

УДК 537.21; 537.311  
PACS 47.65.-d, 82.45.-h

## О граничных условиях для напряжённости электрического поля на поверхности слабопроводящих жидкостей

**В. А. Семёнов**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: semenov@psu.ru

За счёт поверхностной проводимости и поверхностного течения в слабопроводящих жидкостях возможен перенос свободного заряда вдоль границы их раздела. В отличие от электрокапиллярных такие течения обусловлены разной проводимостью жидкостей и наличием тангенциальной компоненты напряжённости электрического поля на границе их раздела. Данный эффект необходимо учитывать при рассмотрении электрогидродинамических явлений в гетерогенной слабопроводящей жидкой среде, поскольку может оказывать существенное влияние на структуру течений в жидкости. Поверхностные течения влияют на распределение свободного заряда на поверхности раздела фаз, что приводит к изменению электрического поля и, как следствие, изменению структуры течений в среде. При этом в переменных электрических полях, когда ток проводимости и ток смещения одного порядка, в зависимости от параметров среды, данные эффекты могут приводить как к усилению, так и ослаблению электрогидродинамических течений. В связи с этим, при расчёте электрических полей в гетерогенных средах необходимо в граничных условиях для напряжённости электрического поля учитывать указанные факторы. В настоящей работе из закона сохранения заряда для выделенного объёма на границе раздела двух несмешивающихся слабопроводящих жидкостей получены выражения для граничных условий для напряжённости переменного электрического поля при протекании поверхностного тока и поверхностном течении вдоль границы раздела при отсутствии на границе электрохимических реакций, приводящих к образованию свободного заряда. Представленные граничные условия являются более общими применительно к решению ряда задач электрогидродинамики.

**Ключевые слова:** электрогидродинамика; граничные условия; поверхностное течение

*Поступила в редакцию 06.03.2017; принята к опубликованию 27.03.2017*

## On boundary conditions for electric field strength on a surface of low conductivity liquids

**V. A. Semenov**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: semenov@psu.ru

In the low conductivity liquids it is possible transfer of a free charge along boundary of the section due to a surface conductivity and a surface flow. Unlike electrocapillary, such flows are caused by different conductivity of liquids and existence tangential components of electric field strength on

boundary of their section. This effect needs to be considered by consideration of the electrohydrodynamic phenomena in the heterogeneous low conductivity fluid environment as can have significant effect on structure of currents in liquid. The surface current influence distribution of the free charge to phase boundaries that leads to change of an electric field and, as a result, structural change of currents in the environment. At the same time in variation electric fields when current of conduction and a displacement current of one order, depending on environment parameters these effects can lead as to strengthening, and weakening of electrohydrodynamic flows. In this regard when calculating electric fields in heterogeneous environments it is necessary in boundary conditions for an electric intensity to consider the specified factors. In the real work from the charge conservation law for the allocated volume on a demarcation two immiscible the low conductivity liquids expressions for boundary conditions for strength of a variation electric field at course of the surface current and the surface flow along a demarcation at absence on border of the electrochemical alterations leading to formation of the free charge are received. The presented boundary conditions are more common in relation to the solution of a number of problems of an electrohydrodynamics.

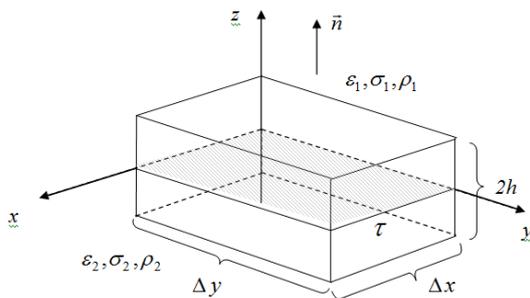
**Keywords:** electrohydrodynamics; boundary conditions; surface flow

Received 06.03.2017; accepted 27.03.2017

doi: 10.17072/1994-3598-2017-1-11-13

Как показано в [1–3], в слабопроводящих жидкостях возможен перенос свободного заряда вдоль границы раздела за счёт поверхностной проводимости и поверхностного течения. В отличие от электрокапиллярных [4], такие течения обусловлены разной проводимостью жидкостей и наличием тангенциальной компоненты напряжённости электрического поля на границе их раздела. Найдём граничные условия для напряжённости электрического поля на границе раздела слабопроводящих жидкостей с учётом данных факторов.

Считаем, что на границе раздела не происходят электрохимические реакции, приводящие к образованию свободного заряда.



**Рис.** Система координат

Допустим, что плоскость  $z = 0$  является границей раздела двух слабопроводящих жидких несмешивающихся сред (рисунок), помещённых в переменное электрическое поле, период изменения которого  $T$  одного порядка с характерным временем релаксации свободного заряда в среде:

$$T \approx \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  – соответственно, диэлектрическая проницаемость и проводимость среды.

Выделим на поверхности раздела параллелепипед, у которого высота  $2h$  много меньше размеров основания, т.е.  $h \ll \Delta x$ ,  $h \ll \Delta y$ . Диэлектрическая проницаемость, проводимость, объёмный заряд верхнего полупространства ( $z > 0$ ), соответственно,  $\varepsilon_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\rho_1$ , нижнего –  $\varepsilon_2$ ,  $\sigma_2$ ,  $\rho_2$ . Поверхностная плотность свободного заряда границы раздела  $\tau$ ,  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к границе раздела. Из теоремы Гаусса [5] для выделенного объёма имеем:

$$\varepsilon_1 E_1^{(n)} - \varepsilon_2 E_2^{(n)} = 4\pi\tau, \quad (2)$$

где  $E^{(n)}$  – нормальные компоненты напряжённости электрического поля на границе раздела сред.

Запишем закон сохранения заряда для рассматриваемого объёма:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\oint \vec{j} d\vec{s}. \quad (3)$$

Здесь  $q$  – заряд выделенного объёма,  $\vec{j}$  – плотность тока через поверхность объёма.

В предположении малости выделенного объёма для заряда  $q$  имеем

$$q = \int \rho_1 dV + \int \rho_2 dV + \int \tau ds \approx ((\rho_1 + \rho_2)h + \tau)\Delta x \Delta y. \quad (4)$$

При  $h \rightarrow 0$  из (4) получим

$$q = \tau \Delta x \Delta y. \quad (5)$$

Аналогично при  $h \rightarrow 0$  для правой части выражения (3) имеем

$$\oint \vec{j} d\vec{s} \approx (j_1^{(n)} - j_2^{(n)})\Delta x \Delta y + \delta i_y \Delta x + \delta i_x \Delta y, \quad (6)$$

где  $j_1^{(n)}, j_2^{(n)}$  – проекции плотности объёмного тока на внешнюю нормаль к верхнему и нижнему основанию параллелепипеда,  $\delta i_y, \delta i_x$  – изменение плотности поверхностного тока при пересечении боковых поверхностей параллелепипеда вдоль оси  $y$  и оси  $x$ .

Перепишем (6) в виде

$$\begin{aligned} \oint \vec{j} d\vec{s} &\approx \\ &\approx \left( j_1^{(n)} - j_2^{(n)} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_x}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y = \\ &= (j_1^{(n)} - j_2^{(n)} + \operatorname{div}_s \vec{i}) \Delta x \Delta y. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\operatorname{div}_s \vec{i}$  – поверхностная дивергенция поверхностного тока.

С учётом (5) и (7) из (3) имеем

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + j_1^{(n)} - j_2^{(n)} + \operatorname{div}_s \vec{i} = 0. \quad (8)$$

Поверхностный ток на границе раздела может иметь как кондуктивную составляющую, обусловленную поверхностной проводимостью, так и конвективную вследствие переноса заряда поверхностным течением. В этом случае, предполагая выполнение закона Ома, плотность поверхностного тока запишем в виде

$$\vec{i} = \tau \vec{v}_s + \sigma_s \vec{E}^{(s)}, \quad (9)$$

где  $\vec{v}_s$  – скорость поверхностного течения,  $\sigma_s$ ,  $\vec{E}^{(s)}$  – поверхностная проводимость и тангенциальная компонента напряжённости электрического поля на границе раздела, соответственно.

Если нормальная компонента скорости жидкости на границе равна нулю, то

$$j^{(n)} = \sigma E^{(n)}. \quad (10)$$

С учётом (2), (9), (10) перепишем (8) в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi} \left( \varepsilon_1 \frac{\partial E_1^{(n)}}{\partial t} - \varepsilon_2 \frac{\partial E_2^{(n)}}{\partial t} \right) + \\ &+ \sigma_1 E_1^{(n)} - \sigma_2 E_2^{(n)} + \\ &+ \operatorname{div}_s \left( \frac{1}{4\pi} (\varepsilon_1 E_1^{(n)} - \varepsilon_2 E_2^{(n)}) \vec{v}_s + \sigma_s \vec{E}^{(s)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Выражение (11) совместно с условием равенства тангенциальных компонент определяет более общие граничные условия для напряжённости переменного электрического поля на поверхности раздела слабопроводящих жидких сред.

### Список литературы

1. Melcher J. R. *Continuum electromechanics*. Cambridge: The MIT Press. 1981. 640 P.
2. Семенов В. А. О поверхностном течении жидкости в электрическом поле // Журнал технической физики. 1999. Т. 69. Вып. 6. С. 127–128.
3. Жакин А. И. Электродинамика // Успехи физических наук. 2012. Т. 182. № 5. С. 495–520.
4. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1952. С.533.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1984. С. 620.

### References

1. Melcher J. R. *Continuum electromechanics*. Cambridge: The MIT Press, 1981, 640 p.
2. Semenov V. A. Surface flow of liquid in an electric field. *Technical Physics*, 1999, vol. 44, no. 6, pp. 722–723.
3. Zhakin A. I. Electrohydrodynamics. *Physics Uspekhi*, 2012, vol. 55, pp. 465–488.
4. Levich V. *Physicochemical hydrodynamics*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1962, 700 p.
5. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Course of Theoretical Physics*, vol. 8. Electrodynamics of Continuous Media. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1984. 460 p.

### Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Семёнов В. А. О граничных условиях для напряжённости электрического поля на поверхности слабопроводящих жидкостей // Вестник Пермского университета. Физика. 2017. № 1 (35). С. 11–13. doi: 10.17072/1994-3598-2017-1-11-13

### Please cite this article in English as:

Semenov V. A. On boundary conditions for electric field strength on a surface of low conductivity liquids // Bulletin of Perm University. Physics, 2017, no. 1 (35), pp. 11–13. doi: 10.17072/1994-3598-2017-1-11-13