

УДК 532.5.013.4  
PACS 47.10.ad, 47.20.-k, 47.65.-d

## Устойчивость адвективного течения во вращающемся слое проводящей жидкости, помещенной в постоянное однородное магнитное поле

К. Г. Шварц

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь  
kosch@psu.ru

Представлено точное решение уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска. Оно описывает адвективное течение в плоском вращающемся слое несжимаемой проводящей жидкости, на горизонтальных границах которого задано линейное распределение температуры. Ось вращения перпендикулярна слою жидкости. Слой помещен в постоянное однородное магнитное поле, ориентированное противоположно силе тяжести. Исследуется поведение скорости и температуры течения в зависимости от числа Тейлора и Гартмана. В рамках линейной теории исследуется устойчивость адвективного течения на нормальные возмущения с помощью нового численного метода. Задача сводится к одномерной системе уравнений в частных производных с неизвестными функциями, зависящими от времени и вертикальной координаты, которая решается с помощью метода сеток. Расчеты показали, что слабое магнитное поле повышает устойчивость течения, не меняя колебательный характер неустойчивости. В рамках нелинейной постановки задачи численно изучаются конечно-амплитудные возмущения в надкритической области вблизи минимумов нейтральных кривых. Расчеты показали, что вблизи верхней и нижней границ слоя возникают движущиеся в противоположных направлениях тепловые пятна. Формируется вблизи горизонтальных границ слоя система бегущих винтообразных вихрей, возникающих в области с неустойчивой температурной стратификацией. Возмущение напряженности магнитного поля имеет спиральную форму.

**Ключевые слова:** адвективное течение; проводящая жидкость; магнитное поле; устойчивость

*Поступила в редакцию 14.06.2022; после рецензии 07.07.2022; принята к опубликованию 20.07.2022*

## Stability of advective flow in a rotating layer of a conducting fluid placed in a permanent uniform magnetic field

K. G. Shvarts

Perm State University, Perm, Russia  
kosch@psu.ru

An exact solution of the Navier-Stokes equations in the Boussinesq approximation is presented. It describes advective flow in a flat rotating layer of an incompressible conducting fluid, on the horizontal boundaries of which a linear temperature distribution is set. The rotation axis is perpendicular to the fluid layer. The layer is placed in a constant homogeneous magnetic field oriented opposite to the force of gravity. The behavior of the flow velocity and temperature depending on the

Taylor and Hartmann numbers is investigated. The stability of advective flow under normal perturbations is investigated within the framework of linear theory using a new numerical method. The problem is reduced to a one-dimensional system of partial differential equations with unknown functions depending on time and the vertical coordinate, which is solved using the grid method. Calculations have shown that a weak magnetic field increases the stability of the flow without changing the oscillatory character of instability. For the nonlinear formulation of the problem, the finite-amplitude perturbations in the supercritical region near the minima of neutral curves are studied numerically. Calculations have shown that thermal spots moving in opposite directions appear near the upper and lower boundaries of the layer. Near the horizontal boundaries of the layer forms a system of running helical vortices, arising in the region with unstable temperature stratification. The magnetic field strength perturbation has a spiral shape.

**Keywords:** advective flow; conducting fluid; magnetic field; stability

Received 14 June 2022; revised 07 July 2022; accepted 20 July 2022

doi: 10.17072/1994-3598-2022-3-12-20

## 1. Введение

Устойчивость плоскопараллельных адвективных течений, возникающих в горизонтальном слое жидкости с твердыми границами под действием горизонтального градиента температуры при отсутствии вращения, изучается довольно интенсивно [1–3]. В последние годы активно исследовалось влияние вращения на устойчивость адвективных течений [4]. Для вращающегося с постоянной угловой скоростью слоя жидкости был разработан конечно-разностный метод, сводящий задачу изучения устойчивости к системе одномерных уравнений в частных производных для функции тока, вихря скорости и температуры [5, 6].

Имеются работы по изучению влияния магнитного поля на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое при отсутствии вращения. Так, в [7] исследована устойчивость течения проводящей жидкости в слабом поперечном магнитном поле. Показано, что магнитное поле резко повышает устойчивость потока, не меняя характер нейтральной кривой. В [8] представлено адвективное течение, формирующееся в вертикальном магнитном поле, исследуется устойчивость течения. В [9] рассматривается электропроводящая жидкость в магнитном поле. Исследована устойчивость адвективного течения феррожидкости [10]. Изучено возникновение колебательной неустойчивости адвективного течения проводящей жидкости в горизонтальном цилиндре кругового сечения в присутствии вращающегося магнитного поля [11]. Проведено исследование устойчивости проводящей жидкости в трехмерной постановке [12].

В данной работе исследуется устойчивость течения в плоском горизонтальном вращающемся слое проводящей жидкости, помещённой в однородное постоянное магнитное поле, ориентированное противоположно силе тяжести.

## 2. Математическая модель

Рассмотрим бесконечный плоский горизонтальный вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\Omega_0$  слой несжимаемой жидкости толщиной  $2h$  с твердыми границами, помещенный в однородное магнитное поле, ориентированное противоположно силе тяжести. На границах слоя задано линейное распределение температуры. Ось вращения совпадает с вертикальной осью (рис.1). Движение жидкости описывается уравнениями конвекции в приближении Буссинеска [6, 13] в декартовой системе координат  $Oxyz$  ( $z$  – вертикальная,  $x, y$  – горизонтальные координаты). Выбрав в качестве единиц измерения длины, времени, скорости, температуры, давления и поля:  $h, h^2/\nu, g\beta Ah^3/\nu, Ah, \rho_0 g\beta Ah^3$  и  $H_0$  – постоянная величина (где  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho_0$  – средняя плотность), получим исходные уравнения в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \sqrt{Ta}(\mathbf{i}_z \times \mathbf{v}) = \\ = -\nabla\left(p + \frac{1}{2}Ha^2\mathbf{H}^2\right) + \Delta\mathbf{v} + GrT\mathbf{i}_z + \\ + Ha^2(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H} - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{Bt}\Delta\mathbf{H}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \frac{1}{Pr}\Delta T + S(\text{rot } \mathbf{H})^2 \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (4)$$

$$\rho = \rho_0(1 - \beta T), \quad (5)$$

где  $Ta$  – число Тейлора,  $Gr$  – число Грасгофа,  $Pr$  – число Прандтля,  $Ha$  – число Гартмана,  $Bt$  – число Бетчелора:

$$Ta = \left( \frac{2\Omega_0 h^2}{\nu} \right)^2, \quad Gr = \frac{g\beta Ah}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi},$$

$$Ha = \frac{H_0 h}{\nu} \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad Bt = \frac{\nu}{\nu_m}, \quad S = \frac{\chi_m H_0^2}{\nu Ah}.$$

Здесь  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$  – напряженность магнитного поля,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  – вектор скорости,  $p$  – давление,  $\mathbf{i}_z$  – орт-вектор вертикальной оси  $z$ ,  $T$  – температура,  $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$  – коэффициент магнитной вязкости,  $c$  – скорость света,  $\sigma$  – электропроводность жидкости,  $\chi_m = \nu_m / c_p$ .

Границы слоя ферромагнитные и твердые:

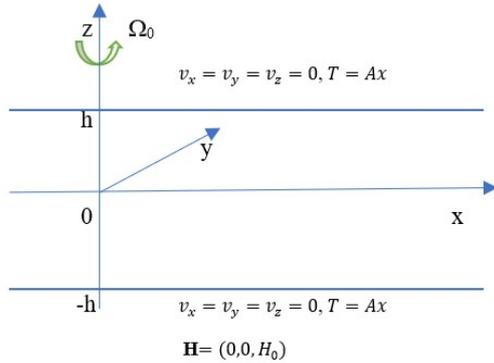
$$z = \pm 1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{H} = (0, 0, 1), \quad T = x. \quad (6)$$

Напряженность магнитного поля, скорость и температура представляются в виде (см. рис. 1):

$$\mathbf{H} = (H_x(z), H_y(z), 1),$$

$$\mathbf{v} = (u_0(z), v_0(z), 0),$$

$$T = x + \tau_0(z).$$



**Рис. 1** Схематическое изображение постановки задачи

При заданных условиях формируется стационарное адвективное течение [6]:

$$M(z) = \frac{Gr}{\lambda_m^2} \left[ z - \frac{\text{sh } \lambda_m z}{\text{sh } \lambda_m} \right],$$

$$N(z) = -Bt \frac{Gr}{\lambda_m^2} \left[ \frac{z^2 - 1}{2} - \frac{\text{ch } \lambda_m z - \text{ch } \lambda_m}{\lambda_m \text{sh } \lambda_m} \right], \quad (7)$$

$$\tau_0(z) = Pr Gr Re \tau_{01}(z) + Pr S Bt^2 \tau_{02}(z),$$

где введены комплекснозначные функции  $M(z) = u_0(z) + iv_0(z)$  и  $N(z) = H_x(z) + iH_y(z)$ :

$$\tau_{01}(z) = \frac{z^3 - z}{6} - \frac{\text{sh } \lambda_m z - \text{sh } \lambda_m}{\lambda_m^2 \text{sh } \lambda_m},$$

$$\tau_{02}(z) = \int_{-1}^z (z - \zeta) |M(\zeta)|^2 d\zeta - \frac{1+z}{2} \int_{-1}^1 (1 - \zeta) |M(\zeta)|^2 d\zeta,$$

$$|M(\zeta)|^2 = u_0^2(\zeta) + v_0^2(\zeta),$$

$$\lambda_m = \sqrt{Ha^2 Bt + i\sqrt{Ta}}.$$

Известно, что влияние вращения во многом сходно с влиянием магнитного поля [14], аналогично влиянию продольной вибрации на адвективное течение, которое сходно с воздействием вращения [15]. Если  $Ha = 0$ , то при отсутствии магнитного поля во вращающемся слое жидкости возникает адвективное течение, описанное в [6]. При  $Ta = 0$ , когда отсутствует вращение, получаем течение, описанное в [8].

Для изучения устойчивости стационарного адвективного течения применим метод малых возмущений:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}_0 = (u_0, v_0, 0), \quad \mathbf{V} = (u, v, w),$$

$$T = T_0 + \theta, \quad T_0 = x + \tau_0(z), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}', \quad (8)$$

$$\mathbf{H}_0 = (H_x(z), H_y(z), 1), \quad \mathbf{H}' = (h_x, h_y, h_z),$$

$$P = p_0 + P'.$$

Подставив возмущенные поля (8) в систему (1)–(5) и граничные условия (6), получим следующую задачу:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{V} + \sqrt{Ta}(\mathbf{i}_z \times \mathbf{V}) = -\nabla \left( P' + \frac{1}{2} Ha^2 \mathbf{H}'^2 + Ha^2 \mathbf{H}'\mathbf{H}_0 \right) + \Delta \mathbf{V} + Ha^2 [(\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{H}' + (\mathbf{H}'\nabla)\mathbf{H}' + (\mathbf{H}'\nabla)\mathbf{H}_0] + Gr\theta\mathbf{i}_z, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H}' + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H}_0 + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{H}' - (\mathbf{H}'\nabla)\mathbf{v}_0 - (\mathbf{H}'\nabla)\mathbf{V} - (\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{V} = \frac{1}{Bt} \Delta \mathbf{H}', \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{V}\nabla T_0 + \mathbf{V}\nabla \theta + \mathbf{v}_0\nabla \theta = \frac{1}{Pr} \Delta \theta + S [(\text{rot } \mathbf{H})^2 + 2(\text{rot } \mathbf{H}')(\text{rot } \mathbf{H}_0)], \quad (11)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H}' = 0. \quad (12)$$

Граничные условия:

$$z = \pm 1: \quad \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{H}' = 0, \quad \theta = 0. \quad (13)$$

### 3. Линейная теория устойчивости адвективного течения

В рамках линейной теории устойчивости в уравнениях (9)–(12) пренебрегаем малыми квадратичными по  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{H}'$  и  $\theta$  слагаемыми. Линеаризованные уравнения для возмущений скорости  $\mathbf{V}$ , температуры  $\theta$ , давления  $P$  и напряженности

магнитного поля  $\mathbf{H}'$  имеют следующее представление во вращающейся системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{V} + \sqrt{Ta}(\mathbf{i}_z \times \mathbf{V}) = \\ = -\nabla(P' + Ha^2\mathbf{H}'\mathbf{H}_0) + \Delta\mathbf{V} + \\ + Ha^2[(\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{H}' + (\mathbf{H}'\nabla)\mathbf{H}_0] + Gr\theta\mathbf{i}_z, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H}_0 + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{H}' - \\ - (\mathbf{H}'\nabla)\mathbf{v}_0 - (\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{V} = \frac{1}{Bt}\Delta\mathbf{H}', \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{V}\nabla T_0 + \mathbf{v}_0\nabla\theta = \\ = \frac{1}{Pr}\Delta\theta + 2S(\text{rot}\mathbf{H}')(\text{rot}\mathbf{H}_0), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{div}\mathbf{V} = 0, \quad \text{div}\mathbf{H}' = 0. \quad (17)$$

Граничные условия:

$$z = \pm 1: \quad \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{H}' = 0, \quad \theta = 0. \quad (18)$$

В силу большой сложности исследования устойчивости течения в трёхмерной постановке будем рассматривать предельный случай: пространственные винтовые периодические по  $x$  возмущения в виде валов с осью, перпендикулярной оси  $x$ . Уравнения винтовых возмущений выводятся из системы (14)–(18) в предположении, что производные всех функций по  $y$  в ней равны нулю. Имеются все три компоненты вектора возмущения скорости и вектора возмущения напряжённости магнитного поля, которые, так же, как и возмущения температуры, являются функциями времени  $t$  и двух пространственных переменных  $x, z$ . Учитывая условия (17), введем функцию тока и вихрь возмущения скорости:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (19)$$

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\Delta\psi = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right), \quad (20)$$

потенциал и вихрь возмущения напряжённости магнитного поля:

$$h_x = -\frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad h_z = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (21)$$

$$\beta = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} = -\Delta\eta. \quad (22)$$

Представим неизвестные функции в виде

$$\varphi = [\varphi_1(t, z) + i\varphi_2(t, z)]\exp(ik_x x),$$

$$\psi = [\psi_1(t, z) + i\psi_2(t, z)]\exp(ik_x x),$$

$$v = [v_1(t, z) + iv_2(t, z)]\exp(ik_x x),$$

$$\theta = [\theta_1(t, z) + i\theta_2(t, z)]\exp(ik_x x), \quad (23)$$

$$\beta = [\beta_1(t, z) + i\beta_2(t, z)]\exp(ik_x x),$$

$$\eta = [\eta_1(t, z) + i\eta_2(t, z)]\exp(ik_x x),$$

$$h_y = [\gamma_1(t, z) + i\gamma_2(t, z)]\exp(ik_x x),$$

где  $k_x$  – волновое число.

В результате задача сведется к системе линейных уравнений в частных производных по времени  $t$  и переменной  $z$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - k_x \left( u_0 \varphi_2 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \psi_2 \right) - \sqrt{Ta} \frac{\partial v_1}{\partial z} = \\ = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - k_x^2 \varphi_1 + k_x \theta_2 + \\ + Ha^2 \left[ -H_x k_x \eta_2 - H_x k_x \frac{\partial \eta_2}{\partial z} - \right. \\ \left. - k_x^2 H_x \eta_1 + \frac{\partial \beta}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + k_x \left( u_0 \varphi_1 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \psi_1 \right) - \sqrt{Ta} \frac{\partial v_2}{\partial z} = \\ = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - k_x^2 \varphi_2 - k_x \theta_1 + \\ + Ha^2 \left[ H_x k_x \eta_1 + H_x k_x \frac{\partial \eta_1}{\partial z} - \right. \\ \left. - k_x^2 H_x \eta_2 + \frac{\partial \beta_1}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} - k_x u_0 \left( v_2 + \frac{\partial v_0}{\partial z} \psi_2 \right) - \sqrt{Ta} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \\ = \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - k_x^2 v_1 + Ha^2 \left[ -H'_y(z) k_x \eta_1 - \right. \\ \left. - H_x(z) k_x \gamma_2 + \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial t} - k_x u_0 \left( v_1 + \frac{\partial v_0}{\partial z} \psi_1 \right) - \sqrt{Ta} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = \\ = \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} - k_x^2 v_2 + Ha^2 \left[ H'_y(z) k_x \eta_1 + \right. \\ \left. + H_x(z) k_x \gamma_1 + \frac{\partial \gamma_2}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - k_x^2 \psi_1 + \varphi_1 = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - k_x^2 \psi_2 + \varphi_2 = 0, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} - k_x \beta_2 (H_x + u_0) + \frac{\partial \beta_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} k_x \eta_2 = \\ = \frac{1}{Bt} \left( \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial z^2} - k_x^2 \beta_1 \right), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} + k_x \beta_1 (H_x + u_0) + \frac{\partial \beta_2}{\partial z} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} k_x \eta_1 = \\ = \frac{1}{Bt} \left( \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial z^2} - k_x^2 \beta_2 \right), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} - k_x v_2 H_x + \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_0}{\partial z} k_x \eta_2 + k_x \gamma_2 u_0 = \\ = \frac{1}{Bt} \left( \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial z^2} - k_x^2 \gamma_1 \right), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} + k_x v_1 H_x + \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial z} k_x \eta_1 - k_x \gamma_1 u_0 = \\ = \frac{1}{Bt} \left( \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial z^2} - k_x^2 \gamma_2 \right), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial z^2} - k_x^2 \beta_1 + \eta_1 = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial z^2} - k_x^2 \beta_2 + \eta_2 = 0, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - k_x \left[ u_0(z) \theta_2 + \frac{\partial \tau_0(z)}{\partial z} \psi_2 \right] = \\ = \frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} - k_x^2 \theta_1 \right] + 2S \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} v'_0 + \beta_1 u'_0 \right), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + k_x \left[ u_0(z) \theta_1 + \frac{\partial \tau_0(z)}{\partial z} \psi_1 \right] = \\ = \frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} - k_x^2 \theta_2 \right] + 2S \left( \frac{\partial \gamma_2}{\partial z} v'_0 + \beta_2 u'_0 \right) \end{aligned} \quad (38)$$

с граничными условиями

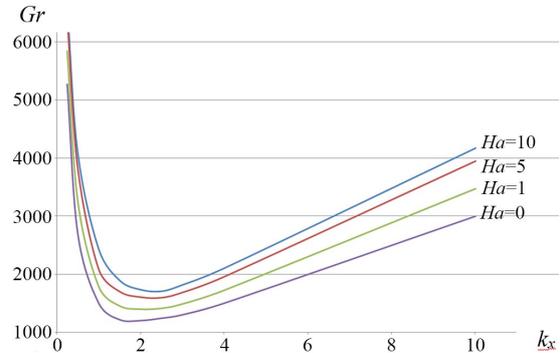
$$\begin{aligned} z = \pm 1: \quad \psi_l = \frac{\partial \psi_l}{\partial z} = v_l = \theta_l = 0, \\ h_{yl} = \eta_l = \frac{\partial \eta_l}{\partial z} = 0, \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (39)$$

В качестве начальных возмущений  $\psi_1, \psi_2, v_1, v_2, \theta_1, \theta_2, h_{y1}, h_{y2}, \eta_1, \eta_2$  бралась функция  $\sin^2 \pi z$ , удовлетворяющая граничным условиям (39).

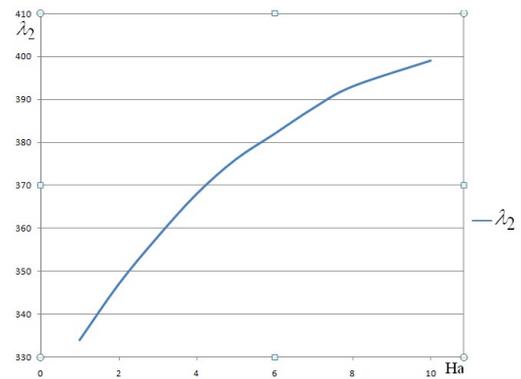
Полученная начально-краевая задача решается по численной методике, описанной в [6]. Количество узлов сетки равно 200. Величины возмущения вихря скорости и возмущения вихря напряженности магнитного поля на твердых границах слоя вычислялись по формуле Вудса [14]. При построении нейтральной кривой, описывающей зависимость критического числа Грасгофа от волнового числа, для каждого выбранного значения  $k_x$  требуется найти такое число Грасгофа, при котором действительная часть декремента возмущений  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$  равна нулю. Иными словами, решается задача о поиске корня  $\lambda_1 = 0$  для неявной функции  $\lambda_1(k_x, Gr, Ta, Ha, Bt)$  при фиксированных значениях  $Ta, Ha$  и  $Bt$ . Эта функция строится дискретно по точкам с помощью многократного решения эволюционной задачи методом сеток. Для нахождения действительной части декремента возмущений  $\lambda_1$

прослеживалась эволюция во времени максимумов по модулю неизвестных. В силу линейности задачи устойчивости в качестве аппроксимации зависимости амплитуд по времени использовалась экспоненциальная формула  $C \exp(\lambda_1 t)$ . Неизвестные  $\lambda_1$  и  $C$  определяются методом наименьших квадратов [17] по ходу вычислений уравнений системы методом сеток. Нулевое значение декремента возмущений уточняется методом половинного деления [17]. Характер поведения возмущений от времени существенно зависит от всех параметров задачи; в области неустойчивости все возмущения нарастают, а в области устойчивости затухают.

В силу сложности системы (25)–(39) основные расчеты проводились для слабого магнитного поля ( $Ha=0; 1; 5; 10$ ) при  $Pr=6.7, Bt=1, S=1$ , в умеренном значении числа Тейлора. Возмущение вихря скорости и возмущение напряженности магнитного поля на твердых границах слоя рассчитывались по формуле Вудса [14].



**Рис. 2.** Нейтральные кривые зависимости критического числа Грасгофа от волнового числа  $k_x$  при различных значениях числа Гартмана



**Рис.3.** Зависимость мнимой части декремента возмущений от числа Грасгофа при  $Gr = Gr_k$

На рис. 2 представлены нейтральные кривые зависимости критического числа Грасгофа от волнового числа  $k_x$  для различных значений числа Гартмана при  $Ta = 4100$ . Как видно, магнитное поле повышает устойчивость адвективного течения. Сохраняется колебательная неустойчивость. С

увеличением  $Ha$  растет критическое волновое число  $\lambda_2$ , соответствующее минимуму критического числа Грасгофа  $Gr_k$ . На рис. 3 дана зависимость мнимой части декремента возмущений от числа Грасгофа при  $Gr = Gr_k$ .

#### 4. Конечно-амплитудные пространственные возмущения в надкритических областях

Для изучений возмущений конечной амплитуды в надкритической области воспользуемся нелинейными уравнениями системы (9)–(13). Для пространственных винтовых, периодических по  $x$  возмущений, они имеют вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \\ & + u_0(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_0''(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \sqrt{Ta} \frac{\partial v}{\partial z} = \\ & = \Delta \varphi + Ha^2 \left[ H_x(z) \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \right] + \\ & + Ha^2 \left[ H_x''(z) - \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right] - Gr \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\Delta \psi + \varphi = 0, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + u_0(z) \frac{\partial v}{\partial x} + v_0'(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \sqrt{Ta} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \\ & - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} = \Delta v + \\ & + Ha^2 \left[ H_y'(z) \frac{\partial \eta}{\partial x} + H_x(z) \frac{\partial h_y}{\partial x} \right] + \\ & + Ha^2 \left[ \frac{\partial h_y}{\partial z} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial h_y}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial h_y}{\partial z} \right], \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \beta}{\partial t} + u_0(z) \frac{\partial \beta}{\partial x} - H_x(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} + H_x''(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \\ & - u_0''(z) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} + + \\ & + h_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + h_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial h_x}{\partial x} \varphi + \frac{\partial h_x}{\partial z} \varphi = \frac{1}{Bt} \Delta \beta, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\Delta \eta + \beta = 0, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h_y}{\partial t} + H_y'(z) + u_0(z) \frac{\partial h_y}{\partial x} - v_0'(z) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \\ & - H_x(z) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial h_y}{\partial x} + w \frac{\partial h_y}{\partial z} + \\ & + h_x \frac{\partial v}{\partial x} + h_z \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{Bt} \Delta h_y, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + w \frac{\partial \tau_0}{\partial z} + u_0(z) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \\ & = \frac{1}{Pr} \Delta \vartheta + S \left[ \left( \frac{\partial h_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial h_y}{\partial x} \right)^2 + \eta^2 \right] + \\ & + 2S \left( \frac{\partial h_y}{\partial z} \frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{\partial H_x}{\partial z} \eta \right), \end{aligned} \quad (46)$$

где оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} z = \pm 1: \quad \psi = \eta = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \\ v = h_y = \vartheta = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

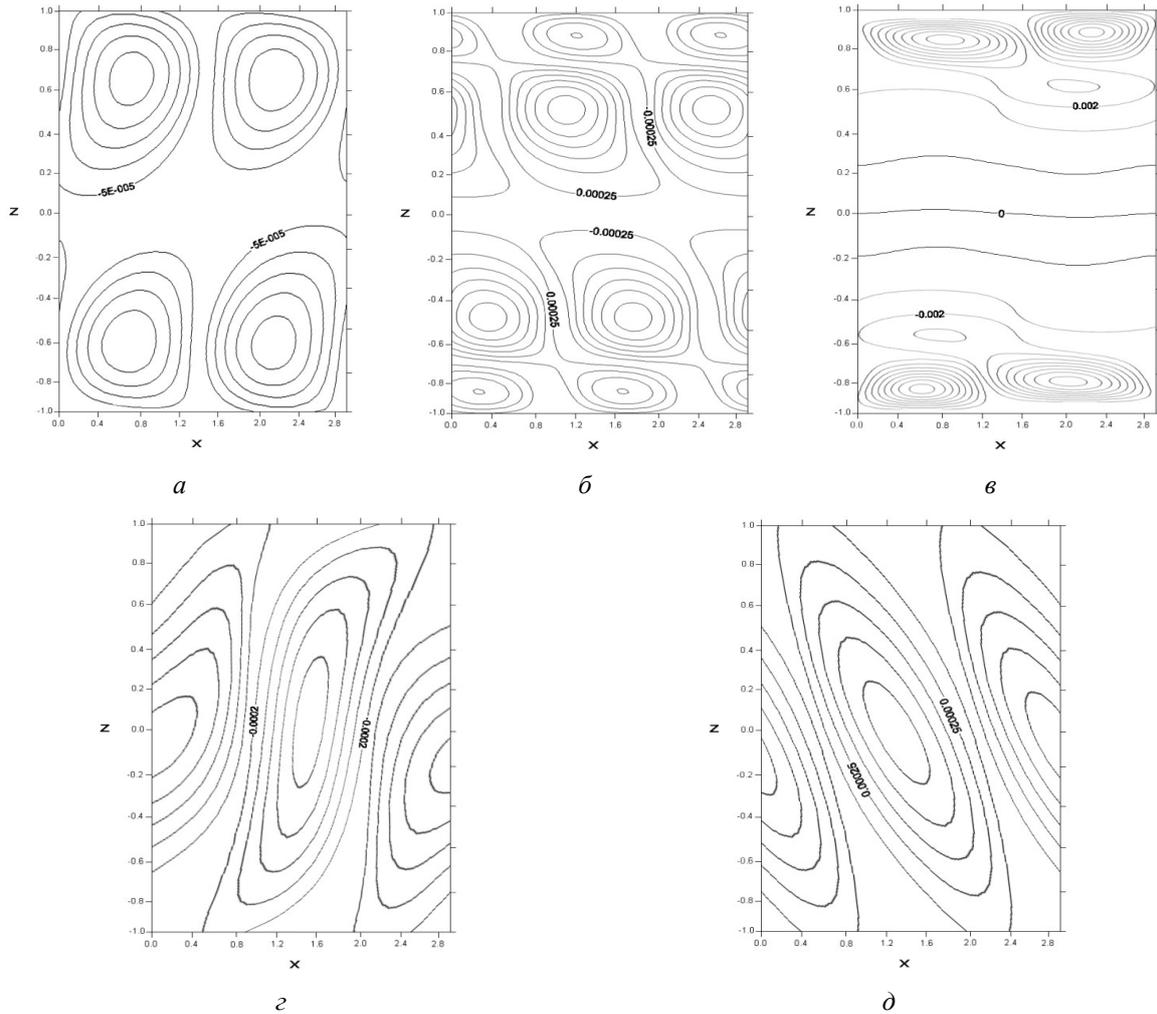
На боковых границах заданы условия периодичности

$$\begin{aligned} \psi(t, 0, z) = \psi(t, L, z), \quad \varphi(t, 0, z) = \varphi(t, L, z), \\ v(t, 0, z) = v(t, L, z), \quad \vartheta(t, 0, z) = \vartheta(t, L, z), \\ \beta(t, 0, z) = \beta(t, L, z), \quad \eta(t, 0, z) = \eta(t, L, z), \\ h_y(t, 0, z) = h_y(t, L, z), \end{aligned} \quad (48)$$

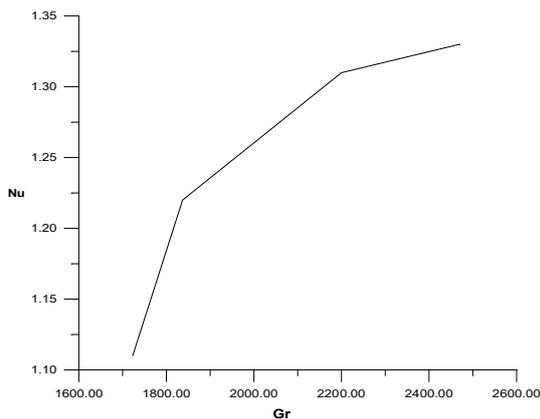
где  $L$  – длина волны возмущений, соответствующая критическому числу Грасгофа, для фиксированных чисел Тейлора и Гартмана.

Задача (40)–(48) решается численно с помощью метода сеток двухполюсовым методом [16]. Используется явная конечно-разностная схема как с центральными, так и с направленными разностями. Уравнения Пуассона (41) и (44) для функции тока  $\psi$  и  $\eta$  решаются методом последовательной верхней релаксации. Вихри на твердых границах аппроксимируются по формуле Вудса.

Расчёты для исследования винтовых возмущений проводились при  $Pr = 6.7$ ,  $Ha = 5, 10$ ,  $Ta = 4100$  на сетке  $100 \times 200$  узлов. В качестве начальных возмущений бралась функция  $\cos(2\pi x / L) \sin^2 \pi z$ , удовлетворяющая граничным условиям (47)–(48). Расчёты показали, что вблизи верхней и нижней границ слоя возникают движущиеся в противоположных направлениях тепловые пятна (рис. 4, *а*). Возмущения функции тока и второй компоненты скорости формируют вблизи границ слоя систему бегущих винтообразных вихрей, возникающих в области с неустойчивой температурной стратификацией (рис. 4, *а*, *б*). Возмущение напряженности магнитного поля имеет спиралевидную форму (рис. 4, *з*, *д*). При надкритичности выше 1.57 нестационарное течение теряет гармоничность по времени и перестраивается, масштаб вихрей уменьшается. При увеличении числа Гартмана с 5 до 10 масштабы вихрей в пограничных слоях уменьшаются на 4.5 %, температурная стратификация вблизи твердых стенок сохраняется. Число Нуссельта растет по корневому закону (рис. 5).



**Рис. 4.** Изолинии возмущений: *a* – функции тока  $\psi$ ; *б* – скорости  $v$ ; *в* – температуры  $\theta$ ; *г* – функции тока напряженности магнитного поля  $\eta$ ; *д* – компоненты напряжённости магнитного поля  $h_y$



**Рис. 5.** Зависимость числа Нуссельта от числа Грасгофа для  $Ha = 5$ ,  $Ta = 4100$

## 5. Заключение

Представлено точное решение уравнений Навье-Стокса, записанное в приближении Обербека-Буссинеска и описывающее адвективное течение в плоском горизонтальном вращающемся слое про-

водящей жидкости, помещённом в однородное постоянное магнитное поле. Ширина пограничного слоя адвективного течения на границах слоя уменьшается с ростом числа Тейлора и числа Гартмана.

Задача исследования устойчивости сводится к решению системы одномерных уравнений в частных производных. Представлен конечно-разностный метод исследования устойчивости рассматриваемого адвективного течения проводящей жидкости. В рамках линейной теории устойчивости показано, что при числах Грасгофа выше критических для нормальных возмущений развивается колебательная неустойчивость. Магнитное поле повышает устойчивость течения.

Поведение конечно-амплитудных возмущений, возникающих в слое жидкости при значениях числа Грасгофа выше критического, исследовано конечно-разностным методом сеток на основе нелинейной задачи. За порогом устойчивости возникают нестационарные периодические конечно-амплитудные возмущения скорости, температу-

ры и напряженности магнитного поля в виде системы вихрей и температурных пятен различной конфигурации.

### Список литературы

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
2. Андреев В. К., Бекежанова В. Б. Устойчивость неізотермических жидкостей (обзор) // ПМТФ. 2013. № 2. С. 3–20.
3. Gershuni G. Z., Lyubimov D. V. Thermal vibrational convection. New York: Wiley, 1998. 358 p.
4. Шварц К. Г. Исследование устойчивости адвективных течений во вращающемся слое жидкости // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 1(13). С. 54–61.
5. Тарунин Е. Л., Шварц К. Г. Исследование линейной устойчивости адвективного течения методом сеток // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, № 6. С. 108–117.
6. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2006. 155 с.
7. Аристов С. Н., Пичугин А. М. Монотонная устойчивость адвективного течения проводящей жидкости в слабом поперечном магнитном поле. // Магнитная гидродинамика. 1989. № 3. С. 127–129.
8. Kaddeche S., Hendry D., Ben Hadid H. Magnetic stabilization of the buoyant convection between infinite horizontal walls with a horizontal temperature gradient // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 480. P. 185–216. DOI: 10.1017/S0022112002003622
9. Hudoba A., Molokov S., Aleksandrova S., Pedcenko A. Linear stability of buoyant convection in a horizontal layer of an electrically conducting fluid in moderate and high vertical magnetic field // Phys. Fluids. 2016. Vol. 28, 094104. DOI: 10.1063/1.4962741
10. Slavtchev S., Hennenberg M., Valhev G., Weyssow B. Stability of ferrofluid flows in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient and an oblique magnetic field // Microgravity Sci. Technol. 2008. Vol. 20. Issue 1. P. 199–203. DOI: 10.1007/s12217-008-9027-2.
11. Бурнышева А. В., Любимова Т. П. Колебательная неустойчивость адвективного течения в горизонтальном цилиндре в присутствии вращающегося магнитного поля // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 5. С. 3–10.
12. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Perminov A. V., Henry D., Ben Hadid H. Stability of convection in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient. Part 2. Effect of a magnetic

- field. J. Fluid Mech. 2009. Vol. 635. P. 297–319. DOI: 10.1017/S0022112009007575
13. Кирко И. М., Кирко Г. Е. Магнитная гидродинамика. Современное видение проблем. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009. 632 с.
  14. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
  15. Shvarts K. G. Advective flow of a rotating fluid layer in a vibrational field // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15. N. 3. P. 261–270. DOI: 10.20537/nd190305
  16. Тарунин Е. Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
  17. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. СПб.: Лань, 2022. 400 с.

### References

1. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M., Nepomnjaschy A. A. *Ustoichivost' konvektivnykh techenii* [Stability of convective flows]. Moscow: Nauka, 1989. 320 p. (In Russian).
2. Andreev V. K., Bekezhanova V. B. Stability of non-isothermal fluids (Review), *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, no. 2, pp. 171–184.
3. Gershuni G. Z., Lyubimov D. V. *Thermal Vibrational Convection*. N. Y.: Wiley, 1998. 358p.
4. Shvarts K. G. Investigation of the stability of advective flows in a rotating fluid layer. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2013, no. 1 (13), pp. 54–61 (in Russian).
5. Tarunin E. L., Shvarts K. G. The advective flow linear stability investigation by grid method. *Computational Technologies*, 2001, vol. 6, no. 6, pp. 108–117 (in Russian).
6. Aristov S. N., Shvarts K. G. *Vikhrevyte techeniia advektivnoi prirody vo vrashchayushchemsia sloe zhidkosti* [Vortex flows of advective nature in a rotating fluid layer]. Perm: Perm University Press, 2006, 155 p. (in Russian).
7. Aristov S. N., Pichugin A. M. Monotonic stability in the advective flow of a conducting fluid within a weak transverse magnetic field, *Magnetohydrodynamics*, 1989, vol. 25, no. 3, pp. 395–397.
8. Kaddeche S., Hendry D., Ben Hadid H. Magnetic stabilization of the buoyant convection between infinite horizontal walls with a horizontal temperature gradient. *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 480, pp. 185–216. DOI: 10.1017/S0022112002003622
9. Hudoba A., Molokov S., Aleksandrova S., Pedcenko A. Linear stability of buoyant convection in a horizontal layer of an electrically conducting fluid in moderate and high vertical magnetic field.

- Phys. Fluids* 2016, vol. 28, 094104. DOI: 10.1063/1.4962741
10. Slavychev S., Hennenberg M., Valhev G., Weysow B. Stability of ferrofluid flows in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient and an oblique magnetic field. *Microgravity Sci. Technol.*, 2008, vol. 20, no. 1, pp. 199–203. DOI: 10.1007/s12217-008-9027-2
  11. Burnysheva A. V., Lyubimova T. P. Oscillatory instability of advective flow in a horizontal cylinder in the presence of a rotating magnetic field. *Fluid Dynamics*, 2012, vol. 47, no. 4, pp. 557–563. DOI: 10.1134/S0015462812050018
  12. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Perminov A. V., Henry D., Ben Hadid H. Stability of convection in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient. Part 2. Effect of a magnetic field. *J. Fluid Mech.* 2009. Vol. 635, pp. 297–319. DOI: 10.1017/S0022112009007575
  13. Kirko I.M., Kirko G.E. *Magnitnaia gidrodinamika. sovremennoe videnie problem* [Magnetic hydrodynamics. Modern view of the problems]. Moscow, Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2009. 632p. (in Russian)
  14. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. *Convective stability of incompressible fluids*. Jerusalem, Israel: Keter Publishing House, 1976, 330 p.
  15. Shvarts K. G. Advective flow of a rotating fluid layer in a vibrational field. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 15, no. 3, pp. 261–270. DOI: 10.20537/nd190305
  16. Tarunin E. L. *Vychislitel'nyi eksperiment v zadachakh svobodnoi konveksii* [Computational experiment in problems of free convection]. Irkutsk: Irkutsk University Press, 1990. 225 p. (in Russian).
  17. Demidovich B. P., Maron I. A., Shuvalova E. Z. *Chislennye metody analiza. Priblizhenie funktsii, differentsial'nye i integral'nye uravneniia* [Numerical Methods of Analysis. Approximation of Functions, Differential and Integral Equations]. St. Petersburg: Lan' Book, 2022. 400 p. (in Russian)

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Шварц К. Г. Устойчивость адвективного течения во вращающемся слое проводящей жидкости, помещенной в постоянное однородное магнитное поле // Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 3. С. 12–20. doi: 10.17072/1994-3598-2022-3-12-20

**Please cite this article in English as:**

Shvarts K. G. Stability of advective flow in a rotating layer of a conducting fluid placed in a permanent uniform magnetic field. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2022, no. 3, pp. 12–20. doi: 10.17072/1994-3598-2022-3-12-20

**Сведения об авторе**

Константин Григорьевич Шварц, д. физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614990.

**Author information**

Konstantin G. Shvarts, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor in the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia