

УДК 532.6, 532.5
PACS 47.55.D-, 47.55.dr

Влияние пространственной неоднородности подложек и электрического поля на динамику зажатой капли

А. А. Алабужев^{1,2}, М. А. Пьянкова^{1*}

¹ Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

² Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

* ya.kashina-marina@yandex.ru

В данной статье исследуются вынужденные колебания капли несжимаемой жидкости под действием неоднородного переменного электрического поля. Капля окружена несжимаемой жидкостью другой плотности и зажата между двумя неоднородными параллельными пластинами. В равновесии капля имеет форму круглого цилиндра, ограниченного в осевом направлении этими пластинами. Внешнее электрическое поле действует как внешняя сила, вызывающая движение линии контакта. Для описания движения контактной линии используется модифицированное граничное условие Хокинга: скорость движения линии контакта пропорциональна отклонению краевого угла от его равновесного значения и скорости быстрых релаксационных процессов, частота которых пропорциональна удвоенной частоте электрического поля. Использование этого уравнения позволяет качественно описать экспериментальную зависимость краевого угла в зависимости от напряжения в отличие от уравнения Юнга-Липмана. Решение задачи представляется в виде ряда Фурье по собственным функциям оператора Лапласа. Полученная система неоднородных уравнений для неизвестных амплитуд решается численно. Построены графики амплитудно-частотных характеристик и динамической формы капли при различных значениях параметров задачи. Параметр смачивания зависит от полярного угла α , т.е. коэффициент взаимодействия между пластиной и жидкостью (линия контакта) является функцией координат.

Ключевые слова: вынужденные колебания; электросмачивание; контактная линия; краевой угол

Поступила в редакцию 23.05.2022; после рецензии 09.06.2022; принята к опубликованию 10.06.2022

Influence of surface properties on the dynamics of a clamped drop in an inhomogeneous electric field

A. A. Alabuzhev^{1,2}, M. A. Pyankova^{1*}

¹ Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

² Perm State University, Perm, Russia

* ya.kashina-marina@yandex.ru

This article investigates the forced oscillations of an incompressible liquid drop under the action of an inhomogeneous alternating electric field. The drop is surrounded by an incompressible fluid of a different density and is clamped between two inhomogeneous parallel plates. In equilibrium, the drop has the shape of a round cylinder bounded in the axial direction by these plates. The external electric field acts as an external force causing the contact line to move. To describe the motion of the

contact line, a modified Hocking boundary condition is used: the velocity of the contact line is proportional to the deviation of the contact angle from its equilibrium value and the rate of fast relaxation processes, the frequency of which is proportional to the doubled frequency of the electric field. The use of this equation makes it possible to qualitatively describe the experimental dependence of the contact angle as a function of stress, in contrast to the Young-Lippmann equation. The solution of the problem is represented as a Fourier series in terms of eigenfunctions of the Laplace operator. The resulting system of inhomogeneous equations for unknown amplitudes is solved numerically. Graphs of the amplitude-frequency characteristics and the dynamic shape of the drop are plotted for various values of the problem parameters. The wetting parameter depends on the polar angle α , i.e. the coefficient of interaction between the plate and the fluid (contact line) is a function of the coordinates.

Keywords: forced oscillations; electrowetting; contact line; contact angle

Received 23 May 2022; revised 09 June 2022; accepted 10 June 2022

doi: 10.17072/1994-3598-2022-2-56-65

1. Введение

Движение капли жидкости на подложке встречается во многих промышленных процессах, в связи с чем привлекает большое внимание исследователей [1–10]. Особую сложность в этой области вызывает описание движения линии контакта трех сред и изменения краевого угла [11–19]. Изменение угла контакта под воздействием внешней силы является одним из способов изменения смачивания твердой поверхности жидкостью. Роль такой силы может выполнить электрическое поле – электросмачивание (*electrowetting*, EW). Если проводящая пластина (подложка) покрыта слоем диэлектрика, то это – электросмачивание на диэлектрике (*electrowetting-on-dielectric*, EWOD). Существует множество моделей, описывающих изменение краевого угла при электросмачивании, которые, так или иначе, основываются на моделях движения линии контакта начиная с первой модели – уравнения Юнга–Липмана [20–22]. Общее обсуждение эффективных граничных условий EWOD можно найти в статьях [23–30].

В данной работе мы продолжаем исследования поведения зажатой капли в переменном электрическом поле, начатые в работах [31–34]. Собственные колебания капли исследовались ранее в нескольких работах: как одинаковые [35] и разные [32] однородные пластины, так и одинаковые [36] и разные [34] неоднородные пластины. Капля находится в плоском конденсаторе, т.е. зажата между двумя разными неоднородными проводящими подложками, покрытыми диэлектриком. Внешнее электрическое поле играет роль движущей силы, действующей на линию контакта, и приводит к динамическому изменению краевого угла. Кроме того, мы предполагаем, что электрическое поле изменяется гармонически со временем по закону $\cos(\omega^* t^*)$. Следовательно, краевой угол меняется по закону $\cos(2\omega^* t^*)$ согласно [20–22].

Принимая во внимание более общий случай, когда релаксационные эффекты происходят в масштабах времени, сопоставимых с внешними силами, мы можем сформулировать эффективное граничное условие, которое должно выполняться на линии контакта, т. е. скорость линии контакта пропорциональна отклонению краевого угла и скорости быстрых релаксационных процессов, частота которых пропорциональна удвоенной частоте ω^* электрического поля:

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t^*} = \pm \Lambda^* \left(\frac{\partial \zeta^*}{\partial z^*} + A^* \cos(2\omega^* t^*) \right), \quad (1)$$

где ζ^* – отклонение поверхности капли от положения равновесия, z^* – осевая координата, Λ^* – феноменологическая константа (так называемый параметр смачивания или параметр Хокинга [3–5, 13, 14, 35–38]), имеющий размерность скорости, A^* – эффективная амплитуда, ω^* – частота электрического поля. Вторым слагаемым в граничном условии (1) является внешнее действие, которое записывается так же, как и в уравнении Юнга–Липмана [20–22]: $\cos \vartheta = E_w = \tilde{E}_w V^2$, $\cos \vartheta_0 = 0$ в нашей задаче, таким образом,

$$\begin{aligned} \zeta_z &\sim \operatorname{ctg} \vartheta = E_w / \sqrt{1 - E_w^2} = \\ &= \tilde{E}_w V^2 / \sqrt{1 - \tilde{E}_w^2 V^4} \approx \\ &\approx \tilde{E}_w V^2 + O(V^6) \approx \tilde{E}_w V^2 \sim V^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_0 &= \sigma_{ic}^{-1} (\sigma_{ip} - \sigma_{cp}), \\ E_w &= 0.5 C V^2 \sigma_{ic}^{-1}, \quad C = \varepsilon \varepsilon_0 d^{-1}, \end{aligned}$$

ϑ_0 – контактный угол без приложенного напряжения – равновесный краевой угол, который определяется уравнением Юнга, σ – межфазное поверхностное натяжение между каплей проводящей жидкости (*c*), окружающей жидкостью (*i*) и диэлектрической поверхностью (*p*), E_w – электрокапиллярное число (оно представляет собой отноше-

ние электростатической энергии жидкости к межфазной энергии, окружающей жидкость), C – емкость на единицу площади, V – значение приложенного напряжения постоянного электрического тока, d – толщина диэлектрического слоя, ε_0 и ε – коэффициенты диэлектрической проницаемости вакуума и подложки, соответственно.

Условие (1) включает в себя два важных предельных случая: 1) линия контакта закреплена и неподвижна (краевой угол может изменяться) – $\Lambda^* = 0$, 2) краевой угол постоянный (линия контакта свободно скользит по поверхности пластины) – $\partial\zeta^*/\partial z^* = 0$.

2. Постановка задачи

Исследуется динамика капли жидкости плотности ρ_i^* и кинематической вязкости ν_i^* , зажатой в плоском бесконечном конденсаторе толщиной h^* (рис. 1). Его пластины являются проводящими и покрыты изнутри диэлектрической пленкой. Предполагается, что линейные размеры пластин конденсатора много больше размеров капли и его края не влияют на ее динамику. Капля окружена жидкостью другой плотности ρ_e^* и вязкости ν_e^* . Равновесная форма капли описывается круглым цилиндром радиуса R_0^* и высотой h^* ; краевой угол ϑ_0 между боковой поверхностью капли и твердой поверхностью равен 0.5π . К пластинам прикладывается переменное напряжение, имеющее частоту ω^* , что позволяет возбуждать внутри него электрическое поле. Внешнее переменное электрическое поле действует как внешняя сила, имеющая амплитуду A^* и частоту $2\omega^*$, которая вызывает движение контактной линии.

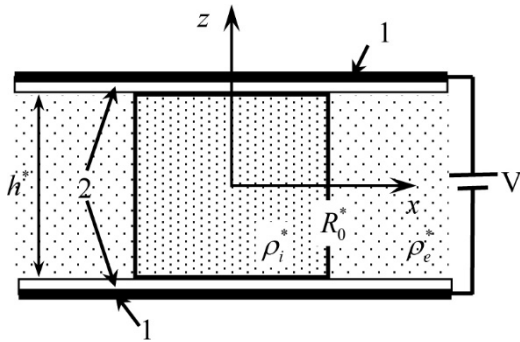


Рис. 1. Геометрия задачи: 1 – электрод; 2 – диэлектрический слой

Для описания движения контактной линии используется модифицированное условие (1). Параметр смачивания Λ^* будет функцией координат, т.к. поверхность пластин неоднородная [34], и различным для каждой поверхности, т.к. пластины разные: Λ_u^* при $z = 0.5h^*$ и Λ_b^* при $z = -0.5h^*$.

Плотность пространственного заряда на поверхности раздела жидкостей пренебрежимо мала, и ее влияние не будет учитываться.

Будем рассматривать цилиндрическую систему координат r^* , α , z^* , исходя из симметрии задачи. Следовательно, поверхность капли описывается следующим уравнением: $r^* = R_0^* + \zeta^*(\alpha, z^*, t^*)$.

Далее жидкости рассматриваются как невязкие и несжимаемые, т.е. скорость течения будет описываться уравнением Эйлера, а изменение плотности – уравнением неразрывности. Предполагая потенциальное движение жидкости, введем потенциал скорости $\vec{v}^* = \vec{\nabla}\varphi^*$. Отметим, что в системе присутствует диссипация энергии благодаря использованию граничного условия Хокинга [3–5, 13, 14, 35–38], несмотря на использование приближения невязкой жидкости. Это позволяет нам рассматривать течение как потенциальное даже при наличии деформируемой поверхности раздела.

Принимая в качестве характерных величин длины – R_0^* , высоты – h^* , плотности – $\rho_e^* + \rho_i^*$, времени –

$$\sigma^{-1/2} \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^{*3}},$$

потенциала скорости –

$$A^* \sqrt{\sigma} \left((\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^{*3} \right)^{-1/2},$$

давления – $A^* \sigma (R_0^*)^{-2}$ и отклонения поверхности – A^* , переходим к безразмерным переменным и получаем следующую линейную задачу:

$$p_j = -\rho_j \varphi_{j,t}, \quad \Delta \varphi_j = 0, \quad j = i, e, \quad (2)$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$r = 1: [\varphi_r] = 0, \quad \zeta_t = \varphi_r,$$

$$[p] = \zeta + \zeta_{\alpha\alpha} + b^2 \zeta_{zz}, \quad (3)$$

$$z = \pm \frac{1}{2}: \varphi_z = 0, \quad (4)$$

$$r = 1, \quad z = \pm \frac{1}{2}: \quad (5)$$

$$\zeta_t = \mp \Lambda_{u,b}(\alpha) (\zeta_z + a f(\alpha) \cos(2\omega t)),$$

где p – давление жидкости, φ – потенциал скорости, $f(\alpha)$ – функция пространственной неоднородности электрического поля, α – азимутальный угол, a – эффективная амплитуда электрического поля, ζ – отклонение поверхности от равновесного положения, $\Lambda_{u,b}$ – безразмерный параметр Хокинга на верхней и нижней пластинах, соответственно, квадратные скобки соответствуют скачку величины на границе раздела между внешней жидкостью и каплей.

Краевая задача (2)–(5) включает в себя 6 безразмерных параметров: геометрический параметр $b = R_0 h^{-1}$, соотношение плотностей:

$$\rho_i = \rho_i^* (\rho_e^* + \rho_i^*)^{-1}, \quad \rho_e = \rho_e^* (\rho_e^* + \rho_i^*)^{-1},$$

капиллярный параметр:

$$\lambda = \Lambda^* \sigma^{-1/2} b \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^3},$$

частоту электрического поля:

$$\omega = \omega^* \sigma^{-1/2} \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^3},$$

и амплитуду электрического поля:

$$a = 0.5 A^* C \sigma^{-3/2} \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^3}.$$

3. Вынужденные колебания

Рассмотрим вынужденные колебания, определяемые внешней периодической силой, действующей только на линии раздела (5) трех сред. Детально изучим три случая неоднородностей поверхности пластин и электрического поля:

1. неоднородные пластины, однородное электрическое поле (далее НПОП):

$$\Lambda_{u,b}(\alpha) = \lambda_{u,b} |\sin(\cos(\alpha))|, \quad f(\alpha) = 1,$$

соответственно;

2. однородные пластины, неоднородное поле (ОПНП):

$$\Lambda_{u,b}(\alpha) = \lambda_{u,b}, \quad f(\alpha) = |\sin(\cos(\alpha))|;$$

3. неоднородные пластины, неоднородное электрическое поле (НПНП):

$$\Lambda_{u,b}(\alpha) = \lambda_{u,b} |\sin(\cos(\alpha))|, \quad f(\alpha) = |\sin(\cos(\alpha))|.$$

Отметим, что в первом случае интегральная амплитуда внешнего воздействия больше, чем в других случаях. Следовательно, в том числе из-за этого, амплитуда вибраций будет отличаться. Кроме того, первый и третий случаи будут качественно похожи, т.к. неоднородность поверхности играет роль эффективной амплитуды вибраций.

Решение краевой задачи (2)–(5) будем искать в виде рядов Фурье по собственным функциям оператора Лапласа (2). С учетом осевой симметрии решение уравнения Лапласа (2) с граничным условием (4) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & 2i\omega \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (c_{mk}^{(0)} \pm c_{mk}^{(1)}) + \delta_{m0} \left(d_0^{(0)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \pm d_0^{(1)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \delta_{m1} \left(\frac{1}{4} d_1^{(0)} + \frac{1}{2} d_1^{(1)} \right) + \right. \\ & \left. + \delta_{mn} \left(d_n^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) + d_n^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) \right) \right) = \mp \lambda_{u,b} \left(B_{mn} \left(\frac{\delta_{n0}}{b} \left(\mp d_0^{(0)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) + d_0^{(1)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta_{n1} (\pm d_1^{(0)} + d_1^{(1)}) + \delta_{nl} \frac{\sqrt{l^2-1}}{b} \left(\pm d_l^{(0)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) + d_l^{(1)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) \right) \right) + a C_m \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\varphi_i(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re}(i2\omega e^{i2\omega t} \psi_i(r, \alpha, z)), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \psi_i(r, \alpha, z) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{mk}^{(0)} R_{mk}^{(0)i}(r) \cos(2k\pi z) + \right. \\ & \left. + a_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)i}(r) \sin((2k+1)\pi z) \right) \cos(m\alpha), \\ \varphi_e(r, \alpha, z, t) = & \operatorname{Re}(i2\omega e^{i2\omega t} \psi_e(r, \alpha, z)), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \psi_e(r, \alpha, z) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(b_{mk}^{(0)} R_{mk}^{(0)e}(r) \cos(2k\pi z) + \right. \\ & \left. + b_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)e}(r) \sin((2k+1)\pi z) \right) \cos(m\alpha), \end{aligned}$$

где $R_{mk}^{(0)i}(r) = I_m(2k\pi br)$, $R_{mk}^{(1)i}(r) = I_m((2k+1)\pi br)$, $R_{mk}^{(0)e}(r) = K_0(2k\pi br)$, $R_{mk}^{(1)e}(r) = K_0((2k+1)\pi br)$, I_m и K_m – модифицированные функции Бесселя m -го порядка первого и второго рода, соответственно. Мы используем разложение только по чётным азимутальным функциям, т.к. функции неоднородности являются чётными.

Кинематическое условие на поверхности раздела (второе граничное условие в (3)) определяет выражение для отклонения поверхности:

$$\zeta(\alpha, z, t) = \operatorname{Re}(\xi(\alpha, z) e^{i2\omega t}) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \xi(\alpha, z) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_{mk}^{(0)} \cos(2k\pi z) + \right. \\ & \left. + c_{2k} \sin((2k+1)\pi z) \right) \cos(m\alpha) + d_0^{(0)} \cos\left(\frac{z}{b}\right) + \\ & + d_0^{(1)} \sin\left(\frac{z}{b}\right) + d_1^{(0)} z^2 \cos(\alpha) + d_1^{(1)} z \cos(\alpha) + \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} \left(d_m^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{2} z\right) + \right. \\ & \left. + d_m^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{2} z\right) \right) \cos(m\alpha). \end{aligned}$$

Последние слагаемые представляют собой общее решение однородного уравнения – скачок давления на границе раздела (3).

Подставив решения (6)–(8) в систему (2)–(5), получим следующую систему для нахождения неизвестных амплитуд a_{mk} , b_{mk} , c_{mk} и d_m :

$$b_{m0}^{(0)} = -a_{m0}^{(0)}, b_{mk}^{(0)} = a_{mk}^{(0)} \frac{R_{mkr}^{(0)i}(1)}{R_{mkr}^{(0)e}(1)}, b_{mk}^{(1)} = a_{mk}^{(1)} \frac{R_{mkr}^{(1)i}(1)}{R_{mkr}^{(1)e}(1)}, ma_{mk}^{(0)} = c_{m0}^{(0)} + g_{m0}^{(0)} d_m^{(0)},$$

$$a_{mk}^{(0)} R_{mkr}^{(0)i}(1) = c_{mk}^{(0)} + g_{mk}^{(0)} d_m^{(0)}, a_{mk}^{(1)} R_{mkr}^{(1)i}(1) = c_{mk}^{(1)} + g_{mk}^{(1)} d_m^{(1)}, c_{10}^{(0)} = -f_{10}^{(0)} d_1^{(0)} - \frac{b^2}{2\omega^2} d_1^{(0)},$$

$$c_{00}^{(0)} = -g_{00}^{(0)} d_0^{(0)}, c_{m0}^{(0)} = \frac{4\omega^2 g_{m0}^{(0)} d_m^{(0)}}{\Omega_{m0}^{(0)2} - 4\omega^2}, c_{mk}^{(0)} = \frac{4\omega^2 g_{mk}^{(0)} d_m^{(0)}}{\Omega_{mk}^{(0)2} - 4\omega^2}, c_{mk}^{(1)} = \frac{4\omega^2 g_{mk}^{(1)} d_m^{(1)}}{\Omega_{mk}^{(1)2} - 4\omega^2},$$

$$\Omega_{m0}^{(0)2} = m(m^2 - 1), \Omega_{mk}^{(0)2} = \frac{m^2 - 1 + (2\pi kb)^2}{\rho_i \frac{R_{mk}^{(0)i}(1)}{R_{mkr}^{(0)i}(1)} - \rho_e \frac{R_{mk}^{(0)e}(1)}{R_{mkr}^{(0)e}(1)}}, \Omega_{mk}^{(1)2} = \frac{m^2 - 1 + (2k+1)^2 \pi^2 b^2}{\rho_i \frac{R_{mk}^{(1)i}(1)}{R_{mkr}^{(1)i}(1)} - \rho_e \frac{R_{mk}^{(1)e}(1)}{R_{mkr}^{(1)e}(1)}},$$

$$R_{mkr}^{(0)i}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(0)i}(r), R_{mkr}^{(1)i}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(1)i}(r), R_{mkr}^{(0)e}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(0)e}(r), R_{mkr}^{(1)e}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(1)e}(r).$$

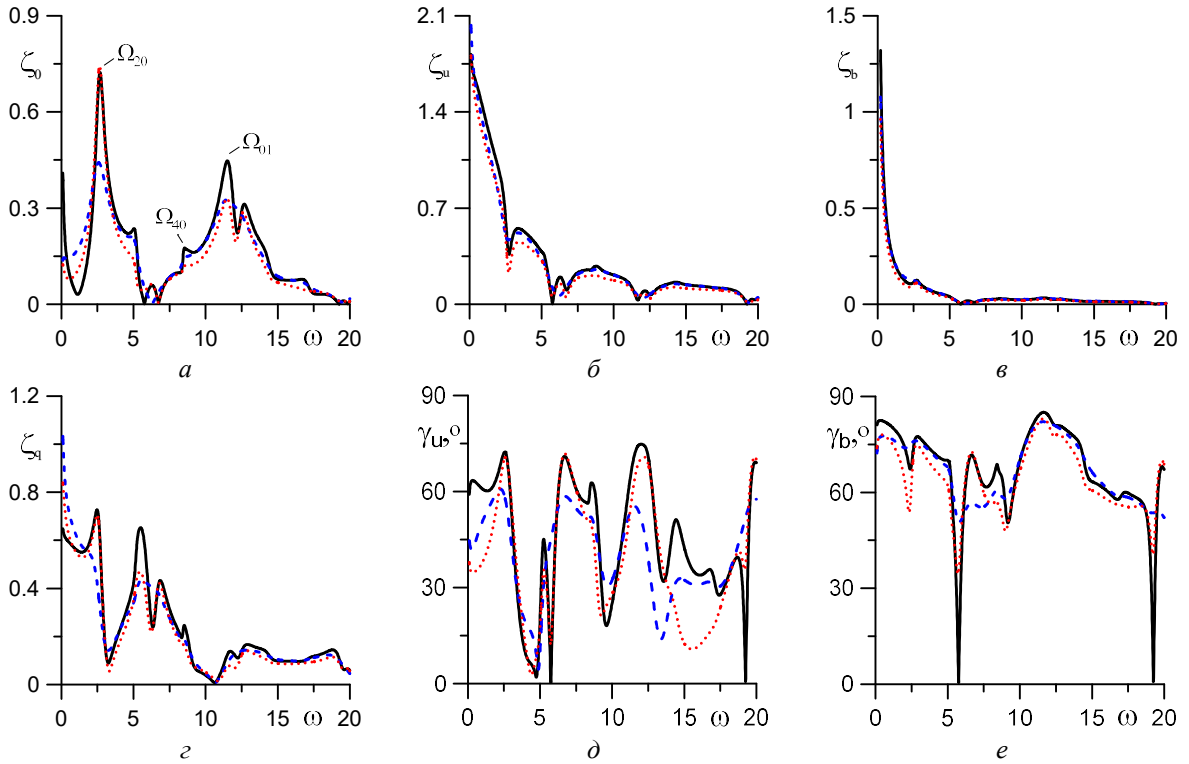


Рис. 2. Зависимость максимального отклонения: а – боковой поверхности ζ_0 ; б – контактной линии ζ_u ; в – контактной линии ζ_b ; г – поверхности капли ζ_v ; д, е – отклонения краевого угла γ от частоты ω для трех разных значений λ_b ($b=1.0$, $a=5.0$, $\rho_i=0.7$, $\lambda_u=1$, $\lambda_b=0.1$). НППП – пунктирная, ОПНП – штриховая, НПОП – сплошная линия

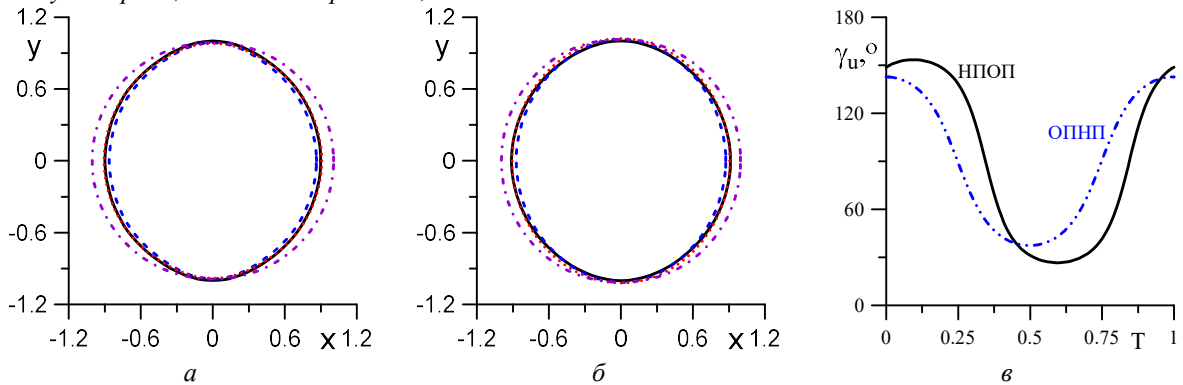


Рис. 3. Форма контактной линии $I+0.1\zeta(z,t)$ (а, б) и значение краевого угла γ_u (в) на верхней поверхности в разные моменты периода колебаний капли ($b=1.0$, $a=5.0$, $\rho_i=0.7$, $\lambda_u=1$, $\lambda_b=0.1$, $\omega=1$). Линии на а, б: $t=0$ – пунктирная, $t=0.125T$ – штриховая, $t=0.25T$ – штрих – пунктирная, $t=0.375T$ – сплошная

Внешняя сила будет возбуждать азимутальные моды вынужденных колебаний капли, которые появляются из разложения в ряд функции неоднородности электрического поля $f(\alpha)$ (5). Следовательно, если поле и пластины однородные, то у нас будут возбуждаться только осесимметричные колебания. Если пластины одинаковые, т.е. $\lambda_u = \lambda_b = \lambda$, то будут только нечётные гармоники осесимметричной моды [31]; если разные, то и нечётные, и чётные [32].

Для дальнейшего описания динамики боковой поверхности введём следующие обозначения:

$\zeta_u = |\zeta(0, 0.5, 0)|$ – амплитуда колебаний линии контакта на «верхней» пластине, $\zeta_b = |\zeta(0, -0.5, 0)|$ – на «нижней», $\zeta_0 = |\zeta(0, 0, 0)|$ – в центре слоя и при $z = 0.25$ – $\zeta_q = |\zeta(0, 0.25, 0)|$; значение краевого угла γ на верхней пластине – γ_u , а на нижней – γ_b . Частоты собственных колебаний Ω_{mk} , где m – азимутальное число, k – волновое число.

На рис. 2 показаны амплитуды колебаний боковой поверхности и краевых углов для рассматриваемых случаев неоднородности. Отметим, что мак-

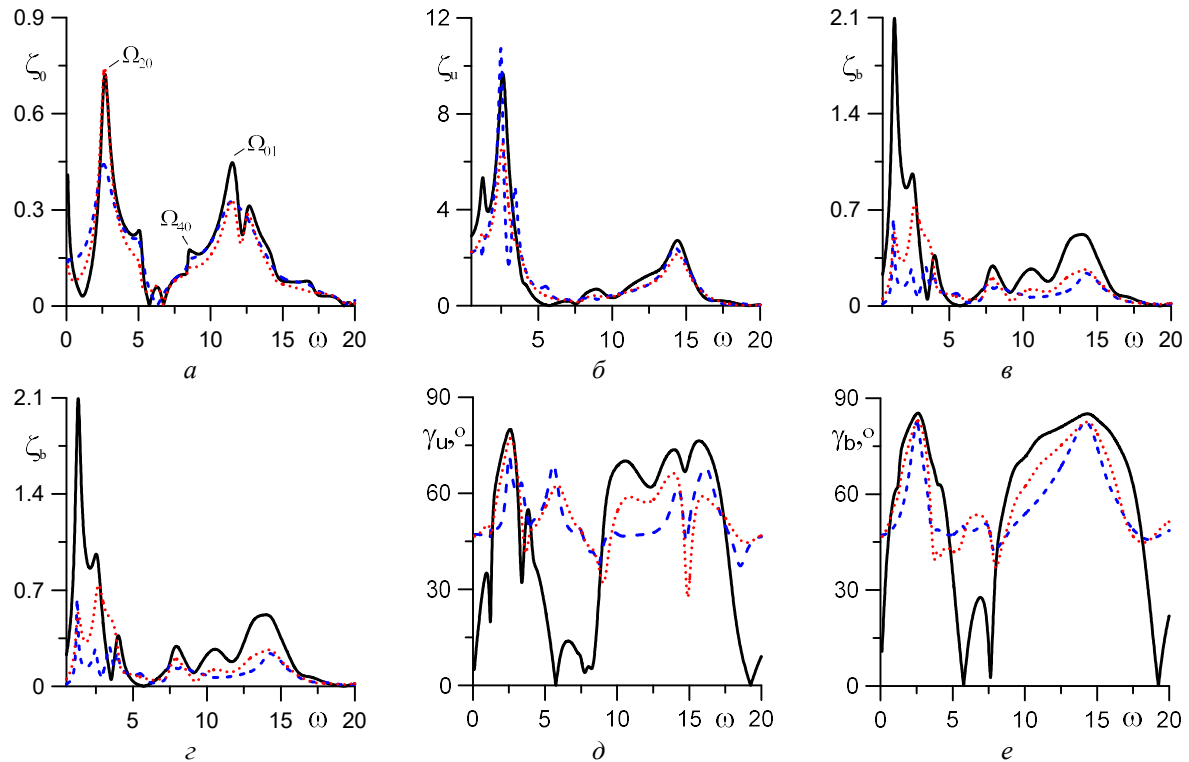


Рис. 4. Зависимость максимального отклонения: а – боковой поверхности ζ_0 ; б – контактной линии ζ_u ; в – контактной линии ζ_b ; г – поверхности капли ζ_q ; д, е – отклонения краевого угла γ от частоты ω для трех разных значений λ_b ($b=1.0$, $a=5.0$, $\rho_i=0.7$, $\lambda_u=10$, $\lambda_b=100$). НППП – пунктирная, ОПНП – штриховая, НПОП – сплошная линия

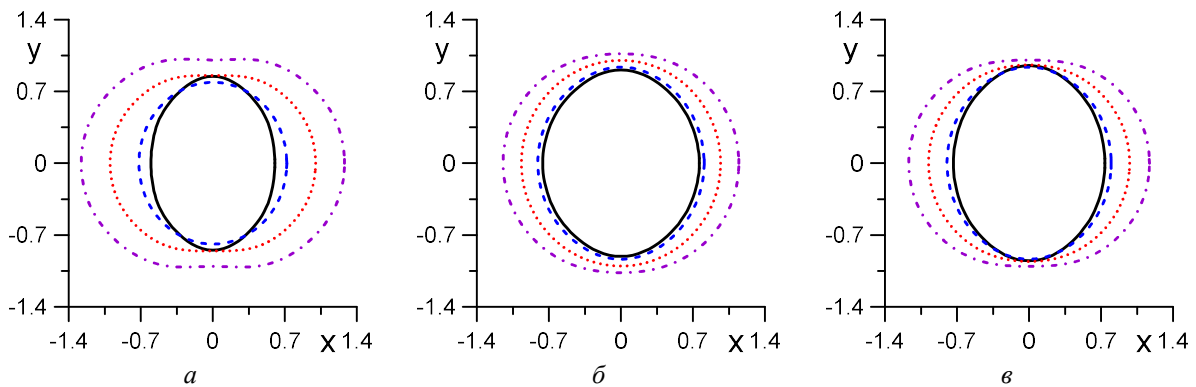


Рис. 5. Форма контактной линии $I+0.1\zeta(z,t)$ на верхней поверхности в разные моменты периода колебаний капли ($b=1.0$, $a=5.0$, $\rho_i=0.7$, $\lambda_u=10$, $\lambda_b=100$, $\omega=1$): а – НПОП; б – ОПНП; в – НППП; $t=0$ – пунктирная, $t=0.125T$ – штриховая, $t=0.25T$ – штрих – пунктирная, $t=0.375T$ – сплошная линия

симальные значения амплитуды колебаний достигаются в случае линейного резонанса. Двойные соседние пики соответствуют частотам четных и нечетных гармоник осесимметричной моды.

Параметр Хокинга описывает взаимодействие линии контакта с подложкой и, чем меньше его значение, тем сильнее взаимодействие. При $\lambda = 0$ – линия контакта неподвижна. Следовательно, при рассматриваемых значениях параметров $\lambda_a = 1$ и $\lambda_b = 0.1$ взаимодействие линии контакта с подложкой велико и основное влияние оказывает именно неоднородность поверхности (рис. 2). В результате, в случаях НПОП (сплошная линия) и ОПНП (пунктирная) появляются дополнительные резонансные пики по сравнению со случаем ОПНП (штриховая). Эти пики располагаются на частотах азимутальных мод, которые возбуждаются главным образом из-за неоднородности подложек. Неоднородность поля в данном случае не является основополагающей.

На рис. 3 показаны форма контактной линии капли на «верхней» пластине в разные моменты времени, а также значения краевого угла в течение периода для случаев НПОП и ОПНП. Формы линии контакта практически не отличаются (рис 3, а, б) в обоих случаях, и их указывают на наличие азимутальных мод в спектре вынужденных колебаний. Значения краевого угла отличаются незначительно (рис. 3, в).

С увеличением значения λ уменьшается сила взаимодействия линии контакта с подложкой, т.е. неоднородность электрического поля становится более значимой. С другой стороны, параметр Хокинга для рассматриваемой модели является эффективной амплитудой вибраций, что приводит к увеличению амплитуды колебаний. Таким образом, увеличение параметра Хокинга не вызывает в данном случае уменьшения влияния неоднородности подложки (рис. 4). В большинстве случаев видно наличие дополнительных пиков на частотах азимутальных мод. Это подтверждают и динамические формы линии контакта на рис. 5. Отметим, что в случае однородных пластин ОПНП (рис. 5, б) форма линии контакта наиболее близка к осесимметричной. Увеличение амплитуды в резонансе связано с уменьшением диссипации (см. рис. 2).

4. Заключение

Исследованы вынужденные колебания капли жидкости в плоском конденсаторе под действием переменного электрического поля. Рассмотрены три случая пространственной неоднородности поверхностей и внешнего поля. Параметры Хокинга для каждой отличались между собой, что приводит к появлению в спектре как нечетных гармоник осесимметричной моды, так и четных. Неоднород-

ности обуславливают возбуждение азимутальных мод и появление дополнительных резонансных пиков при любом типе неоднородности. Однако резонансные пики на частотах осесимметричной моды являются наиболее выраженными.

В используемой модели описания движения линии контакта основное влияние оказывает неоднородность подложки, которая приводит к неоднородной эффективной амплитуде вибраций. Следовательно, при возможном планировании эксперимента основной вклад необходимо уделять именно качеству поверхности подложек.

Исследование выполнено за счет гранта РФФИ № 20-31-90104.

Список литературы

1. Blake T. D., Clarke A., De Coninck J., De Ruijter M. J. Contact angle relaxation during droplet spreading: Comparison between molecular kinetic theory and molecular dynamics // *Langmuir*. 1997. V. 13 (7). P. 2164–2166.
2. Vafaei S., Podowski M.Z. Analysis of the relationship between liquid droplet size and contact angle // *J. Colloid Interface Sci.* 2005. V. 113 (2–3). P. 133–146.
3. Shklyaev S., Straube A. V. Linear oscillations of a hemispherical bubble on a solid substrate // *Phys. Fluids*. 2008. V. 20, 052102.
4. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V. Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop // *Phys. Fluids*. 2009. V. 21, 072104. DOI: 10.1063/1.3174446
5. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V., Shklyaev S. Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis // *Phys. Fluids*. 2011. V. 23, 102105.
6. Erbil H. Y. The debate on the dependence of apparent contact angles on drop contact area or three-phase contact line: A review // *Adv. Colloid Interface Sci.* 2012. V. 170 (1–2). P. 67–86.
7. Иванцов А. О. Акустические колебания полусферической капли // *Вестник Пермского университета. Серия: Физика*. 2012. Вып. 3 (21). С. 16–23.
8. Snoeijer J. H., Andreotti B. Moving contact lines: scales, regimes, and dynamical transitions // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2013. V. 45. P. 269–292. DOI: 10.1146/annurev-fluid-011212-140734
9. Bormashenko E. Variational framework for defining contact angles: a general thermodynamic approach // *J. Adhesion Sci. Tech.* 2020. V. 34 (2). P. 219–230.
10. Ren J., Duan F. Recent progress in experiments for sessile droplet wetting on structured surfaces // *Current Opinion in Colloid and Interface Science*. 2021. V. 53, 101425.
11. Воинов О. В. Гидродинамика смачивания // *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1976. № 5. С. 76–84.

12. Cox R. G. The dynamics of the spreading of liquids on a solid surface. Part 1. Viscous flow // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 168. P. 169–194. DOI: 10.1017/S0022112086000332
13. Hocking L. M. The damping of capillary–gravity waves at a rigid boundary // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 179. P. 253–266.
14. Hocking L. M. Waves produced by a vertically oscillating plate // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 179. P. 267–281. DOI: 10.1017/S0022112087001526
15. Пухначев В. В., Семенова И. Б. Модельная задача о внезапном движении линии трехфазного контакта // *Прикладная механика и техническая физика.* 1999. Т. 40, № 4. С. 51–61
16. Картавых Н. Н., Шкляев С. В. О параметрическом резонансе полуцилиндрической капли на осциллирующей твердой подложке // *Вестник Пермского университета. Серия: Физика.* 2007. Вып. 1(6). С. 23–28.
17. Bonn D., Eggers J., Indekeu J., Meunier J. Wetting and spreading // *Rev. Mod. Phys.* 2009. V. 81. P. 739–805. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.739
18. Xia Y., Steen P. H. Moving contact-line mobility measured // *J. Fluid Mech.* 2018. V. 841. P. 767–783.
19. Amberg G. Detailed modelling of contact line motion in oscillatory wetting // *npj Microgravity.* 2022. V. 8, 1. DOI: 10.1038/s41526-021-00186-0
20. Lippmann G. Relations entre les phénomènes électriques et capillaires // *Ann. Chim. Phys.* 1875. V. 5. P. 494–549.
21. Berge B. Electrocapillarite et mouillage de films isolants par l'eau // *Comptes Rendus Acad. Sci. II.* 1993. V. 317. P. 157–163.
22. Quilliet C. and Berge B. Electrowetting: A recent outbreak // *Curr. Opin. Colloid Interface Sci.* 2001. V. 6. P. 34–39.
23. Mugele F., Baret J. C. Electrowetting: from basics to applications // *J. Phys. Condens. Matter.* 2005. V. 17. P. 705–774.
24. Mugele F. Fundamental challenges in electrowetting: from equilibrium shapes to contact angle saturation and drop dynamics // *Soft Matter* 2009. V. 5. P. 3377–3384.
25. Klarman D., Andelman D., Urbakh M. A Model of Electrowetting, Reversed Electrowetting, and Contact Angle Saturation // *Langmuir* 2011. V. 27. N. 10. P. 6031–6041.
26. Zhao Y. -P., Wang Y. Fundamentals and Applications of Electrowetting: A Critical Review // *Rev. Adhesion Adhesives.* 2013. V. 1. P. 114–174.
27. Royal M. W., Jokerst N. M., Fair R. B. Droplet-based sensing: optical microresonator sensors embedded in digital electrowetting microfluidics systems // *IEEE Sensors Journal.* 2013. V. 13. P. 4733–4742
28. Chen L., Bonaccorso E. Electrowetting – from statics to dynamics // *Advances in Colloid and Interface Science* 2014. V. 210. P. 2–12
29. Teng P., Tian D., Fu H., Wang S. Recent progress of electrowetting for droplet manipulation: from wetting to superwetting systems // *Materials Chemistry Frontier.* 2020. V. 4. no. 1. P. 140–154. DOI: 10.1039/c9qm00458k
30. Barman S. R., Khan I., Chatterjee S., etc. Electrowetting-on-dielectric (EWOD): current perspectives and applications in ensuring food safety // *Journal of Food and Drug Analysis.* 2020. V. 28. N. 4. P. 595–621. DOI: 10.38212/2224-6614.1239
31. Alabuzhev A. A., Kashina M. A. The oscillations of cylindrical drop under the influence of a nonuniform alternating electric field // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2016. V. 681, 012042.
32. Alabuzhev A. A., Kashina M. A. Influence of surface properties on axisymmetric oscillations of an oblate drop in an AC electric field // *Radiophysics and Quantum Electronics.* 2019. V. 61. N. 8–9. P. 589–602
33. Алабузhev А. А., Кашина М. А. Динамика зажатой капли в неоднородном электрическом поле // *Вестник Пермского университета. Физика.* 2019. № 4. С. 33–43. DOI: 10.17072/1994-3598-2019-4-33-43
34. Kashina M. A., Alabuzhev A. A. The forced oscillations of an oblate drop sandwiched between different inhomogeneous surfaces under AC vibrational force // *Microgravity Science and Technology.* 2021. V. 33. N. 3, 35. DOI: 10.1007/s12217-021-09886-4
35. Алабузhev А. А., Любимов Д. В. Влияние динамики контактной линии на собственные колебания цилиндрической капли // *Прикладная механика и техническая физика.* 2007. Т. 486. № 5. С. 78–86.
36. Alabuzhev A. A. Influence of heterogeneous plates on the axisymmetrical oscillations of a cylindrical drop // *Microgravity Sci. Technol.* 2018. V. 30, N. 1–2. P. 25–32.
37. Алабузhev А. А. Осесимметричные колебания цилиндрической капли с подвижной контактной линией // *Прикладная механика и техническая физика.* 2016. Т. 57. № 6. С. 53–63
38. Алабузhev А. А. О влиянии внутреннего давления на колебания цилиндрического газового пузырька // *Вестник Пермского университета. Физика.* 2020. № 4. С. 51–62. doi: 10.17072/1994-3598-2020-4-51-62

References

1. Blake T. D., Clarke A., De Coninck J., De Ruijter M. J. Contact angle relaxation during droplet spreading: Comparison between molecular kinetic theory and molecular dynamics. *Langmuir*, 1997, vol. 13 (7), pp. 2164–2166.
2. Vafaei S., Podowski M. Z. Analysis of the relationship between liquid droplet size and contact

- angle. *J. Colloid Interface Sci.* 2005, vol. 113 (2–3), pp. 133–146.
3. Shklyaev S., Straube A. V. Linear oscillations of a hemispherical bubble on a solid substrate. *Phys. Fluids.* 2008, vol. 20, pp. 052102.
 4. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V. Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop. *Phys. Fluids.* 2009, vol. 21, 072104. DOI: 10.1063/1.3174446
 5. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V., Shklyaev S. Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis. *Phys. Fluids.* 2011, vol. 23, 102105.
 6. Erbil H. Y. The debate on the dependence of apparent contact angles on drop contact area or three-phase contact line: A review. *Adv. Colloid Interface Sci.* 2012, vol. 170 (1–2), pp. 67–86.
 7. Ivantsov A. O. Acoustic oscillations of semispherical drop. *Bulletin of Perm University. Physics.* 2012. no. 3 (21). pp. 16–23 (In Russian).
 8. Snoeijer J.H., Andreotti B. Moving contact lines: scales, regimes, and dynamical transitions. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2013. Vol. 45, pp. 269–292. DOI: 10.1146/annurev-fluid-011212-140734
 9. Bormashenko E. Variational framework for defining contact angles: a general thermodynamic approach. *J. Adhesion Sci. Tech.* 2020, vol. 34 (2), pp. 219–230.
 10. Ren J., Duan F. Recent progress in experiments for sessile droplet wetting on structured surfaces. *Current Opinion in Colloid and Interface Science.* 2021, vol. 53, 101425.
 11. Voinov O. V. Hydrodynamics of wetting. *Fluid Dynamics.* 1976, vol. 11, pp. 714–721.
 12. Cox R. G. The dynamics of the spreading of liquids on a solid surface. Part 1. Viscous flow. *J. Fluid Mech.* 1986, vol. 168, pp. 169–194. DOI: 10.1017/S0022112086000332
 13. Hocking L. M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 179, pp. 253–266.
 14. Hocking L. M. Waves produced by a vertically oscillating plate. *J. Fluid Mech.* 1987, vol. 179, pp. 267–281. DOI: 10.1017/S0022112087001526
 15. Pukhnachev V. V., Semenova I. B. Model problem of instantaneous motion of a three-phase contact line. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1999, vol. 40. no. 4, pp. 594–603. DOI: 10.1007/BF02468433
 16. Kartavich N. N., Shklyaev S., vol. On the parametric resonance of a semi-cylindrical drop on an oscillating solid substrate. *Bulletin of Perm University. Series: Physics.* 2007. no. 1(6), pp. 23–28. (In Russian).
 17. Bonn D., Eggers J., Indekeu J., Meunier J. Wetting and spreading. *Rev. Mod. Phys.* 2009, vol. 81, pp. 739–805. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.739
 18. Xia Y., Steen P. H. Moving contact-line mobility measured. *J. Fluid Mech.*, 2018, vol. 841, pp. 767–783.
 19. Amberg G. Detailed modelling of contact line motion in oscillatory wetting. *npj Microgravity*, 2022, vol. 8, 1. DOI: 10.1038/s41526-021-00186-0
 20. Lippmann G. Relations entre les phénomènes électriques et capillaires. *Ann. Chim. Phys.*, 1875, vol. 5, pp. 494–549.
 21. Berge B. Electrocapillarité et mouillage de films isolants par l'eau. *Comptes Rendus Acad. Sci. II.* 1993, vol. 317, pp. 157–163.
 22. Quilliet C. and Berge B. Electrowetting: A recent outbreak. *Curr. Opin. Colloid Interface Sci.*, 2001, vol. 6, pp. 34–39.
 23. Mugele F., Baret J. C. Electrowetting: from basics to applications. *J. Phys.: Condens. Matter.* 2005, vol. 17, pp. 705–774.
 24. Mugele F. Fundamental challenges in electrowetting: from equilibrium shapes to contact angle saturation and drop dynamics. *Soft Matter* 2009, vol. 5, pp. 3377–3384.
 25. Klarman D., Andelman D., Urbakh M. A Model of electrowetting, reversed electrowetting, and contact angle saturation. *Langmuir*, 2011, vol. 27, no. 10, pp. 6031–6041.
 26. Zhao Y. -P., Wang Y. Fundamentals and applications of electrowetting: a critical review. *Rev. Adhesion Adhesives.* 2013, vol. 1, pp. 114–174.
 27. Royal M. W., Jokerst N. M., Fair R. B. Droplet-based sensing: optical microresonator sensors embedded in digital electrowetting microfluidics systems. *IEEE Sensors Journal.* 2013, vol. 13, pp. 4733–4742.
 28. Chen L., Bonaccorso E. Electrowetting – from statics to dynamics. *Advances in Colloid and Interface Science* 2014, vol. 210, pp. 2–12.
 29. Teng P., Tian D., Fu H., Wang S. Recent progress of electrowetting for droplet manipulation: From wetting to superwetting systems. *Materials Chemistry Frontier.* 2020, vol. 4. no. 1, pp. 140–154. DOI: 10.1039/c9qm00458k
 30. Barman S. R., Khan I., Chatterjee S., et al. Electrowetting-on-dielectric (EWOD): Current perspectives and applications in ensuring food safety. *Journal of Food and Drug Analysis.* 2020, vol. 28. no. 4, pp. 595–621. DOI: 10.38212/2224-6614.1239
 31. Alabuzhev A. A., Kashina M. A. The oscillations of cylindrical drop under the influence of a nonuniform alternating electric field. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2016, vol. 681, 012042.
 32. Alabuzhev A. A., Kashina M. A. Influence of surface properties on axisymmetric oscillations of an oblate drop in an AC electric field. *Radiophysics and Quantum Electronics.* 2019, vol. 61. no. 8–9, pp. 589–602.
 33. Alabuzhev A. A., Kashina M. A. Dynamics of a drop under the influence of an inhomogeneous electric field. *Bulletin of Perm University. Physics.*

2019. no. 4. pp. 33–43. doi: 10.17072/1994-3598-2019-4-33-43.
34. Kashina M. A., Alabuzhev A. A. The forced oscillations of an oblate drop sandwiched between different inhomogeneous surfaces under AC vibrational force. *Microgravity Science and Technology*. 2021, vol. 33. no 3, 35. DOI: 10.1007/s12217-021-09886-4
35. Alabuzhev A. A., Lyubimov D. V. Effect of the contact-line dynamics on the natural oscillations of a cylindrical droplet. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2007, vol. 48, pp. 686–693. DOI: 10.1007/s10808-007-0088-6.
36. Alabuzhev A. A. Influence of heterogeneous plates on the axisymmetrical oscillations of a cylindrical drop. *Microgravity Sci. Technol.*, 2018, vol. 30, no. 1–2, pp. 25–32.
37. Alabuzhev A. A. Axisymmetric oscillations of a cylindrical droplet with a moving contact line. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, no. 6, pp. 53–63.
38. Alabuzhev A. A. Effect of the internal pressure on oscillations of a cylindrical gas bubble. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2020, no. 4, pp. 51–62. doi: 10.17072/1994-3598-2020-4-51-62 (In Russian).

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Алабужев А. А., Пьянкова М. А. Влияние пространственной неоднородности подложек и электрического поля на динамику зажатой капли // Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 2. С. 56–65. doi: 10.17072/1994-3598-2022-2-56-65

Please cite this article in English as:

Alabuzhev A. A., Pyankova M. A. Influence of surface properties on the dynamics of a clamped drop in an inhomogeneous electric field. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2022, no. 2, pp. 56–65. doi: 10.17072/1994-3598-2022-2-56-65

Сведения об авторах

1. Алексей Анатольевич Алабужев, канд. физ.-мат. наук, доц., с.н.с., Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013; профессор кафедры теоретической физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614990.
2. Марина Анатольевна Пьянкова, аспирант, инженер-исследователь, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013.

Author information

1. Alexey A. Alabuzhev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia; Professor, Department of Theoretical Physics, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
2. Marina A. Pyankova, Postgraduate Student, Research Engineer, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia