vol. 22. P. 143–165.
  17. Любимов Д. В., Хеннер М. В., Шоц М. М. Об устойчивости поверхности раздела жидкостей при касательных вибрациях // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 3. С. 25–31.
  18. Pototsky A., Bestehorn M. Faraday instability of a two-layer liquid film with a free upper surface // Phys. Rev. Fluids. 2016. Vol. 1, 023901.
  19. Bestehorn M., Pototsky A. Faraday instability and nonlinear pattern formation of a two-layer system: A reduced model // Phys. Rev. Fluids. 2016. Vol. 1, 063905.
  20. Koshel K. V., Ryzhov E. A., Carton X. J. Vortex interactions subjected to deformation flows: a review // Fluids. 2019. Vol. 4, 14.
  21. Алабужев А. А., Любимов Д. В. Поведение цилиндрической капли при многочастотных вибрациях // Известия РАН. МЖГ. 2005. № 2. С. 18–28.
  22. Коновалов В. В. Влияние вибраций на поведение пузырей и капель: дис. на соиск. учён. степ. к.ф.-м.н. Пермь: Изд-во ИМСС УрО РАН, 2003. 115 с.
  23. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer, 1984. 158 p.
  24. Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
  25. Афраймович В. С., Некоркин В. И., Осипов Г. В., Шалфеев В. Д. Устойчивость структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации // Горький: изд-во ИПФ РАН СССР, 1989. 256 с.
  26. Bena I., Van den Broeck C. Coupled parametric oscillators // Europhys. Lett. 1999. Vol. 48 P. 498–504.
  27. Copelli M., Lindenberg K. Phase-induced stability in a parametric dimer // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63, 036605.
  28. Bena I., Van den Broeck C., Kawai R., Copelli M., Lindenberg K. Collective behavior of parametric oscillators // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65, 036611.
  29. Farago J., Van den Broeck C. Parametric phase transition in one dimension // Eur. Phys. Letters. 2001. Vol. 54. P. 411–416.
  30. Nichols S., Wiesenfeld K. Forbidden bifurcations and parametric amplification in a Josephson-junction array // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48. P. 2569–2574.
  31. Goldobin D. S., Klimenko L. S. Resonances and multistability in a Josephson junction connected to a resonator // Phys. Rev. E. 2018. Vol. 97, 022203.
  32. Goldobin D., Pikovskiy A. Collective modes in parametrically excited oscillator arrays // Eur. Phys. Lett. 2002. V. 59. P. 193–198.
  33. Долматова А. В., Голдобин Д. С., Пиковский А. С. Притяжение и отталкивание частот при синхронизации связанных активных ротаторов общим шумом // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27. № 6. С. 91–112.
  34. Долматова А. В., Голдобин Д. С. Обрывание и замыкание разложений по круговым кумулянтам // Вестник Пермского университета. Физика. 2020. № 2. С. 5–9.
  35. Голдобин Д. С., Тюлькина И. В., Клименко Л. С., Пиковский А. К описанию коллективной динамики в ансамблях реальных осцилляторов // Вестник Пермского университета. Физика. 2018. № 3 (41). С. 5–7.
  36. Долматова А. В., Тюлькина И. В., Голдобин Д. С. Описание макроскопической динамики популяций фазовых элементов с белым негауссовым шумом на основе подхода круговых кумулянтов // Вестник Пермского университета. Физика. 2021. № 3. С. 5–12.
  37. Алабужев А. А. Трансляционные колебания цилиндрической капли в ограниченном объеме жидкости // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. С. 453–465.
  38. Алабужев А. А. О влиянии внутреннего давления на колебания цилиндрического газового пузырька // Вестник Пермского университета. Физика. 2020. № 4. С. 51–62.
  39. Байдин А. Ю., Любимов Д. В. Динамика частиц в жидкости под действием поляризованных по кругу высокочастотных вибраций // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2011. Вып. 3(18). С. 69–75.

## References

1. Faraday M. On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces. *Philos. Trans. R. Soc. London*, 1831, vol. 121, pp. 319–340.



2. Dowling A. P., Morgans A. S. Feedback control of combustion oscillations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2005, vol. 37, pp. 151–182.
3. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V. Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop. *Physics of Fluids*, 2009, vol. 21, 072104.
4. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V., Shklyayev S. Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis. *Phys. Fluids*, 2011, vol. 23, 102105.
5. Ivantsov A. O. Acoustic oscillations of semispherical drop. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2012, no. 3(21), pp. 16–23 (In Russian).
6. Klimenko L. S., Lyubimov D. V. Generation of an average flow by a pulsating stream near a curved free surface. *Fluid Dynamics*, 2012, vol. 47 (1), pp. 26–36.
7. Ern P., Risso F., Fabre D., Magnaudet J. Wake-induced oscillatory paths of bodies freely rising or falling in fluids. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2012, vol. 44, pp. 97–121.
8. Klimenko L. S., Lyubimov D. V. Surfactant effect on the average flow generation near curved interface. *Microgravity Science and Technology*, 2018, vol. 30, no. 1–2, pp. 77–84.
9. Juniper M. P., Sujith R. I. Sensitivity and nonlinearity of thermoacoustic oscillations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2018, vol. 50, pp. 661–689.
10. Volodin I. V., Alabuzhev A. A. Influence of longitudinal vibrations of the pulsation fields of long-wave Marangoni convection in thin film. *AIP Conf. Proc.*, 2020, vol. 2312, 050028.
11. Mandelstam L. I. Lektsii po teorii kolebanii [Lectures on the Theory of Oscillations]. *Moscow: Nauka*, 1972. 470 p. (In Russian).
12. Kartavykh N. N., Shklyayev S. V. O parametricheskom rezonanse polutsilindricheskoi kapli na ostsilliruiushchei tverdoi podlozhke [On the parametric resonance of a semi-cylindrical drop on an oscillating solid substrate]. *Bulletin of Perm University*, 2007, no. 1 (6), pp. 23–28. (In Russian).
13. Pucci G., Ben Amar M., Couder Y. Faraday instability in floating drops. *Phys. Fluids*, 2016, vol. 27, 091107.
14. Alabuzhev A. A. Oscillations and parametric instability of a cylindrical drop of a low-viscous liquid. *J. Fluid Mech. Res.*, 2019, vol. 46, pp. 441–457.
15. Nevolin V. G. Parametric excitation of surface waves. *Journal of Engineering Physics*, 1984, vol. 47, pp. 1482–1494.
16. Miles J., Henderson D. Parametrically forced surface waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1990, vol. 22, pp. 143–165.
17. Lyubimov D. V., Khennner M. V., Shotz M. M. Stability of a fluid interface under tangential vibrations. *Fluid Dynamics*, 1998, vol. 33, pp. 318–323.
18. Pototsky A., Bestehorn M. Faraday instability of a two-layer liquid film with a free upper surface. *Phys. Rev. Fluids*, 2016, vol. 1, 023901.
19. Bestehorn M., Pototsky A. Faraday instability and nonlinear pattern formation of a two-layer system: A reduced model. *Phys. Rev. Fluids*, 2016, vol. 1, 063905.
20. Koshel K. V., Ryzhov E. A., Carton X. J. Vortex interactions subjected to deformation flows: a review. *Fluids*, 2019, vol. 4, 14.
21. Alabuzhev A. A., Lyubimov D. V. Behavior of a cylindrical drop under multi-frequency vibration. *Fluid Dynamics*, 2005, vol. 40 (2), pp. 183–192.
22. Konovalov V. V. *Vliyaniye vibratsiy na povedeniye puzyrey i kapel'* [Influence of vibrations on the behavior of bubbles and drops]. Cand. phys. and math. sci. thesis. Perm: ICM UB RAS, 2003, 115 p. (In Russian).
23. Kuramoto Y. *Chemical oscillations, Waves and Turbulence*. Berlin: Springer, 1984. 158 p.
24. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization: a Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001, 412 p.
25. Afraimovich V. S., Nekorkin V. I., Osipov G. V., Shalfeev V. D. *Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks*. Singapore: World Scientific, 1995. 260 p.
26. Bena I., Van den Broeck C. Coupled parametric oscillators. *Europhys. Lett.*, 1999, vol. 48, pp. 498–504.
27. Copelli M., Lindenberg K. Phase-induced stability in a parametric dimer. *Phys. Rev. E*, 2001, vol. 63, 036605.
28. Bena I., Van den Broeck C., Kawai R., Copelli M., Lindenberg K. Collective behavior of parametric oscillators. *Phys. Rev. E* 2002, vol. 65, 036611.
29. Farago J., Van den Broeck C. Parametric phase transition in one dimension. *EPL*. 2001, vol. 54, pp. 411–416.
30. Nichols S., Wiesenfeld K. Forbidden bifurcations and parametric amplification in a Josephson-junction array. *Phys. Rev. E*, 1993, vol. 48, pp. 2569–2574.
31. Goldobin D. S., Klimenko L. S. Resonances and multistability in a Josephson junction connected to a resonator. *Phys. Rev. E*, 2018, vol. 97, 022203.
32. Goldobin D., Pikovsky A. Collective modes in parametrically excited oscillator arrays. *Europhys. Lett.*, 2002, vol. 59, pp. 193–198.
33. Dolmatova A. V., Goldobin D. S., Pikovsky A. S. Frequency entrainment and anti-entrainment of coupled active rotators synchronized by common noise. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 6, pp. 91–112 (In Russian).

34. Dolmatova A. V., Goldobin D. S. Truncation and closure of circular cumulant series. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2020, no. 2, pp. 5–9.
35. Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovskiy A. Towards the description of collective dynamics in ensembles of real oscillators. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2018, no. 3 (41), pp. 5–7.
36. Dolmatova A. V., Tyulkina I. V., Goldobin D. S. Description of the macroscopic dynamics of populations of phase elements with white non-Gaussian noise based on the circular cumulant approach. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2021, no. 3, pp. 05–12.
37. Alabuzhev A. A. Translational oscillations of a cylindrical drop in a bounded volume of fluid. *Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 453–465 (In Russian).
38. Alabuzhev A. A. Effect of the internal pressure on oscillations of a cylindrical gas bubble. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2020, no. 4, pp. 51–62.
39. Baydin A. Y., Lyubimov D. V. Particle dynamic under high frequency circularly polarized vibrations. *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2011, no. 3 (18), pp. 69–75.

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Алабузhev A. A., Пьянкова M. A. Параметрическая неустойчивость одиночной капли и ансамбля капель при круговых вибрациях // Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 3. С. 56–65. doi: 10.17072/1994-3598-2022-3-56-65

**Please cite this article in English as:**

Alabuzhev A. A., Pyankova M. A. Parametric instability of a single drop and an ensemble of drops under circular vibrations. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2022, no. 3, pp. 56–65. doi: 10.17072/1994-3598-2022-3-56-65

**Сведения об авторах**

1. Алексей Анатольевич Алабузhev, канд. физ.-мат. наук, доц., с.н.с., Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013; профессор кафедры теоретической физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614990.
2. Марина Анатольевна Пьянкова, аспирант, инженер-исследователь, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013.

**Author information**

1. Alexey A. Alabuzhev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia; Professor, Department of Theoretical Physics, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
2. Marina A. Pyankova, Postgraduate Student, Research Engineer, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia