

УДК 538.91; 537.638  
PACS 64.60.De, 64.60.Mu

## Низкотемпературный антиферромагнетизм в модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями

К. Б. Циберкин

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: kbtsiberkin@psu.ru

Выполнено исследование равновесных состояний и спиновых конфигураций модели Изинга на квадратной решётке с учётом конкурирующих взаимодействий в двух координационных сферах. Наиболее подробно рассмотрен случай с ферромагнитным взаимодействием ближайших соседей (по вертикали и горизонтали) и антиферромагнитным – во второй координационной сфере (ближайшие диагональные узлы решётки). Численное моделирование, выполненное на основе алгоритма Метрополиса для решётки  $128 \times 128$  узлов с периодическими граничными условиями, показывает, что при низких температурах помимо состояния насыщения благодаря антиферромагнитному взаимодействию возможна реализация метастабильного состояния с разбиением системы на отдельные домены с противоположной ориентацией спинов. Размер доменов увеличивается с ростом температуры до тех пор, пока они не охватывают всю область моделирования. Антиферромагнитное взаимодействие во втором порядке также приводит к снижению температуры Кюри материала. В результате при достаточно большой интенсивности этого вклада система переходит из состояния с разбиением на домены сразу в неупорядоченное ферромагнитное состояние – насыщение при этом не реализуется. Для системы с антиферромагнитным взаимодействием в первой координационной сфере дополнительная промежуточная фаза не выявляется, и наблюдается только изменение температуры Нееля.

**Ключевые слова:** модель Изинга; РККИ взаимодействие; магнитные фазовые переходы

*Поступила в редакцию 31.05.2021; после рецензии 08.06.2021; принята к опубликованию 09.06.2021*

## Low-temperature antiferromagnetism of Ising model with competing interactions

K. B. Tsiberkin

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: kbtsiberkin@psu.ru

The paper presents a numerical analysis of equilibrium state and spin configuration of square lattice Ising model with competing interaction. The most detailed description is given for case of ferromagnetic interaction of the first-order neighbours and antiferromagnetic coupling of the second-order neighbours. The numerical method is based on Metropolis algorithm. It uses  $128 \times 128$  lattice with periodic boundary conditions. At first, the simulation results show that the system is in saturation state at low temperatures, and it turns into paramagnetic state at the Curie point. The competing second-order interaction makes possible the domain structure realization. This state is metastable, because its energy is higher than saturation energy. The domains are small at low temperature,

and their size increases when temperature is growing until the single domain occupies the whole simulation area. In addition, the antiferromagnetic coupling of the second-order neighbours reduces the Curie temperature of the system. If it is large enough, the lattice has no saturation state. It turns directly from the domain state into paramagnetic phase. There are no extra phases when the system is antiferromagnetic in main order, and only the Neel temperature shift realizes here.

**Keywords:** Ising model; RKKY interaction; magnetic phase transitions

Received 31.05.2021; revised 08.06.2021; accepted 09.06.2021

doi: 10.17072/1994-3598-2021-2-64-71

## 1. Введение

Изучение систем с конкурирующими взаимодействиями является важным направлением современной физики конденсированного состояния. Фундаментальные особенности поведения магнитных материалов, в которых имеет наблюдается как ферромагнитное, так и антиферромагнитное взаимодействия, существенны для проектирования разнообразных активных электронных компонентов, управляемых магнитным полем или передающим информацию посредством спиновых токов [1, 2]. Подобная конфигурация с чередованием величины и знака взаимодействий реализуется, к примеру, в материалах, где магнитные ионы в диэлектрическом парамагнитном массиве связаны знакопеременным взаимодействием типа РККИ.

Эффективным подходом к описанию критических свойств и равновесных фаз магнетиков, а также бинарных сплавов и ряда других систем является построение и анализ универсальных решёточных моделей, таких, как модель Изинга и её аналоги [3, 4]. В литературе широко представлены результаты численных и аналитических исследований модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на квадратной решётке, дереве Кэли и решётке Бете. Отмечается, что помимо парамагнитной и упорядоченной фазы, а системе может реализовываться фактически бесконечное число дополнительных фаз со сложным чередованием ориентации спинов. Например, подробно описаны так называемые суперантиферромагнитные фазы с порядком типа  $\uparrow\downarrow\downarrow$ ,  $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$  и др. [5–9]. Дополнительные равновесные фазы иногда трактуются как хаотическое поведение системы [8]. Тем не менее конкретные закономерности переходов между фазами со сложным упорядочением остаются невыявленными.

В настоящей работе с применением метода Монте-Карло и алгоритма Метрополиса проведено численное моделирование равновесных состояний системы Изинга на квадратной двумерной решётке в отсутствие внешнего поля. Варьирование начального условия метода Монте-Карло позволяет добиться реализации при низких температурах как однородно упорядоченного состояния, так и

фазы с разбиением на домены, размер которых возрастает по мере увеличения температуры. Далее происходит переход системы в состояние насыщения, которое разрушается при высокой температуре, и решётка становится парамагнитной. Характерный размер наблюдаемых при низкой температуре доменов составляет единицы и десятки ячеек решётки.

## 2. Двумерная модель Изинга

Формулировка рассматриваемой задачи основывается на проблеме изучения свойств системы магнитных моментов с величиной спина 1/2, внедрённых в проводящую систему и связанных взаимодействием типа РККИ [10–13]. Гамильтониан такой спиновой системы в отсутствие внешнего магнитного в общем случае имеет простой вид:

$$\hat{H} = -\sum_{j \neq k} J_{jk} \hat{S}_j \cdot \hat{S}_k, \quad (1)$$

где  $S_j$  – оператор спина на узле с номером  $j$ ,  $J_{jk}$  – энергия обменного взаимодействия. В рассматриваемой задаче предполагается, что она имеет следующий вид:

$$J_{jk} = C \frac{x_{jk} \cos x_{jk} - \sin x_{jk}}{x_{jk}^4}, \quad (2)$$

$$x_{jk} = 2k_F r_{jk},$$

где  $C$  – параметр интенсивности взаимодействия,  $k_F$  – импульс Ферми электронов проводимости,  $r_{jk}$  – расстояние между ионами  $j$  и  $k$ . Принято, для упрощения, что ионы магнитной примеси образуют упорядоченную решётку с характерным периодом, сопоставимым или большим периода основной кристаллической решётки материала.

Поскольку величина обменной энергии (2) убывает с расстоянием по кубическому закону, для корректного описания свойств рассматриваемой системы требуется учесть не только взаимодействие ближайших соседей в ансамбле ионов магнитной примеси, но и влияние следующих координационных сфер. При этом величина взаимодействия, отвечающего каждой координационной сфере, меняется в зависимости от концен-

трации примеси как по величине, так и по знаку. Это определяет существование в решётке конкурирующих ферромагнитных (ФМ) и антиферромагнитных (АФМ) взаимодействий, которые могут приводить к реализации различных типов магнитного упорядочения в ансамбле ионов примеси.

Наглядное и детальное представление о свойствах системы (1) может дать модель Изинга, в которой спиновые операторы заменяются целочисленными величинами  $\sigma_j$ , принимающими только значения  $\pm 1$  [3]:

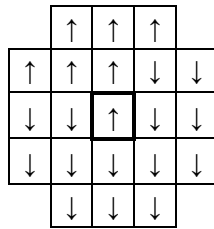
$$\hat{H} = -\sum_{j \neq k} J_{jk} \sigma_j \sigma_k. \quad (3)$$

Эта модель подробно изучена для различных структур решётки и может быть эффективно исследована численными методами типа Монте-Карло. Простой в реализации и в то же время обеспечивающей достоверные качественные результаты, в том числе описание фазовых переходов в магнетике, является двумерная модель.

Ниже представлены численные результаты, полученные для двумерной модели на квадратной решётке, с учётом двух координационных сфер при различных комбинациях величины и знака взаимодействий разного порядка. Отдельные расчёты проведены с учётом трёх координационных сфер. Гамильтониан такой системы:

$$\hat{H} = -J_0 \left[ \sum_{\langle j \neq k \rangle} \sigma_j \sigma_k + \gamma_2 \sum_{\langle\langle j \neq k \rangle\rangle} \sigma_j \sigma_k + \gamma_3 \sum_{\langle\langle\langle j \neq k \rangle\rangle\rangle} \sigma_j \sigma_k + \dots \right], \quad (4)$$

где  $J_0$  – параметр интенсивности обменного взаимодействия ближайших ионов,  $\gamma_j$  – нормированные на  $J_0$  интенсивности взаимодействия в последующих порядках.



**Рис. 1.** Базовый элемент квадратной решётки модели Изинга с учётом соседей до четвёртого порядка в одной из возможных конфигураций

Численное моделирование выполнено стандартным алгоритмом Метрополиса [14], адаптированным к учёту нескольких координационных сфер решётки. Алгоритм реализован на языке FORTRAN-90. Элемент квадратной решётки, содержащий узлы вплоть до 4-го порядка, показан на рис. 1. При перевороте центрального спина реали-

зуется одно из 21 возможного значения изменения энергии решётки, определяемое конфигурацией внешних узлов. Все они заранее вычисляются для ускорения работы алгоритма.

Моделирование спиновой системы производилось на квадратной решётке размерами  $128 \times 128$  ячеек с периодическими граничными условиями. Для каждого значения температуры задавалось случайное начальное распределение ориентации спинов и были реализованы  $2^{14}$  шагов метода Монте-Карло. Расчёты критических температур фазовых переходов и равновесных спиновых конфигураций с учётом взаимодействия только ближайших соседей подтверждают корректность работы реализованного алгоритма как в случае ФМ, так и АФМ взаимодействия. Дополнительно были выполнены тестовые расчёты с  $2^{13}$  и  $2^{16}$  шагов метода Монте-Карло и выявлено, что вычисленное значение энергии системы на использованной решётке стабилизируется уже после  $2^{13}$  шагов с точностью не хуже 10 %.

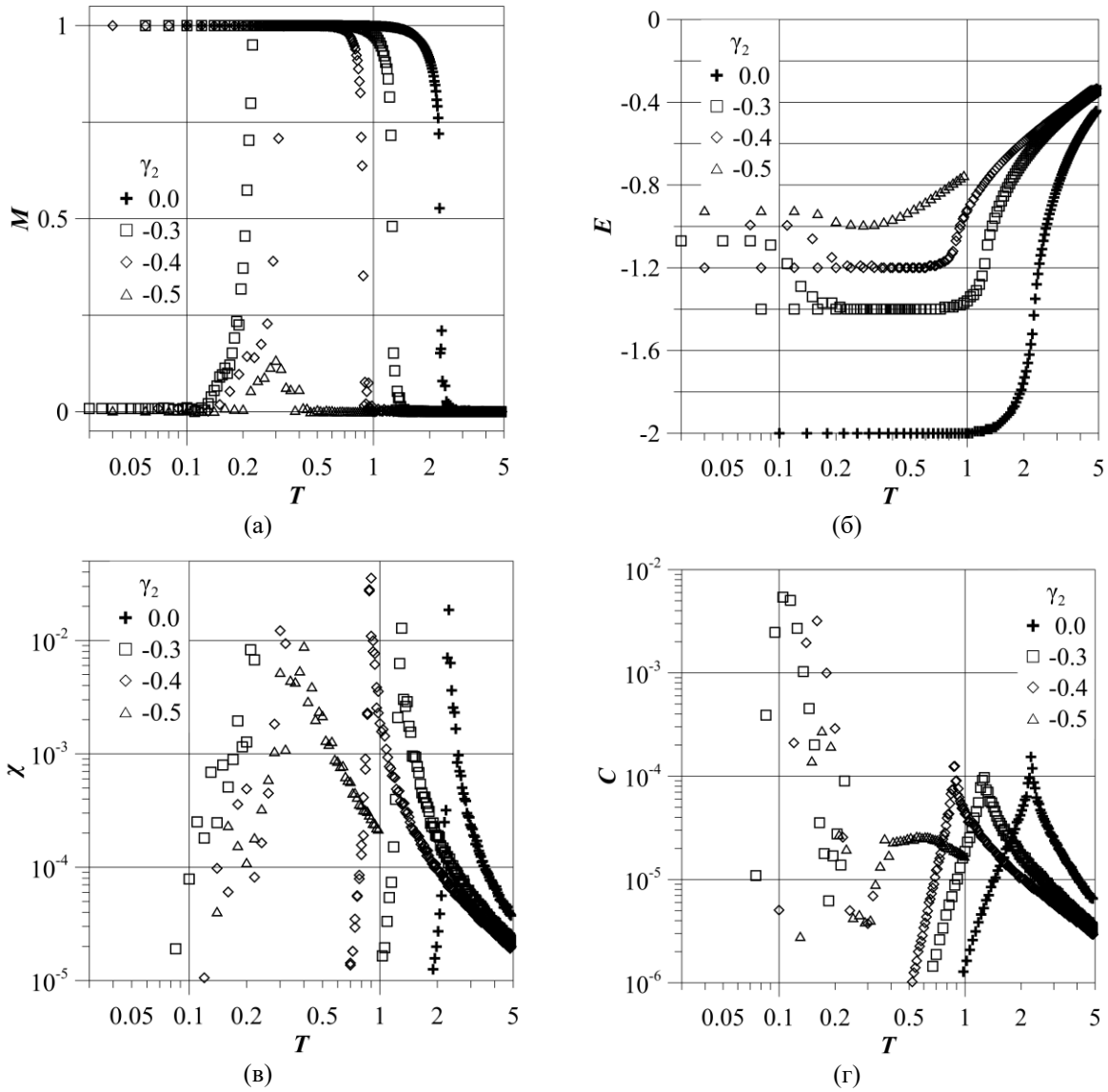
### 3. Магнитные фазовые переходы

#### 3.1. Ферромагнитное взаимодействие

При значении параметра интенсивности  $C > 0$  ближайшие ионы примеси взаимодействуют ферромагнитным образом. В пренебрежении следующими порядками в системе реализуется стандартная картина с фазовым переходом «ферромагнетик – парамагнетик (ПМ)» при безразмерной критической температуре Кюри  $T_c \approx 2.27$  ( $J_0 = 1$ ; рис. 2). Здесь и далее температура измеряется в безразмерных единицах отношения  $J/k_B$  ( $k_B$  – постоянная Больцмана). При  $\gamma_2 > 0$  критическая температура системы увеличивается, однако качественные изменения в температурной зависимости намагниченности и внутренней энергии не наблюдаются.

Учёт АФМ взаимодействия во второй координационной сфере ( $\gamma_2 < 0$ ) приводит к снижению критической температуры перехода из ФМ фазы в ПМ (см. рис. 2). Если в качестве начального условия для системы используется однородно намагниченное состояние, то оно является устойчивым и сохраняется во всей области температур ниже  $T_c$ .

В области малых температур наблюдается метастабильное состояние с нулевой или промежуточной намагниченностью. Оно обнаруживается при задании случайного распределения ориентации спинов на решётке и не проявляется при  $\gamma_2 = 0$ . Температура перехода между метастабильным состоянием и магнитным насыщением  $T_a$  возрастает по мере увеличения абсолютного значения  $\gamma_2$ . При  $\gamma_2 \approx -0.5$  она совпадает с точкой перехода «ФМ – ПМ», и система уже не достигает состояния насыщения. Гистерезис при движении в сторону увеличения или изменения температуры в пределах точности моделирования не выявляется.



**Рис. 2.** Рассчитанные температурные зависимости равновесных параметров модели Изинга на квадратной решётке с основным ФМ взаимодействием ближайших соседей ( $\gamma_2 = 0.0$ ) и АФМ взаимодействием во второй координационной сфере, в отсутствие внешнего поля: а – намагниченность; б – средняя энергия; в – магнитная восприимчивость; г – теплоёмкость

**Таблица 1.** Границы существования различных фаз в модели Изинга с конкурирующими ФМ и АФМ взаимодействиями, квадратная решётка  $128 \times 128$

$\gamma_2$	$T_c$	$T_a$
0.0	2.27	–
–0.1	1.99	0.06
–0.2	1.64	0.09
–0.3	1.28	0.14
–0.4	0.89	0.18
–0.5	0.38	0.36

В таблице 1 приведены значения безразмерной температуры описанных переходов в зависимости от величины параметра  $\gamma_2$ . В первом приближении

они могут быть аппроксимированы линейными функциями:

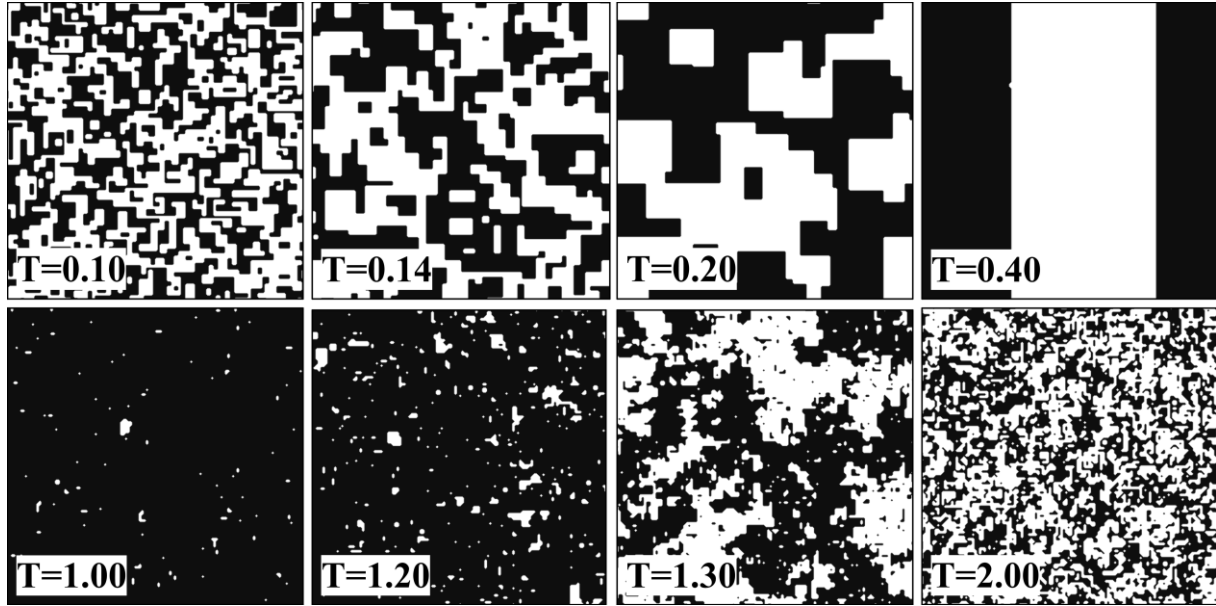
$$\begin{aligned} T_c &\approx 3.80\gamma_2 + 2.36, & R^2 > 0.99, \\ T_a &\approx -0.589\gamma_2, & R^2 \approx 0.87. \end{aligned} \tag{5}$$

Точка пересечения этих зависимостей:

$$\gamma_{2,crit} \approx -0.538 \tag{6}$$

определяет предельное значение  $\gamma_2$ , при котором конкуренция двух взаимодействий полностью подавляет реализацию состояния с ненулевой намагниченностью.

На рис. 3 показаны типичные равновесные конфигурации спинов, рассчитанные при  $\gamma_2 = -0.3$ . При низких температурах реализуется либо насыщение, либо чёткая структура из доменов противо-



**Рис. 3.** Последовательность равновесных конфигураций модели Изинга при учёте взаимодействий первого и второго порядка при  $\gamma_2 = -0.3$ ; случайная начальная ориентация спинов

положительной намагниченности, соответственно – при однородном или случайном начальном состоянии системы. АФМ взаимодействие приводит к разбиению решётки на отдельные домены с противоположными ориентациями намагниченности. Доменная структура реализуется в среднем уже после  $2^{14}$  итераций численного метода и остаётся устойчивой при продолжении расчёта как минимум до  $2^{16}$  итераций.

Из рис. 3 видно, что размер доменов увеличивается с ростом температуры. Это происходит до тех пор, пока энергия системы, разбитой на домены, не совпадёт с энергией однородного состояния насыщения. Далее тепловые флуктуации приводят к разрушению этого состояния и переходу в неупорядоченную ПМ фазу. Характерной отличительной особенностью описываемой системы является рост размера доменов с ростом температуры. В системе с только ферромагнитным взаимодействием при низких температурах доминирует состояние насыщения, и размер доменов, напротив, уменьшается по мере приближения к точке Кюри. Как отмечено выше, состояние с разбиением на домены в данной системе является метастабильным и не отвечает глобальному минимуму энергии.

Равновесное значение размера доменов может быть определено из условия минимума суммарной энергии системы, включающей энергию насыщения  $E_s$ , энергию собственного магнитного поля  $E_M$ , создаваемого решёткой во внешней области, и доменных границ  $E_w$ . Их удельные значения (на один узел решётки), соответственно, могут быть оценены следующим образом [15]:

$$\begin{aligned} E_s &= -\frac{J_0}{2}(Z + \gamma_2 Z_2), \\ E_M &= M^2 \rho, \\ E_w &= J_0 \left(1 + \frac{1}{2} \gamma_2 Z_2\right) \frac{\lambda}{\rho^{1/2}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $Z, Z_2$  – первое и второе координационные числа решётки (для квадратной – оба равны 4),  $M$  – равновесная намагниченность внутри домена,  $\rho = n/N$  – относительный размер доменов, включающих в среднем  $n$  узлов решётки,  $\lambda \sim 4/N^{1/2}$  – параметр, характеризующий средний периметр доменов.

Минимум суммарной удельной энергии достигается при среднем размере домена:

$$\rho^* = \left[ \frac{J_0 \lambda}{2M^2} \left(1 + \frac{\gamma_2 Z_2}{2}\right) \right]^{2/3}. \quad (8)$$

Видно, что при  $\gamma_2 < 0$  равновесный размер домена уменьшается по отношению к системе, где имеется только ФМ взаимодействие. Очевидно, что критическое значение параметра  $\gamma_2$ , при котором доменная структура становится соизмерима с постоянной решётки, имеет величину порядка

$$\gamma_{2,crit} \sim -\frac{2}{Z_2}, \quad (9)$$

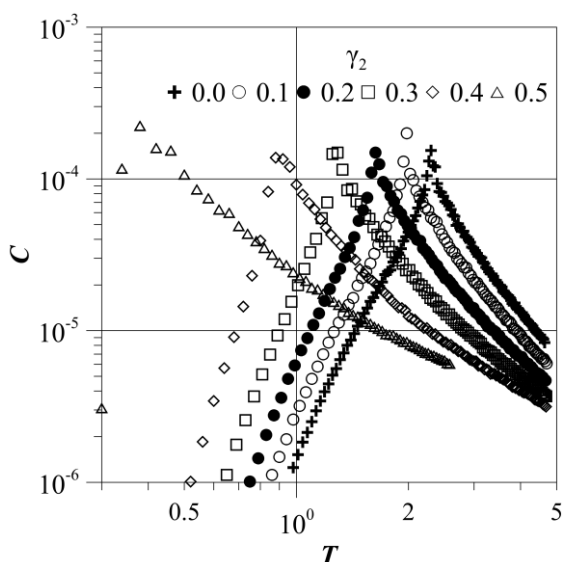
для квадратной решётки оно равно  $-0.5$ . Эта оценка согласуется со значением (6), характеризующим границу исчезновения упорядоченного состояния системы.

Учёт следующих порядков взаимодействия приводит к уточнению критической температуры описываемых фазовых переходов. Наиболее чув-

ствительным к этому является переход из ФМ в ПМ состояние. Дополнительные фазы и переходы при этом в ходе численного моделирования не были выявлены.

### 3.2. Антиферромагнитное взаимодействие

Исследование системы, в которой доминирует АФМ взаимодействие, выполнено аналогично предыдущим расчётам. В этом случае при  $C < 0$  и пренебрежении взаимодействием следующих порядков в системе реализуется переход «АФМ–ПМ» с температурой Нееля  $T_N \approx 2.3$  при  $J_0 = -1$ . Рисунок 4 для наглядности показывает только температурные зависимости теплоёмкости – точка фазового перехода наиболее выражена именно на этой кривой. Здесь в качестве начального состояния для метода Монте-Карло задавалась однородная антиферромагнитная структура с шахматным чередованием значений спина  $\pm 1$ .



**Рис. 4.** Рассчитанные температурные зависимости удельной теплоёмкости модели Изинга на квадратной решётке с основным АФМ взаимодействием ближайших соседей ( $\gamma_2 = 0.0$ ) и ФМ взаимодействием во второй координационной сфере ( $\gamma_2 = 0.1 \div 0.5$ ) в отсутствие внешнего поля

**Таблица 2.** Рассчитанная температура Нееля в модели Изинга с АФМ и ФМ взаимодействиями, решётка  $128 \times 128$

$\gamma_2$	$T_N$
0.0	2.29
0.1	1.97
0.2	1.64
0.3	1.29
0.4	0.90
0.5	0.37

Видно, что по мере роста  $\gamma_2 > 0$  критическая температура системы постепенно уменьшается. Качественные изменения в структуре равновесного состояния при варьировании  $\gamma_2$  не наблюдаются. Дополнительные фазовые переходы при доминировании в системе антиферромагнитного взаимодействия не выявляются. Значения температуры Нееля для различных  $\gamma_2$  приведены в таблице 2, а их аппроксимация линейной зависимостью выглядит следующим образом:

$$T_N \approx -3.76\gamma_2 + 2.35, \quad R^2 > 0.99. \quad (10)$$

Благодаря свойствам симметрии модели Изинга значения критической температуры с высокой точностью совпадают с  $T_c$  для ферромагнитной системы (с поправкой на изменение знака  $\gamma_2$ , относительное различие зависимостей (5) и (10) не превышает 3 % в рассмотренном интервале значений параметров), что дополнительно подтверждает корректность работы численного метода. Величина удельной теплоёмкости системы также совпадает с ФМ случаем (ср. рис. 2, 3 и рис. 4).

Варьирование начального условия в ходе моделирования не позволило достоверно установить существование в системе дополнительного метастабильного состояния в отличие от описанной выше системы с ферромагнитным взаимодействием ближайших соседей.

## 4. Заключение

Проведённое моделирование системы Изинга с конкурирующими ФМ и АФМ взаимодействиями при отсутствии внешнего поля демонстрирует существование дополнительной фазы с энергией, промежуточной между состоянием насыщения и парамагнитной фазой. Благодаря АФМ взаимодействию во второй координационной сфере в ферромагнитной системе реализуется разбиение на домены. Существенной особенностью доменной структуры при этом является их увеличение с ростом температуры до тех пор, пока материал не переходит полностью в состояние насыщения.

При АФМ-взаимодействии между ближайшими соседями дополнительное ФМ-взаимодействие в следующем порядке не приводит к изменению структуры системы – в выполненных численных экспериментах наблюдается только сдвиг критической температуры перехода из упорядоченного в парамагнитное состояние.

Полученные результаты позволяют получать системы магнитных моментов на проводящей подложке с заранее спрогнозированной температурой фазового перехода в парамагнитное состояние. Существование устойчивой доменной структуры и более сложных картин упорядочения материала демонстрирует потенциальную возможность применения системы с конкурирующими взаимодей-

ствиями (например, РККИ) для разработки систем хранения и передачи информации. Тот факт, что равновесный размер домена уменьшается при низкой температуре, позволяет повысить плотность записи информации в ячейках памяти посредством их охлаждения.

Техническим ограничением в этом направлении выступает относительно низкая критическая температура РККИ-систем. Например, характерная энергия взаимодействия в системе магнитных атомов на углеродной подложке между ближайшими соседями составляет единицы мэВ, что определяет критическую температуру порядка 10–100 К. Однако выбор осаждаемых магнитных ионов в перспективе позволяет синтезировать материалы, работающие как минимум при температурах жидкого азота.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант МК-1422.2020.2). Автор также благодарит доцента кафедры физики фазовых переходов ПГНИУ П. В. Краузину за ценные комментарии по алгоритмической реализации решения задачи.

### Список литературы

1. Hirohata A., Yamada K., Nakatani Yo., Prejbeanu I.-L., Dieny B., Pirro P., Hillebrands B. Review on spintronics: Principles and device applications // *J. Magn. Magn. Mater.* 2020. V. 509, 166711. DOI: 10.1016/j.jmmm.2020.166711
2. Dietl T., Ohno H. Dilute ferromagnetic semiconductors: Physics and spintronic structures // *Rev. Mod. Phys.* 2014. Vol. 86. P. 187–251. DOI: 10.1103/RevModPhys.86.187
3. McCoy B. M., Wu T. T. *The 2D Ising model*. Mineola, USA: Dover, 2014. 480 p.
4. Baxter M. *Exactly solvable models in statistical mechanics*. Dover: Mineola, USA: Dover, 2008. 512 p.
5. Villain J., Bak P. Two-dimensional Ising model with competing interactions: floating phase, walls and dislocations // *J. Phys. France*. 1981. Vol. 42. N. 5. P. 657–668. DOI: 10.1051/jphys:01981004205065700
6. da Silva C. R., Countinho S. Ising model on the Bethe lattice with competing interactions up to the third-nearest-neighbor interaction // *Phys. Rev. B*. 1986. Vol. 34. N. 11. P. 7975–7985. DOI: 10.1103/PhysRevB.34.7975
7. Selke W. The ANNNI model – Theoretical analysis and experimental application // *Phys. Rep.* 1988. Vol. 170 (4). P. 213–264. DOI: 10.1016/0370-1573(88)90140-8
8. Andrade R. F. S., Salinas S. R. Diluted Ising model with competing interactions // *Phys. A*. 1999. Vol. 270. N. 3–4. P. 342–352. DOI: 10.1016/S0378-4371(99)00158-2
9. Chitov G. Y., Gros C. Ordering in two-dimensional Ising models with competing interactions // *Low Temp. Phys.* 2005. Vol. 31. N. 8–9. P. 722–734. DOI: 10.1063/1.2008132
10. White R. M. *Quantum theory of magnetism*. Berlin: Springer, 2007. 362 p.
11. Kogan E. RKKY interaction in gapped or doped graphene // *Graphene*. 2013. Vol. 2. N. 1. P. 8–12. DOI: 10.4236/graphene.2013.21002
12. Rudenko A. N., Keil F. J., Katsnelson M. I., Lichtenstein A. I. Exchange interactions and frustrated magnetism in single-side hydrogenated and fluorinated graphene // *Phys. Rev. B*. 2013. Vol. 88, 081405(R). DOI: 10.1103/PhysRevB.88.081405
13. Zare M. RKKY interaction in biased single-layer silicene // *Phys. Rev. B*. 2019. Vol. 100, 085434. DOI: 10.1103/PhysRevB.100.085434
14. Newman M. E. J., Barkema G. T. *Monte Carlo methods in statistical physics*. Oxford, UK: Clarendon Press, 1999. 496 p.
15. Chikazumi S. *Physics of Ferromagnetism*. Oxford, UK: Oxford University Press, 2009. 668 p.

### References

1. Hirohata A., Yamada K., Nakatani Yo., Prejbeanu I.-L., Dieny B., Pirro P., Hillebrands B. Review on spintronics: Principles and device applications. *J. Magn. Magn. Mater.*, 2020, vol. 509, 166711. DOI: 10.1016/j.jmmm.2020.166711
2. Dietl T., Ohno H. Dilute ferromagnetic semiconductors: Physics and spintronic structures. *Rev. Mod. Phys.*, 2014, vol. 86, pp. 187–251. DOI: 10.1103/RevModPhys.86.187
3. McCoy B. M., Wu T. T. *The 2D Ising model*. Mineola, USA: Dover, 2014, 480 p.
4. Baxter M. *Exactly solvable models in statistical mechanics*. Dover: Mineola, USA: Dover, 2008, 512 p.
5. Villain J., Bak P. Two-dimensional Ising model with competing interactions: floating phase, walls and dislocations. *J. Phys. France*, 1981, vol. 42, no. 5, pp. 657–668. DOI: 10.1051/jphys:01981004205065700
6. da Silva C. R., Countinho S. Ising model on the Bethe lattice with competing interactions up to the third-nearest-neighbor interaction. *Phys. Rev. B*, 1986, vol. 34, no. 11, pp. 7975–7985. DOI: 10.1103/PhysRevB.34.7975
7. Selke W. The ANNNI model – Theoretical analysis and experimental application. *Phys. Rep.*, 1988, vol. 170 (4), pp. 213–264. DOI: 10.1016/0370-1573(88)90140-8
8. Andrade R. F. S., Salinas S. R. Diluted Ising model with competing interactions. *Phys. A*, 1999, vol. 270, no. 3–4, pp. 342–352. DOI: 10.1016/S0378-4371(99)00158-2
9. Chitov G. Y., Gros C. Ordering in two-dimensional Ising models with competing interactions. *Low*

- Temp. Phys.*, 2005, vol. 31, no. 8–9, pp. 722–734. DOI: 10.1063/1.2008132
10. White R. M. *Quantum theory of magnetism*. Berlin: Springer, 2007, 362 p.
11. Kogan E. RKKY interaction in gapped or doped graphene. *Graphene*, 2013, vol. 2, no. 1, pp. 8–12. DOI: 10.4236/graphene.2013.21002
12. Rudenko A. N., Keil F. J., Katsnelson M. I., Lichtenstein A. I. Exchange interactions and frustrated magnetism in single-side hydrogenated and fluorinated graphene. *Phys. Rev. B.*, 2013, vol. 88, 081405(R). DOI: 10.1103/PhysRevB.88.081405
13. Zare M. RKKY interaction in biased single-layer silicone. *Phys. Rev. B.*, 2019, vol. 100, 085434. DOI: 10.1103/PhysRevB.100.085434
14. Newman M. E. J., Barkema G. T. *Monte Carlo methods in statistical physics*. Oxford, UK: Clarendon Press, 1999, 496 p.
15. Chikazumi S. *Physics of Ferromagnetism*. Oxford, UK: Oxford University Press, 2009, 668 p.

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Циберкин К. Б. Низкотемпературный антиферромагнетизм в модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями // Вестник Пермского университета. Физика. 2021. № 2. С. 64–71. doi: 10.17072/1994-3598-2021-2-64-71

**Please cite this article in English as:**

Tsiberkin K. B. Low-temperature antiferromagnetism of Ising model with competing interactions. Bulletin of Perm University. Physics, 2021, no. 2, pp. 64–71. doi: 10.17072/1994-3598-2021-2-64-71

**Сведения об авторах**

Циберкин Кирилл Борисович, канд. физ.-мат. наук, доцент, кафедра теоретической физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, д. 15, Пермь, 614990

**Author information**

Kirill B. Tsiberkin, Candidate of Physics and Mathematics, Professor Assistant, Theoretical Physics Department, Perm State University, 15 Bukireva str, 614990, Perm, Russia