

УДК 532.6, 532.5
PACS 47.55.D-, 47.55.dr

Динамика зажатой капли в неоднородном электрическом поле

А. А. Алабужев, М. А. Кашина

Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
Институт механики сплошных сред УрО РАН
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: ya.kashina-marina@yandex.ru

Рассматриваются вынужденные колебания капли несжимаемой жидкости, зажатой между двумя однородными пластинами, под действием переменного электрического поля. Капля окружена несжимаемой жидкостью другой плотности. В равновесии капля имеет форму круглого цилиндра, ограниченного в осевом направлении параллельными твердыми пластинами. Данные пластины имеют разные свойства поверхности. Внешнее электрическое поле действует как внешняя сила, вызывающая движение линии контакта. Для описания движения контактной линии используется модифицированное граничное условие Хокинга: скорость контактной линии пропорциональна отклонению краевого угла и скорости быстрых релаксационных процессов, частота которых пропорциональна удвоенной частоте электрического поля. Использование этого уравнения позволяет качественно описать экспериментальную зависимость краевого угла в зависимости от напряжения в отличие от уравнения Юнга-Липмана. Решение задачи представлено в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа. Построены графики амплитудно-частотных характеристик и эволюции формы капли при различных значениях параметров задачи. В случае одинаковых поверхностей возбуждаются только нечетные моды колебаний капли, при различающихся – дополнительно появляются четные гармоники. Обнаружено, что в большом диапазоне параметров форма боковой поверхности капли близка к описанию нечетной функцией. Амплитуда колебаний четных мод существенна только вблизи резонансов на частотах этих мод. В случае пространственно-неоднородного поля возбуждаются азимутальные колебания, которые обуславливают появление дополнительных резонансных пиков. По боковой поверхности капли распространяются бегущие волны, вызванные колебаниями линии контакта и краевого угла. Построены зависимости значений краевого угла на верхней и нижней поверхностях от квадратного корня амплитуды для разных значений частоты электрического поля, которые качественно совпадают с аналогичными графиками экспериментальных данных. Благодаря этому появляется возможность определить параметры Хокинга.

Ключевые слова: вынужденные колебания; контактная линия; краевой угол

Поступила в редакцию 16.10.2019; принята к опубликованию 14.11.2019

Dynamics of a drop under the influence of an inhomogeneous electric field

A. A. Alabuzhev, M. A. Kashina

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm
Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Koroleva Str. 1, 614013, Perm
email: ya.kashina-marina@yandex.ru

The forced oscillations of an incompressible liquid drop under the influence of an alternating electric field are considered. The drop is sandwiched between two homogeneous plates and surrounded by an incompressible fluid of a different density. In equilibrium, the drop has the shape of a circular cylinder which is bounded axially by parallel solid plates. These plates have different surface properties. An external electric field acts as an external force which is a reason of the motion of the contact line. A modified Hocking boundary condition is used to describe the motion of the contact line: the velocity of the contact line is proportional to the deviation of the contact angle and the rate of fast relaxation processes, the frequency of which is proportional to the doubled frequency of the electric field. Using this equation allows one to qualitatively describe the experimental dependence of the contact angle as a function of stress, in contrast to the Young – Lippmann equation. The solution to the problem is presented as a Fourier series expansion in eigen functions of the Laplace operator. Graphs of the amplitude-frequency characteristics and evolution of the drop shape are constructed for various values of the problem parameters. In the case of identical surfaces, only odd modes of droplet oscillations are excited, while for different surfaces, even harmonics additionally appear. It was found that in a wide range of parameters the shape of the side surface of the drop is close to the description by an odd function. The oscillation amplitude of even modes is significant only near resonances at the frequencies of these modes. In the case of an inhomogeneous field, azimuthal oscillations are excited, which leads to the appearance of additional resonance peaks. Travel waves propagate along the lateral surface of the drop, which are caused by vibrations of the contact line and the contact angle. The dependences of the values of the contact angle on the upper and lower surfaces on the square root of the amplitude for different values of the frequency of the electric field, which qualitatively coincide with similar graphs of experimental data, are constructed. It is possible to determine the parameters of the Hocking.

Keywords: forced oscillations; contact line; contact angle

Received 16.10.2019; accepted 14.11.2019

doi: 10.17072/1994-3598-2019-4-33-43

1. Введение

В последние годы был проявлен большой интерес к динамике капель и пузырьков на диэлектрической подложке в электрическом поле (electrowetting-on-dielectric, EWOD) [1–6], как одному из способов изменения смачивания – электросмачивание. EWOD оказался эффективным инструментом, например, в цифровой микрофлюидике (создание дисплеев), биоанализе (создание миниатюрных чипов для анализа) или при создании жидких линз с переменным фокусным расстоянием. Схематические изображения типичных устройств с использованием EWOD приведены на рис. 1.

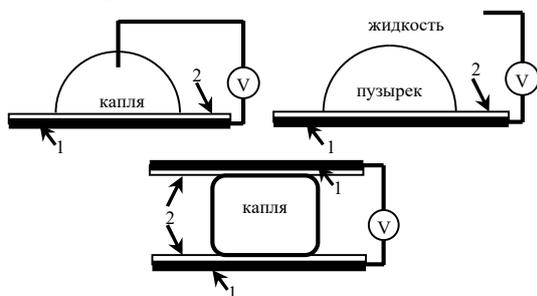


Рис. 1. Типичные схематические устройства: 1 – электрод, 2 – диэлектрический слой

Уравнение Юнга-Липмана часто используется для теоретического описания эффективного контактного угла капли под действием постоянного напряжения [7–9]:

$$\cos \mathcal{G} = \cos \mathcal{G}_0 + E_w, \quad (1)$$

где $\cos \mathcal{G}_0 = \sigma_{ic}^{-1} (\sigma_p - \sigma_{cp})$, $E_w = 0.5CV^2 \sigma_{ic}^{-1}$, $C = \varepsilon \varepsilon_0 d^{-1}$, \mathcal{G}_0 – контактный угол без приложенного напряжения – равновесный краевой угол, который определяется уравнением Юнга, σ – межфазное поверхностное натяжение между каплей проводящей жидкости (c), окружающей жидкостью (i) и диэлектрической поверхностью (p), E_w – электрокапиллярное число (оно представляет собой отношение электростатической энергии жидкости к межфазной энергии, окружающей жидкости), C – емкость на единицу площади, V – значение приложенного напряжения постоянного электрического тока, d – толщина диэлектрического слоя, ε_0 и ε – коэффициент диэлектрической проницаемости вакуума и подложки, соответственно. Последний член в уравнении (1) – модифицированный член уравнения Юнга-Липмана [7].

Для переменного электрического поля вместо V^2 в уравнении (1) было предложено использовать квадрат эффективного напряжения U^2 [1]. По

определению это такое напряжение постоянного тока, которое на такой же резистивной нагрузке выделит такую же мощность, как измеряемое переменное напряжение.

Однако данное условие (1) плохо описывает поведение краевого угла в переменных полях и при больших потенциалах [1–6]. На рис. 2 представлена экспериментальная зависимость краевого угла от напряжения для полусферической капли на подложке [6]. Данные, полученные из эксперимента, качественно отличаются от теоретической модели с использованием уравнения Юнга–Липмана (1) [1–6], поэтому важной является проблема построения теоретической модели описания изменения краевого угла при электросмачивании.

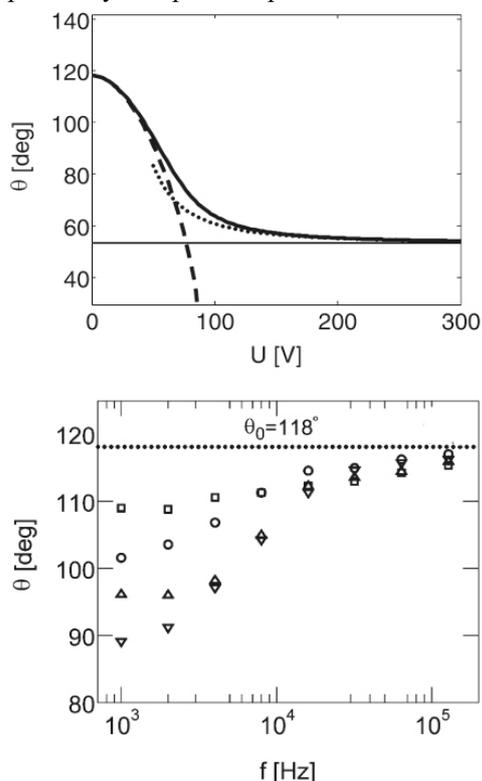


Рис. 2. Зависимость краевого угла от напряжения для полусферической капли на подложке [6]: штриховая линия – условие Юнга–Липмана, сплошная – экспериментальные данные 57 В (\square), 93 В (\circ), 113 В (Δ), 143 В (∇)

Известно, что основную роль в процессе растекания играют процессы взаимодействия жидкости с подложкой, например, вязкость. При рассмотрении высокочастотного колебательного движения контактной линии ситуация отличается коренным образом. В этом случае влияние вязкости становится существенным лишь в тонких пограничных слоях вблизи твердой поверхности, а движение контактной линии определяется в основном быстро осциллирующим полем давления. Таким образом, можно рассматривать невязкое поведение жидкости в ядре, учитывая вязкость лишь внутри

динамического пограничного слоя вблизи твердой подложки. Сложные процессы, происходящие в непосредственной близости линии контакта, из рассмотрения исключаются с помощью эффективных граничных условий, накладываемых на динамику видимого краевого угла.

Наиболее часто используется условие, впервые предложенное в [10] для изучения стоячих волн между двумя вертикальными стенками. Указанное условие предполагает линейную связь между скоростью движения контактной линии и отклонением краевого угла от его равновесного значения (как правило, для простоты считают равновесный краевой угол прямым):

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t^*} = \Lambda^* \mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^*, \quad (2)$$

где ζ^* – отклонение поверхности от равновесного положения, Λ^* – феноменологическая постоянная (постоянная Хокинга), \mathbf{k} – вектор нормали к твердой поверхности. Отметим, что условия фиксированной контактной линии и постоянного краевого угла являются частными случаями граничного условия (2): $\zeta^* = 0$ и $\mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^* = 0$, соответственно. Например, в [11] было показано, что граничное условие (2) приводит к затуханию колебаний за исключением двух указанных выше предельных случаев.

Условие (2) использовалось при исследовании колебаний полусферической капли несжимаемой жидкости на подложке [12], полусферического газового пузырька в жидкости конечной глубины на подложке, жидкого (капиллярного) моста [13], цилиндрической капли [14], сжатой капли (имеющей форму фигуры вращения) [15] и цилиндрического пузырька [16]. В статьях [17–19] использовалось более сложное граничное условие, допускающее гистерезис краевого угла.

В статье [20] авторы стремились разработать теорию, описывающую колебания капли, вызванные электросмачиванием, и предложили другое условие – модифицированное граничное условие Хокинга.

Внешнее электрическое поле играет роль источника движения и вынуждает контактный угол изменяться во времени. Далее мы предполагаем, что электрическое поле является периодической функцией по времени $\cos(\omega^* t^*)$. Для очень быстрых релаксационных процессов на линии контакта трех сред краевой угол меняется по закону $\cos(2\omega^* t^*)$ согласно закону Липмана (1). Принимая во внимание более общий случай, когда релаксационные эффекты происходят в масштабах времени, сопоставимых с внешними силами, мы можем сформулировать эффективное граничное условие, которое должно выполняться на линии

контакта, т. е. скорость линии контакта пропорциональна отклонению краевого угла и скорости быстрых релаксационных процессов, частота которых пропорциональна удвоенной частоте ω^* электрического поля:

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t^*} = \pm \Lambda^* \left(\frac{\partial \zeta^*}{\partial z^*} + A^* \cos(2\omega^* t^*) \right), \quad (3)$$

где ζ^* – отклонение поверхности капли от положения равновесия, z^* – осевая координата, Λ^* – феноменологическая константа (так называемый параметр смачивания или параметр Хокинга), имеющий размерность скорости, A^* – эффективная амплитуда, ω^* – частота электрического поля. Второе слагаемое в граничном условии (3) описывает внешнее действие, которое записывается так же, как и в уравнении Юнга-Липмана (1), пропорционально напряжению в квадрате: $\cos \vartheta = E_w = \tilde{E}_w V^2$, $\cos \vartheta_0 = 0$ в нашей задаче, таким образом, $\zeta_z \sim \text{ctg} \vartheta = E_w / \sqrt{1 - E_w^2} = \tilde{E}_w V^2 / \sqrt{1 - \tilde{E}_w^2 V^4} \approx \tilde{E}_w V^2 + O(V^6) \approx \tilde{E}_w V^2 \sim V^2$.

В случае переменного электрического поля электрический потенциал постоянного поля V заменяется на потенциал переменного поля $U \sim \cos(\omega t)$, следовательно, $\zeta_z \sim \text{ctg} \vartheta \approx \tilde{E}_w U^2 \sim \tilde{E}_w \cos(2\omega t)$. Перенормированное электрокапиллярное число \tilde{E}_w играет роль квадрата эффективной амплитуды электрического поля.

Общее обсуждение эффективных граничных условий можно найти в статьях [20, 21].

В настоящей работе рассматривается поведение капли, зажатой между двумя однородными пластинами, под приложенным переменным напряжением.

2. Постановка задачи

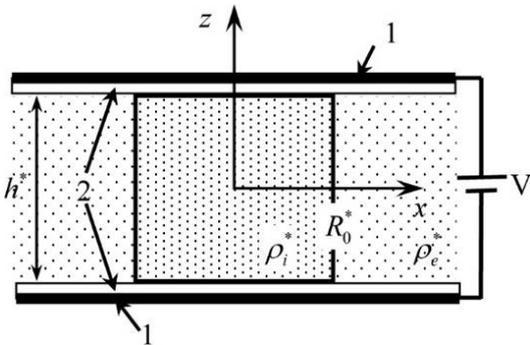


Рис. 3. Геометрия задачи: 1 – электрод, 2 – диэлектрический слой

Рассматривается динамическое поведение капли несжимаемой жидкости плотности ρ_i^* , окру-

женной другой жидкостью плотности ρ_e^* (здесь и далее величины с индексом i относятся к капле, а с индексом e – к окружающей жидкости), которая помещена в цилиндрический сосуд. В осевом направлении система ограничена двумя параллельными твердыми поверхностями (рис. 3) с межпластинчатый расстоянием h^* . Предполагается, что боковая стенка сосуда находится на большом расстоянии от капли и не влияет на ее динамику. Торцы сосуда являются проводящими и покрыты изнутри диэлектрической пленкой. Равновесная форма капли представляет собой круглый цилиндр радиуса R_0^* ; краевого угол ϑ_0 между боковой поверхностью капли и твердой поверхностью равен 0.5π . К торцам сосуда прикладывается переменное напряжение, имеющее частоту ω^* , что позволяет возбуждать внутри него электрическое поле. Внешнее переменное электрическое поле действует как внешняя сила, имеющая амплитуду A^* и частоту $2\omega^*$, которая вызывает движение контактной линии. Для описания движения контактной линии используется модифицированное условие Хокинга (3). Параметр смачивания Λ^* будет различным для каждой поверхности: Λ_u^* при $z = 0,5h^*$ и Λ_b^* при $z = -0,5h^*$. Плотность пространственного заряда на поверхности раздела жидкостей пренебрежимо мала, и ее влияние не будет учитываться.

Из-за симметрии задачи удобно ввести цилиндрические координаты r^* , α , z^* . Азимутальный угол α отсчитывается от оси x . Поверхность капли описывается следующим уравнением: $r^* = R_0^* + \zeta^*(\alpha, z^*, t^*)$. Мы будем рассматривать жидкости как невязкие и несжимаемые, т. е. скорость течения будет описываться уравнением Эйлера, а изменение плотности – уравнением неразрывности. Предполагая потенциальное движение жидкости, введем потенциал скорости $\vec{v}^* = \vec{\nabla} \varphi^*$. Отметим, что несмотря на использование приближения невязкой жидкости, в системе присутствует диссипация энергии вследствие использования граничного условия Хокинга (2). Это позволяет нам рассматривать течение как потенциальное даже при наличии деформируемой поверхности раздела.

Принимая в качестве характерных величин длины – R_0^* , высоты – h^* , плотности – $\rho_e^* + \rho_i^*$, времени – $\sigma^{-1/2} \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^{*3}}$, потенциала скорости – $A^* \sqrt{\sigma} \left((\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^{*3} \right)^{-1/2}$, давления – $A^* \sigma (R_0^*)^{-2}$ и отклонения поверхности – A^* , переходим к безразмерным переменным и получаем следующую линейную задачу:

$$p_j = -\rho_j \varphi_{j,r}, \quad \Delta \varphi_j = 0, \quad j = i, e, \quad (4)$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$r = 1: [\varphi_r] = 0, \quad \zeta_i = \varphi_r, \quad [p] = \zeta + \zeta_{\alpha\alpha} + b^2 \zeta_{zz}, \quad (5)$$

$$z = \pm \frac{1}{2}: \varphi_z = 0, \quad (6)$$

$$r = 1, \quad z = \pm \frac{1}{2}: \zeta_i = \mp \lambda_{u,b} (\zeta_z + a f(\alpha) \cos(2\omega t)), \quad (7)$$

где p – давление жидкости, φ – потенциал скорости, $f(\alpha)$ – функция пространственной неоднородности электрического поля, a – эффективная амплитуда электрического поля, ζ – отклонение поверхности от равновесного положения, $\lambda_{u,b}$ – безразмерная постоянная Хокинга на верхней и нижней пластинах соответственно, квадратные скобки обозначают скачок величины на границе раздела между внешней жидкостью и каплей.

Краевая задача (4)–(7) включает в себя 6 безразмерных параметров:

$b = R_0 h^{-1}$ – геометрический параметр;

$\rho_i = \rho_i^* (\rho_e^* + \rho_i^*)^{-1}$, $\rho_e = \rho_e^* (\rho_e^* + \rho_i^*)^{-1}$ – соотношение плотностей;

$\lambda = \Lambda^* \sigma^{-1/2} b \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^*}$ – капиллярный параметр;

$\omega = \omega^* \sigma^{-1/2} \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^{*3}}$ – частота электрического поля;

$a = 0.5 A^* C \sigma^{-3/2} \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^{*3}}$ – амплитуда электрического поля.

3. Однородное внешнее поле

Рассмотрим вынужденные колебания, определяемые внешней периодической силой, действующей только на линии раздела (7) трех сред. Сначала рассмотрим однородное электрическое поле, т.е. $f(\alpha) = 1$. Решение краевой задачи (4)–(7) ищем в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа. С учетом осевой симметрии решение уравнения Лапласа (4) с граничным условием (6) можно записать в виде:

$$\varphi_i(r, z, t) = \text{Re} \left(i2\omega \sum_{k=0}^{\infty} (a_{1k} R_{1k}^i(r) \cos(2k\pi z) + a_{2k} R_{2k}^i(r) \sin((2k+1)\pi z)) e^{i2\omega t} \right), \quad (8)$$

$$\varphi_e(r, z, t) = \text{Re} \left(i2\omega \sum_{k=0}^{\infty} (b_{1k} R_{1k}^e(r) \cos(2k\pi z) + b_{2k} R_{2k}^e(r) \sin((2k+1)\pi z)) e^{i2\omega t} \right), \quad (9)$$

где $R_{1k}^i(r) = I_0(2k\pi br)$, $R_{2k}^i(r) = I_0((2k+1)\pi br)$, $R_{1k}^e(r) = K_0(2k\pi br)$, $R_{2k}^e(r) = K_0((2k+1)\pi br)$, I_0 , K_0 – модифицированные функции Бесселя.

Кинематическое условие на свободной поверхности (второе условие в (5)) дает выражение для отклонения поверхности:

$$\zeta(z, t) = \text{Re} \left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{1k} \cos(2k\pi z) + d_{10} \cos\left(\frac{z}{b}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \sin((2k+1)\pi z) + d_{20} \sin\left(\frac{z}{b}\right) \right) e^{i2\omega t} \right). \quad (10)$$

Подставляя решения (8)–(10) в уравнения (4)–(7), получим выражения для неизвестных амплитуд a_{jk} , b_{jk} , c_{jk} , и d_{j0} . В силу громоздкости выражения для амплитуд не приводятся.

Если параметры Хокинга равны, так что $\lambda_u = \lambda_b = \lambda$, то полученные амплитуды совпадают с таковыми в [20] и аналогичны решениям в [22].

На рис. 4 показаны графики амплитуды колебаний боковой поверхности и отклонения контактного угла как функции частоты электрического поля для нескольких значений параметров смачивания λ_u и λ_b . Максимальные значения отклонений от равновесного положения боковой поверхности и угла контакта достигаются в случае линейного резонанса. Введем обозначения для отклонения поверхности капли на верхней пластине при $z = 0.5 - \zeta_u = \max(\zeta(0, 0.5, 0))$, на нижней пластине при $z = -0.5 - \zeta_b = \max(\zeta(0, -0.5, 0))$, в центре слоя при $z = 0 - \zeta_0 = \max(\zeta(0, 0, 0))$ и при $z = 0.25 - \zeta_q = \max(\zeta(0, 0.25, 0))$; значение краевого угла γ на верхней пластине γ_u , а на нижней – γ_b .

Внешняя сила возбуждает осесимметричные вынужденные колебания боковой поверхности капли. Функция внешнего воздействия является нечетной относительно координаты z , поэтому распределение энергии происходит между нечетными модами $\sin((2k+1)\pi z)$ (см. решения (8)–(10)). При отсутствии симметрии между свойствами пластин (разные параметры λ), возбуждаются также и четные моды $\cos(2k\pi z)$. Это приводит к появлению парных резонансных пиков на амплитудно-частотных характеристиках (см. рис. 4). В большинстве случаев резонансная амплитуда нечетной моды выше соответствующей четной.

Из представленных графиков на рис. 4 видно, что с увеличением параметра λ_b значения резонансных частот уменьшаются. Несмотря на слабую диссипацию при малых значениях λ амплитуда колебаний боковой поверхности конечна (рис. 4, *a, d*). Контактный угол изменяется в широком диапазоне (рис. 4, *e*). Следует отметить, что если оба параметра λ_u и λ_b малы (или велики), но не идентичны, то амплитуда поверхностных колебаний всегда конечна. Другими словами, диссипация энергии в системе определяется суммарным инкре-

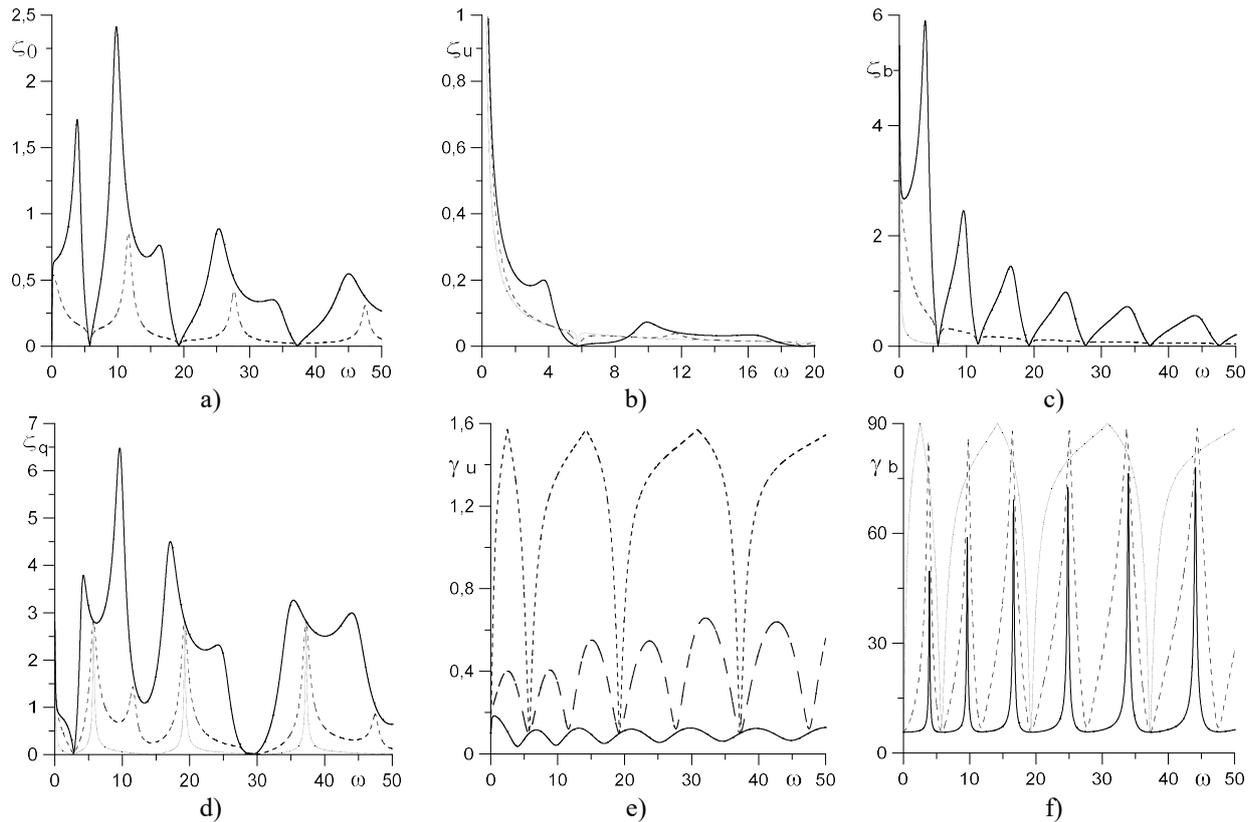


Рис. 4. Зависимость максимального отклонения: *a* – боковой поверхности ζ_0 ; *b* – контактной линии ζ_u ; *c* – контактной линии ζ_b ; *d* – поверхности капли ζ_q ; *e* – краевого угла γ_u ; *f* – краевого угла γ_b от частоты ω для трех разных значений λ_b ($b=1.0$, $A=10.0$, $\rho_i=0.7$, $\lambda_u=0.1$), где $\lambda_b=0.1$ – пунктирная, $\lambda_b=1.0$ – штриховая, $\lambda_b=10.0$ – сплошная линия

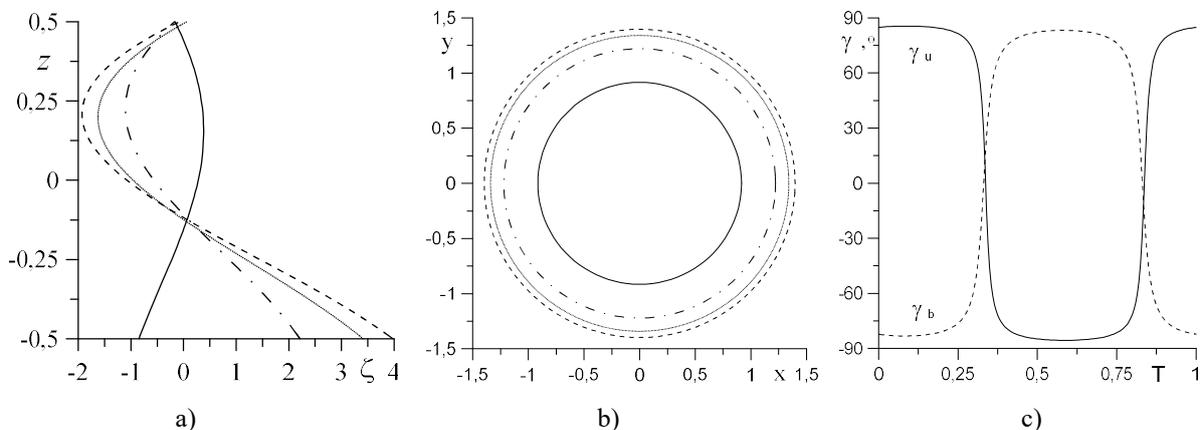


Рис. 5. Форма капли: *a* – боковой поверхности $\zeta(z, t)$; *b* – контактной линии $1+0.1 \zeta(-0.5, t)$; *c* – значение краевого угла на верхней γ_u (сплошная линия) и на нижней поверхности γ_b (штриховая линия) в разные моменты периода колебаний капли ($b=1.0$, $A=10.0$, $\rho_i=0.7$, $\omega=3$, $\lambda_u=0.1$, $\lambda_b=10.0$). На *a*, *b*: $t=0$ – пунктирная, $t=0.125T$ – штриховая, $t=0.25T$ – штрихпунктирная, $t=0.375T$ – сплошная линия

ментом затухания, соответствующего данной паре параметров λ_u и λ_b .

Для наглядности на рис. 4 показан случай, когда параметры Хокинга идентичны: $\lambda_u = \lambda_b = 0.1$. В этом случае возбуждаются только нечетные моды и отклонение боковой поверхности капли в середине слоя равно нулю (рис. 4, *a*). На определенных частотах ω движение капли не зависит от парамет-

ра смачивания λ и при любых его значениях линия контакта остается неподвижной (рис. 4, *c*), возникают так называемые «антирезонансные» частоты. Этот эффект аналогичен параллельному резонансу, т.е. совпадению частоты напряжения с частотой параллельного колебательного контура.

В целом, амплитуда колебаний боковой поверхности зависит от амплитуды колебаний линий

контакта, т.е. от амплитуды внешней силы. Поэтому при малых λ отклонения линии контакта невелики, что приводит к незначительным отклонениям боковой поверхности (не в резонансе).

По боковой поверхности капли распространяются бегущие волны, вызванные колебаниями линии контакта и краевого угла. При одинаковых значениях параметра λ капиллярные волны распространяются вдоль поверхности только в том случае, если значения λ конечны. Если значения λ_u и λ_b различны, то волны распространяются при любых значениях этих параметров.

При конечных значениях параметра λ диссипация максимальна, поэтому резонансные амплитуды всегда конечны. Подвижность линии контакта значительна, что приводит к заметному отклонению боковой поверхности вне резонанса и появлению «четных» резонансных пиков.

При больших значениях λ диссипация мала, а линия контакта слабо взаимодействует с подложкой. В этом случае крайовой угол меняется слабо, за исключением резонансных частот. При этом амплитуда колебаний на резонансной частоте велика, а амплитуда «четных» пиков сравнима с амплитудой «нечетных».

На рис. 5 приведены форма боковой поверхности в разные моменты времени и изменение краевого угла за период колебаний. Как уже отмечалось выше, при одинаковых значениях λ возбуждаются только нечетные гармоники и форма капли описывается нечетной функцией. Из рис. 5, *a* видно, что сечение боковой поверхности также близко к нечетной функции, несмотря на различные значения λ ($\lambda_u = 0.1$, $\lambda_b = 10.0$ в данном случае). Форма капли, близкая к описанию четной функцией, образуется только на «четных» резонансных частотах, когда амплитуды этих гармоник сравнимы или значительны в сравнении с нечетными.

Однородное поле возбуждает осесимметричные колебания, поэтому форма линии контакта пред-

ставляет собой окружность в любой момент времени (рис. 5, *b*). Изменение краевого угла происходит в широком диапазоне (рис. 5, *c*). Однако, в отличие от условия Юнга–Липмана (1), максимальное значение краевого угла конечно.

На рис. 6 построены зависимости значений краевого угла на верхней и нижней поверхностях от квадратного корня амплитуды для разных значений частоты электрического поля. Приведенные графики качественно совпадают с аналогичными графиками экспериментальных данных [6] (рис. 2). Краевой угол меняется монотонным образом и с увеличением квадратного корня амплитуды выходит на постоянное значение. На резонансной частоте вид зависимости краевого угла не изменяется. Из представленных графиков следует, что изменение ω и λ существенным образом влияет на значения краевого угла, поэтому есть возможность не только качественно, но и количественно получить согласие с экспериментальными результатами.

4. Неоднородное внешнее поле

Рассмотрим теперь случай пространственно-неоднородного электрического переменного поля. В экспериментах обычно пространственную неоднородность напряжения создают с помощью последовательности различных контактов, на которые можно подавать разное напряжение.

Кроме того, создать однородное электрическое поле довольно сложно, так как могут возникнуть неоднородные области вблизи капли [23]. Для возможного дальнейшего сравнения с экспериментом рассмотрим периодическую неоднородность поля вдоль оси Ox : $\sin(x)$. Следовательно, функция неоднородности $f(\alpha)$ в граничном условии (8) на линии контакта будет иметь следующий вид:

$$f(\alpha) = \sin(\cos(\alpha)). \quad (11)$$

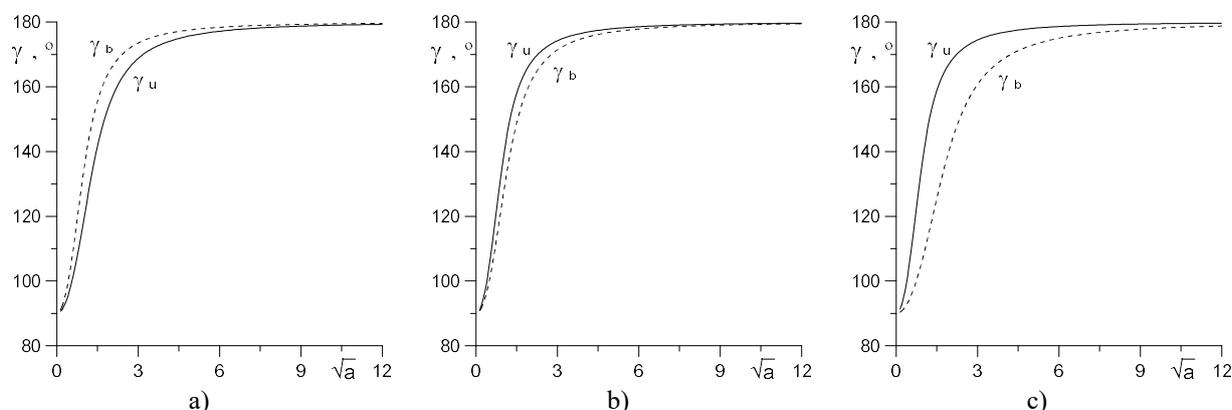


Рис. 6. Зависимость максимального отклонения краевого угла на верхней γ_u (сплошная линия) и на нижней поверхности γ_b (штриховая линия) от \sqrt{a} ($b=1.0$, $A=10.0$, $\rho_i=0.7$, $\lambda_u=0.1$, $\lambda_b=10.0$): *a* – $\omega=1$; *b* – $\omega=3$; *c* – $\omega=10$

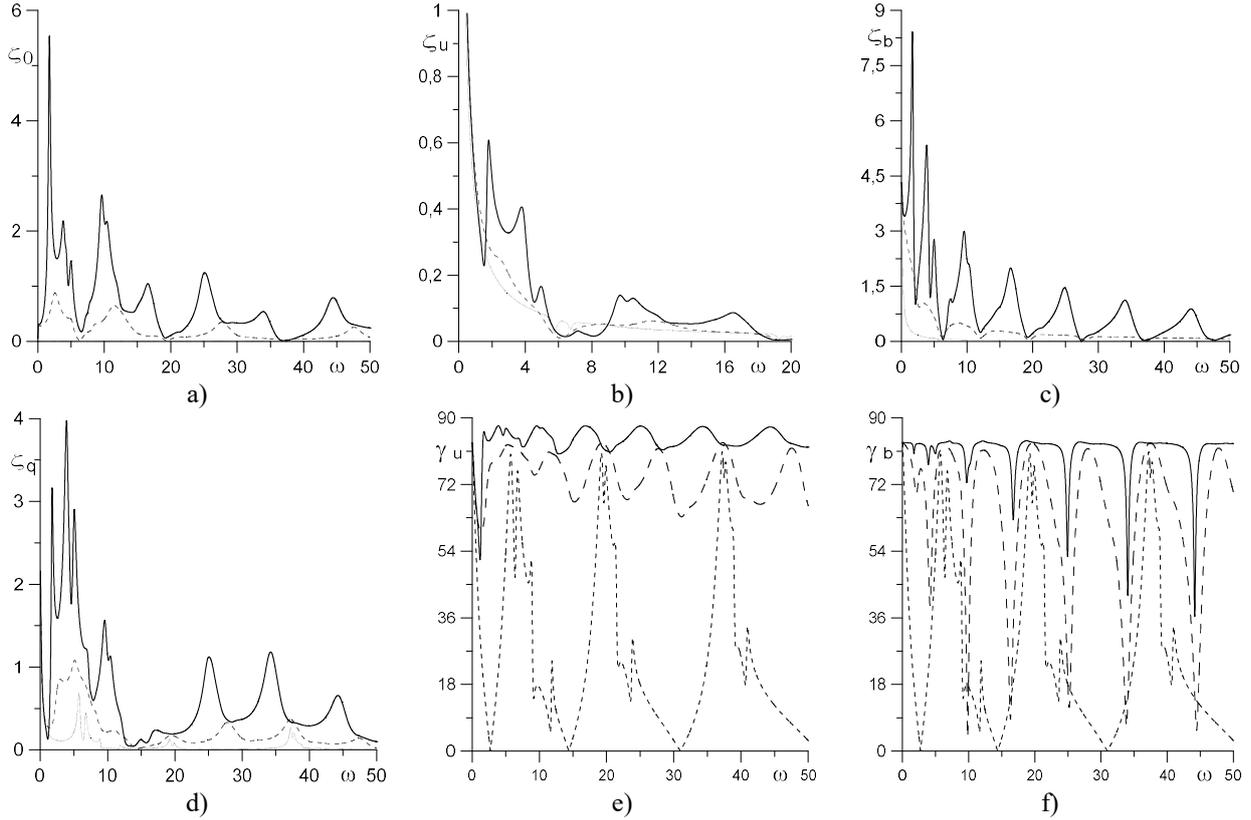


Рис. 7. Зависимость максимального отклонения: а – боковой поверхности ζ_0 ; б – контактной линии ζ_u ; с – контактной линии ζ_b ; д – поверхности капли ζ_q ; е – краевого угла γ_u ; ф – краевого угла γ_b от частоты ω для трех разных значений λ_b ($b=1.0$, $A=10.0$, $\rho_i=0.7$, $\lambda_u=0.1$), где $\lambda_b=0.1$ – пунктирная, $\lambda_b=1.0$ – штриховая, $\lambda_b=10.0$ – сплошная линия

Решение краевой задачи (4)–(7) будем искать в виде рядов Фурье по собственным функциям оператора Лапласа. В отличие от однородного поля решение будет зависеть и от полярного угла α . С учетом выбранной функции неоднородности $f(\alpha)$, решение можно представить в виде:

$$\varphi_i(r, z, t) = \operatorname{Re} \left(i2\omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (a_{1mk} R_{1mk}^i(r) \cos(2k\pi z) + a_{2mk} R_{2mk}^i(r) \sin((2k+1)\pi z)) \cos(2m\alpha) e^{i2\omega t} \right), \quad (12)$$

$$\varphi_e(r, z, t) = \operatorname{Re} \left(i2\omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (b_{1mk} R_{1mk}^e(r) \cos(2k\pi z) + b_{2mk} R_{2mk}^e(r) \sin((2k+1)\pi z)) \cos(2m\alpha) e^{i2\omega t} \right), \quad (13)$$

где $R_{1mk}^i(r) = I_m(2k\pi br)$, $R_{2mk}^i(r) = I_m((2k+1)\pi br)$, $R_{1m0}^i(r) = r^m$, $R_{1mk}^e(r) = K_m(2k\pi br)$, $R_{1m0}^e(r) = r^{-m}$, $R_{2mk}^e(r) = K_m((2k+1)\pi br)$, I_m , K_m – модифицированные функции Бесселя порядка m .

Кинематическое условие на свободной поверхности дает выражение для отклонения поверхности капли:

$$\zeta(z, t) = \operatorname{Re} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (c_{1mk} \cos(2k\pi z) +$$

$$+ c_{2mk} \sin((2k+1)\pi z)) \cos(2m\alpha) + d_{10} \cos\left(\frac{z}{b}\right) + d_{20} \sin\left(\frac{z}{b}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(d_{1m} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{4m^2-1}}{b} z\right) + d_{2m} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{4m^2-1}}{b} z\right) \right) \cos(2m\alpha) \right) e^{i2\omega t}. \quad (14)$$

Подставляя решения (12)–(14) в уравнения (4)–(7), получим выражения для неизвестных амплитуд a_{jmk} , b_{jmk} , c_{jmk} и d_{jm} . Эти выражения не приводятся в связи с их громоздкостью.

При рассматриваемом неоднородном электрическом поле возбуждаются четные азимутальные моды вынужденных колебаний капли ($\cos(2m\alpha)$ в решениях (12)–(14)).

На рис. 7 построены амплитудно-частотные характеристики, аналогичные рис. 4 для однородного поля. Возбуждаемые азимутальные моды, во-первых, приводят к появлению дополнительных резонансных пиков. Во-вторых, внешняя сила возбуждает нечетные вертикальные моды (относительно координаты z), поэтому «нечетные» пики более заметны, чем «четные». При больших λ амплитуда колебаний боковой поверхности увеличи-

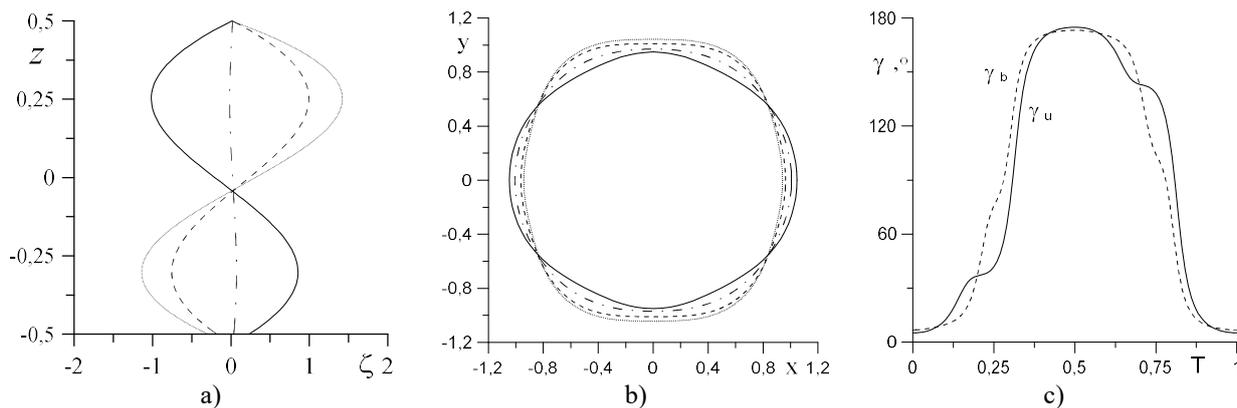


Рис. 8. Разные моменты периода колебаний капли: *a* – форма боковой поверхности капли $\zeta(z, t)$; *b* – форма контактной линии $1+0.1\zeta(-0.5, t)$; *c* – значение краевого угла на верхней γ_u (сплошная линия) и на нижней поверхности γ_b (штриховая линия) ($b=1.0, A=10.0, \rho_i=0.7, \omega=3, \lambda_u=0.1, \lambda_b=10.0$). $t=0$ – пунктирная, $t=0.125T$ – штриховая, $t=0.25T$ – штрихпунктирная, $t=0.375T$ – сплошная линия

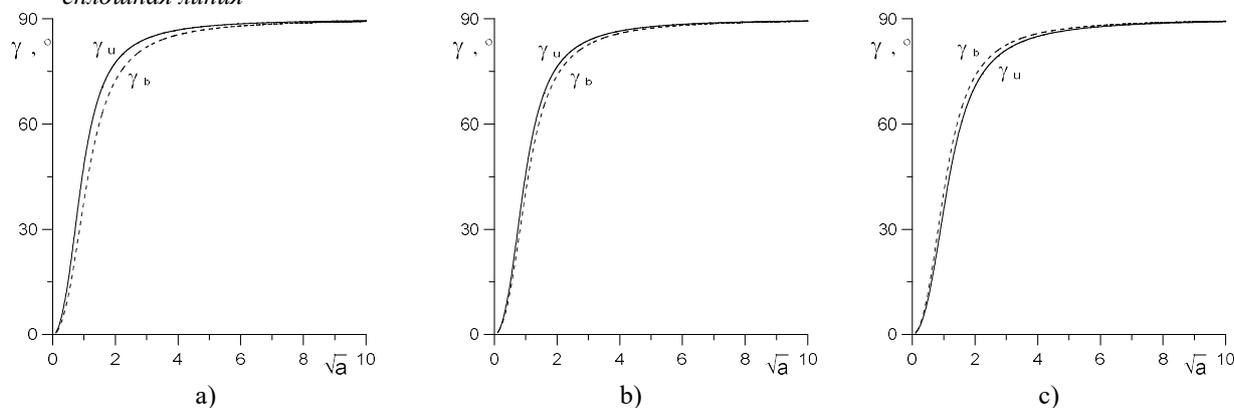


Рис. 9. Зависимость максимального отклонения краевого угла на верхней γ_u (сплошная линия) и на нижней поверхности γ_b (штриховая линия) от \sqrt{a} ($b=1.0, A=10.0, \rho_i=0.7, \lambda_u=0.1, \lambda_b=10.0$): *a* – $\omega=1$; *b* – $\omega=3$; *c* – $\omega=10$

вается за счет увеличения отклонения линии контакта и «дополнительные» резонансные пики становятся заметными.

Динамическое сечение боковой поверхности капли и краевых углов при азимутальном угле $\alpha=0$ показано на рис. 8, *a* и 8, *c*, соответственно. Форма боковой поверхности снова близка к описанию нечетной функцией, а изменение краевого угла имеет более сложный вид (рис. 8, *c*), чем в случае однородного поля (см. рис. 5, *c*). Форма линии контакта (рис. 8, *b*) существенно отличается от окружности при осесимметричных колебаниях (см. рис. 5, *b*).

Влияние неоднородности поля не сказывается существенно на зависимости краевого угла от амплитуды внешней силы (рис. 9). Качественно они схожи с аналогичными зависимостями в случае однородного поля (рис. 6).

5. Заключение

Рассмотрены вынужденные колебания цилиндрической капли под действием внешнего пере-

менного электрического поля, которое воздействует на каплю как внешняя периодическая сила с частотой 2ω , приводящая к движению контактную линию.

Увеличение значения параметра Хокинга λ , который является характеристикой смачивания поверхности, вызывает уменьшение частоты колебаний капли. Предполагалось, что капиллярный параметр различен для каждой пластины. Используемое граничное условие для линии контакта приводит к затуханию колебаний.

В случае однородного переменного электрического поля возбуждаются только осесимметричные колебания. Показано, что диссипация на линии контакта приводит к ограничению максимальной амплитуды колебаний при резонансе, а также к сдвигу резонансной частоты. При конечных значениях параметра λ амплитуда колебаний остается ограниченной вследствие диссипации в процессе движения контактной линии. Однако при неравных параметрах смачивания λ на нижней и верхней пластинах амплитуда колебаний всегда конечна, даже в случае малых или больших значений λ , т.е.

затухание определяется суммарным вкладом декрементов, соответствующим данным λ_u и λ_b .

Внешняя сила возбуждает только нечетные гармоники относительно координаты z . Вследствие различающихся λ , в спектре появляются и четные гармоники из-за отсутствия симметрии в движении линий контакта на поверхностях. Показано, что поверхность капли в большинстве случаев описывается нечетной функцией относительно оси z . Вклад четных гармоник заметен (сравним или больше) в сравнении с нечетными только вблизи частот четных гармоник. Кроме того, резонансная амплитуда «нечетных» пиков обычно больше, чем «четных».

Построены зависимости значений краевого угла на верхней и нижней поверхностях от квадратного корня амплитуды для разных значений частоты электрического поля. Приведенные графики качественно совпадают с аналогичными графиками экспериментальных данных [6].

Рассматриваемое неоднородное электрическое поле обуславливает возникновение азимутальных мод, что увеличивает число резонансных частот. Форма линии контакта существенно отличается от окружности при осесимметричных колебаниях из-за наличия азимутальных мод.

Обнаружено, что «антирезонансные» частоты, при которых линия контакта неподвижна при любых λ , существуют при однородном электрическом поле. В неоднородном поле такой эффект отсутствует.

Азимутальные моды приводят к появлению дополнительных резонансных пиков. При больших значениях λ амплитуда колебаний боковой поверхности увеличивается за счет увеличения отклонения линии контакта и «дополнительные» резонансные пики становятся заметными.

Влияние неоднородности поля не сказывается существенно на зависимость краевого угла от амплитуды внешней силы. Качественно они схожи с аналогичными зависимостями в случае однородного поля. Изменение ω и λ существенным образом влияет на значения краевого угла, поэтому есть возможность не только качественно, но и количественно получить согласие с экспериментальными результатами.

Список литературы

1. Mugele F., Baret J. C. Electrowetting: from basics to applications // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2005. Vol. 17, 705774.
2. Mugele F. Fundamental challenges in electrowetting: from equilibrium shapes to contact angle saturation and drop dynamics // *Soft Matter*. 2009. Vol. 5, 337784.
3. Royal M. W., Jokerst N. M., Fair R. B. Droplet-based sensing: optical microresonator sensors embedded in digital electrowetting microfluidics systems // *IEEE Sensors Journal*. 2013. Vol. 13. P. 4733–4742.
4. Chen L., Bonaccorso E. Electrowetting. From statics to dynamics // *Advances in Colloid and Interface Science*. 2014. Vol. 210. P. 2–12.
5. Zhao Y. -P., Wang Y. Fundamentals and applications of electrowetting: a critical review // *Reviews of Adhesion and Adhesives*. 2013. Vol. 1. P. 114–174.
6. Klarman D., Andelman D., Urbakh M. A Model of electrowetting, reversed electrowetting, and contact angle saturation // *Langmuir*. 2011. Vol. 27. N. 10. P. 6031–6041.
7. Lippmann G. Relations entre les phénomènes électriques et capillaires // *Annales de Chimie et de Physique*. 1875. Vol. 5, 494549.
8. Berge B. Electrocapillarite et mouillage de films isolants par l'eau // *Comptes rendus de l'Académie des Sciences II*. 1993. Vol. 317. P. 157–163.
9. Quilliet C., Berge B. Electrowetting: a recent outbreak // *Current Opinion in Colloid & Interface Science*. 2001. Vol. 6. P. 34–39.
10. Hocking L. M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // *Journal of Fluid Mechanics*. 1987. Vol. 179. P. 253–266.
11. Shklyayev S., Straube A. V. Linear oscillations of a hemispherical bubble on a solid substrate // *Physics of Fluids*. 2008. Vol. 20, 052102.
12. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Shklyayev S. V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate // *Physics of Fluids*. 2006. Vol. 18, 012101.
13. Borkar A., Tsamopoulos J. Boundary-layer analysis of dynamics of axisymmetric capillary bridges // *Physics of Fluids A*. 1991. Vol. 3. N. 12. P. 2866–2874.
14. Алабужев А. А., Любимов Д. В. Влияние динамики контактной линии на собственные колебания цилиндрической капли // *Прикладная механика и техническая физика*. 2007. Т. 48. № 5. С. 78–86.
15. Алабужев А. А., Любимов Д. В. Влияние динамики контактной линии на колебания сжатой капли // *Прикладная механика и техническая физика*. 2012. Т. 53. № 1. С. 9–19.
16. Алабужев А. А. Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2014. Т. 7, № 2. С. 151–161.
17. Hocking L. M. Waves produced by a vertically oscillating plate // *Journal of Fluid Mechanics*. 1987. Vol. 179. P. 267–281.
18. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V. Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop // *Physics of Fluids*. 2009. Vol. 21, 072104.
19. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V., Shklyayev S. Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis // *Physics of Fluids*. 2011. Vol. 23. P. 102–105.
20. Alabuzhev A. A., Kashina M. A. The oscillations of cylindrical drop under the influence of a nonuniform alternating electric field // *Journal of Physics: Conference Series*. 2016. Vol. 681, 012042.

21. Алабужев А. А., Кашина М. А. Влияние различия свойств поверхностей на осесимметричные колебания сжатой капли в переменном электрическом поле // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 2018. Т. 61. №. 8–9. Р. 662–676.
22. Алабужев А. А. Осесимметричные колебания цилиндрической капли с подвижной линией контакта // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57. №. 6. С. 53–63.
23. Mampallil D., Eral H.B., Staicu A., Mugele F., van den Ende D. Electrowetting-driven oscillating drops sandwiched between two substrates // Physical Review E. 2013. Vol. 88, 053015.
11. Shklyayev S., Straube A. V. Linear oscillations of a hemispherical bubble on a solid substrate. *Physics of Fluids*, 2008, vol. 20, 052102.
12. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Shklyayev S. V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate. *Physics of Fluids*, 2006, vol. 18, 012101.
13. Borkar A., Tsamopoulos J. Boundary-layer analysis of dynamics of axisymmetric capillary bridges. *Physics of Fluids A*, 1991, vol. 3, no. 12, pp. 2866–2874.
14. Alabuzhev A. A., Lyubimov D. V. Effect of the contact-line dynamics on the natural oscillations of a cylindrical droplet. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2007, vol. 48, pp. 686–693.
15. Alabuzhev A. A., Lyubimov D. V. Effect of the contact-line dynamics on the oscillations of a compressed droplet. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, vol. 53, pp. 9–19.
16. Alabuzhev A. A. Behavior of a cylindrical bubble under vibrations. *Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 151–161 (In Russian).
17. Hocking L. M. Waves produced by a vertically oscillating plate. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, vol. 179, pp. 267–281.
18. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V. Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop. *Physics of Fluids*, 2009, vol. 21, 072104.
19. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V., Shklyayev S. Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis. *Physics of Fluids*, 2011, vol. 23, pp. 102–105.
20. Alabuzhev A. A., Kashina M. A. The oscillations of cylindrical drop under the influence of a nonuniform alternating electric field. *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, vol. 681, 012042.
21. Alabuzhev A. A., Kashina M. A. Influence of surface properties on axisymmetric oscillations of an oblate drop in an ac electric field. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2019, vol. 61, no. 8–9, pp. 589–602.
22. Alabuzhev A. A. Axisymmetric oscillations of a cylindrical droplet with a moving contact line. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, no. 6, pp. 53–63.
23. Mampallil D., Eral H. B., Staicu A., Mugele F., van den Ende D. Electrowetting-driven oscillating drops sandwiched between two substrates. *Physical Review E*, 2013, vol. 88, 053015.

References

1. Mugele F., Baret J. C. Electrowetting: from basics to applications. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2005. Vol. 17, 705774.
2. Mugele F. Fundamental challenges in electrowetting: from equilibrium shapes to contact angle saturation and drop dynamics. *Soft Matter*. 2009. Vol. 5, 337784.
3. Royal M. W., Jokerst N. M., Fair R. B. Droplet-based sensing: optical microresonator sensors embedded in digital electrowetting microfluidics systems. *IEEE Sensors Journal*. 2013. Vol. 13. P. 4733–4742.
4. Chen L., Bonaccorso E. Electrowetting. From statics to dynamics. *Advances in Colloid and Interface Science*. 2014. Vol. 210. P. 2–12.
5. Zhao Y.-P., Wang Y. Fundamentals and applications of electrowetting: a critical review. *Reviews of Adhesion and Adhesives*. 2013. Vol. 1. P. 114–174.
6. Klarman D., Andelman D., Urbakh M. A Model of electrowetting, reversed electrowetting, and contact angle saturation. *Langmuir*. 2011. Vol. 27. N. 10. P. 6031–6041.
7. Lippmann G. Relations entre les phénomènes électriques et capillaires. *Annales de Chimie et de Physique*, 1875, vol. 5, 494549.
8. Berge B. Electrocapillarité et mouillage de films isolants par l'eau. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences II*, 1993, vol. 317, pp. 157–163.
9. Quilliet C. and Berge B. Electrowetting: a recent outbreak. *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, 2001, vol. 6, pp. 34–39.
10. Hocking L. M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, vol. 179, pp. 253–266.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Алабужев А. А., Кашина М. А. Динамика зажатой капли в неоднородном электрическом поле // Вестник Пермского университета. Физика. 2019. № 4. С. 33–43. doi: 10.17072/1994-3598-2019-4-33-43

Please cite this article in English as:

Alabuzhev A. A., Kashina M. A. Dynamics of a drop under the influence of an inhomogeneous electric field // Bulletin of Perm University. Physics, 2019, no. 4, pp. 33–43. doi: 10.17072/1994-3598-2019-4-33-43