ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2016 **Серия: Физика** **Вып. 1 (32)**

УДК 539.31
PACS 45.70.-n, 45.50.Tn

Диссипативные силы при столкновении вязкоупругих тел

Д. С. Голдобин[a,b], А. В. Пименова[a,b], Е. А. Суслопаров[b], Н. В. Бриллиантов[c]

[a] Институт механики сплошных сред УрО РАН
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
[b] Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
[c] University of Leicester
United Kingdom, LE1 7HR, Leicester, University Road
e-mail: anastasiya.pimenova@gmail.com

В работе представлена теория, позволяющая вычислить диссипативные силы, действующие при столкновении двух вязкоупругих тел. Рассматривается случай взаимодействия тел произвольной выпуклой формы с отличающимися материальными параметрами при отсутствующем трении. Теория построена на основе регулярного метода возмущений и является строгой; в рамках теории также определяются диссипативные силы в объеме тела.

Ключевые слова: вязкоупругость; задача Герца; диссипативные силы; гранулированные среды

Поступила в редакцию 13.11.2015; принята к опубликованию 03.03.2016

Dissipative force for collision of visco-elastic bodies

D. S. Goldobin[a,b], A. V. Pimenova[a,b], E. A. Susloparov[b], N. V. Brilliantov[c]

[a] Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS
Akademika Koroleva St. 1, 614013 Perm
[b] Perm State University
Bukireva St. 15, 614990 Perm
[c] University of Leicester
United Kingdom, LE1 7HR, Leicester, University Road
e-mail: anastasiya.pimenova@gmail.com

We develop the theory for analytical calculation of the dissipative forces emerging during the collision of two visco-elastic bodies. The case of interaction of two bodies of arbitrary convex shape with different material properties is considered in the absence of Coulomb friction. The theory is based on a regular perturbation method and is rigorous; within the framework of the theory, the dissipative forces in the bulk are calculated as well.

Keywords: visco-elastic; Hertz contact problem; dissipative force; granular media

Received 13.11.2015; accepted 03.03.2016

doi: 10.17072/1994-3598-2016-1-33-42

1. Введение

Гранулированные материалы широко распространены в природе: они встречаются повсеместно, начиная от песков на Земле и заканчивая планетарными кольцами и пылевыми облаками в открытом космосе [1–5]. Такие материалы обладают интересными характеристиками, проявляя свойства как твердых, так и жидких или газообразных сред [6–9] в зависимости от внешних нагрузок [10–12]. Физическая основа многих необычных явлений в гранулированных средах лежит в природе взаимодействия между их частицами. В отличие от молекулярных или атомных систем, в которых частицы взаимодействуют только посредством консервативных сил, силы, действующие в гранулированных системах, имеют диссипативную составляющую. Так происходит потому, что частицы сами по себе являются макроскопическими телами, имеющими макроскопически большое число микроскопических степеней свободы. В процессе столкновения таких тел их механическая энергия, связанная с поступательным или вращательным движением или упругими деформациями, частично переходит в тепловую энергию. Таким образом, для точного описания поведения гранулированных сред необходима модель, описывающая межчастичное взаимодействие, в том числе силовое, с учетом упругих и диссипативных составляющих.

Упругая составляющая сил межчастичного взаимодействия была описана более века назад в известной работе Г. Герца [13]. Он получил математически строгий результат для сил, действующих между упругими телами в момент контакта, в приближении малых деформаций. Выражение же для диссипативных сил не было получено до сих пор. Существующие феноменологические теории используют линейную (например, [14, 15]) или квадратичную [16] зависимости силы от скорости деформации. Ни одна из этих зависимостей не согласуется с экспериментальными данными [14, 17]. Попытка описать диссипативную силу из первых принципов была предпринята в [18], но в ее основе лежало предположение о том, что существенное значение имеет только деформация сдвига, что накладывало существенные ограничения на область применимости результатов работы. Первое достаточно полное описание [19] основывалось на приближении, в рамках которого предполагается, что поле смещения в объеме сталкивающихся тел аналогично полю смещения при статическом контакте. Найденный в [19] характер функциональной зависимости диссипативной силы от скорости и величины деформации был ранее предложен в работе [20] без строгого математического вывода. В работах [21, 22] выражение для диссипативной силы, полученное в [19], было уточнено, но описание по-прежнему было не вполне верным. С физической точки зрения, общей особенностью работ [19, 21, 22] является то, что в них вычисляются вязкие напряжения на поверхности контакта, но не учитываются аналогичные напряжения и связанные с ними деформации в объеме.

Для того, чтобы учесть отличие поля смещений в объеме деформируемого тела от статического поля смещений, в настоящей работе применяется метод возмущений, за малый параметр в котором принимается отношение микроскопического времени релаксации к времени столкновения. В большинстве случаев это отношение оказывается достаточно мало для того, чтобы используемый подход был применим.

Отметим две явные проблемы в результатах упомянутых более ранних работ. В случае столкновения разнородных тел диссипативные силы, действующие на первое и второе тела, оказываются различны, что противоречит третьему закону Ньютона. Другая очевидная некорректность может быть замечена в зависимости диссипативной силы от коэффициента Пуассона. Если сдвиговый модуль упругости исчезающе мал по сравнению с объемным модулем упругости, т.е. коэффициент Пуассона приближается к значению 0.5 (как, например, для резины), диссипативная сила в работах [19, 21, 22] стремится к нулю, что, очевидно, «нефизично».

Предлагаемая теория, основанная на методе возмущений, является математически строгой и ее результаты свободны от всех указанных «нефизичных» особенностей. В настоящей работе анализируется взаимодействие вязкоупругих тел произвольной выпуклой формы с различными материальными параметрами. Более частный случай столкновения сферического тела с бесконечно жесткой плоскостью или двух сферических тел с одинаковыми материальными параметрами представлен нами ранее в работе [23].

2. Уравнения для вязкоупругой среды

Когда два вязкоупругих тела вступают в контакт и деформируются, между ними возникают силы взаимодействия. В общем случае, они содержат как упругую, так и вязкую составляющие, но при статическом контакте возникает только упругая сила. Для вычисления сил взаимодействия необходимо найти напряжения, возникающие в телах при контакте, и проинтегрировать их по площади контакта. Распределение напряжений в материале описывается уравнением сплошной среды, приведенным, например, в [19, 24]:

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}} = \nabla\cdot\hat{\sigma} = \nabla\cdot\left(\hat{\sigma}^{el} + \hat{\sigma}^{v}\right). \qquad (1)$$

Здесь ρ – плотность материала, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ – поле смещения в точке r и $\hat{\sigma}$ – тензор напряжений, состоящий из упругой $\hat{\sigma}^{el}$ и вязкой частей $\hat{\sigma}^{v}$.

Упругие напряжения линейно зависят от тензора деформации:

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right),$$

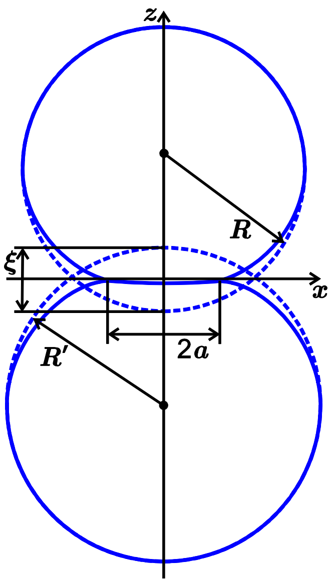
а именно [19, 24]:

$$\sigma_{ij}^{el} = 2E_1 u_{ij} + \left(E_2 - \frac{2}{3}E_1\right) u_{kk}\delta_{ij}. \qquad (2)$$

Аналогично для вязких напряжений [19, 24]:

$$\sigma_{ij}^{v} = 2\eta_1 \dot{u}_{ij} + \left(\eta_2 - \frac{2}{3}\eta_1\right)\dot{u}_{kk}\delta_{ij}.$$

Здесь $E_1 = Y/[2(1+\nu)]$ и $E_2 = Y/[3(1-2\nu)]$, где Y и ν обозначают модуль Юнга и коэффициент Пуассона, η_1 и η_2 – коэффициенты динамической сдвиговой и объемной вязкости соответственно; индексы i, j, k нумеруют декартовы координаты. Предлагаемое математическое описание соответствует модели Фойгта, к которой в случае достаточно медленного столкновения редуцируются более общие модели, учитывающие релаксацию напряжений и запаздывание деформаций [19].



Взаимодействие двух вязкоупругих сфер (решение строится для более общего случая тел произвольной выпуклой формы)

Для рассмотрения пары тел (см. рисунок) обозначим поле смещения в верхнем теле, расположенном в области $z > 0$, как $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$, а поле смещений в нижнем теле ($z < 0$) – $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}')$, причем для нижнего тела в качестве вертикальной координаты будет использоваться $z' = -z$, $\boldsymbol{r}' = (x, y, z')$. В физически реалистичных ситуациях деформации контактирующих твердых тел малы по сравнению с их размерами. В частности, область контакта и собственной деформации тел мала по сравнению с радиусом кривизны контактирующих поверхностей, и задача о деформации каждого из тел может рассматриваться как задача о вдавливании изначально плоской границы вязкоупругого полупространства. Математически это означает, что поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ задается в полупространстве $z > 0$, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}')$ – в полупространстве $z' > 0$, а граничные условия, как для области контакта, так и для свободных поверхностей тел в окрестности области контакта, задаются на плоскости $z = 0$ ($z' = 0$).

При решении задачи о контакте двух тел уравнения в объеме тел следует дополнить граничными условиями для полей деформации и напряжений. На поверхностях отсутствуют касательные напряжения:

$$\left.\left(\sigma_{xz}^{el}(\boldsymbol{u}) + \sigma_{xz}^{v}(\boldsymbol{u})\right)\right|_{z=0} = 0, \qquad (3)$$
$$\left.\left(\sigma_{yz}^{el}(\boldsymbol{u}) + \sigma_{yz}^{v}(\boldsymbol{u})\right)\right|_{z=0} = 0$$

и аналогично – для нижнего тела. Нормальные напряжения отсутствуют на свободной поверхности:

$$\left.\left(\sigma_{zz}^{el}(\boldsymbol{u}) + \sigma_{zz}^{v}(\boldsymbol{u})\right)\right|_{z=0} = 0, \qquad (4)$$

а на поверхности контакта определяются внешним нормальным давлением P_z:

$$\left.\left(\sigma_{zz}^{el}(\boldsymbol{u}) + \sigma_{zz}^{v}(\boldsymbol{u})\right)\right|_{z=0} = -P_z, \qquad (5)$$

которое должно быть согласовано для верхнего и нижнего тел:

$$\left.\left(\sigma_{zz}^{el}(\boldsymbol{u}) + \sigma_{zz}^{v}(\boldsymbol{u})\right)\right|_{z=0} = \left.\left(\sigma_{z'z'}^{el}(\boldsymbol{w}) + \sigma_{z'z'}^{v}(\boldsymbol{w})\right)\right|_{z'=0}. \qquad (6)$$

3. Метод возмущений

В большинстве случаев вязкие силы значительно меньше упругих, и материал контактирующих тел является достаточно твердым, что позволяет пренебречь инерционными эффектами для ударов, скорость которых не слишком велика. Оценим величину слагаемых в уравнении (1), для чего приведем его к безразмерному виду. В качестве характерного линейного масштаба области контакта выберем a. Тогда соответствующая характерная величина вдавливания поверхностей сталкивающихся тел оказывается $u_0 \sim a^2/R$, где R – характерная кривизна контактирующих поверхностей. В качестве масштаба времени выберем τ_c – продолжительность столкновения. Тогда $v_0 = u_0/\tau_c$ является характерной скоростью удара. Таким образом,

$$\nabla \cdot \hat{\sigma}^{v} \sim \lambda_1 \nabla \cdot \hat{\sigma}^{el}, \quad \lambda_1 = \tau_{rel}/\tau_c,$$

а для размерного соотношения $\rho\ddot{\boldsymbol{u}} \sim \nabla \cdot \hat{\sigma}^{el}$ имеем

$$\lambda_2 \ddot{\boldsymbol{u}} \sim \Delta \boldsymbol{u} + (1-2\nu)^{-1} \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u},$$
$$\lambda_2 = (R/u_0)(v_0^2 / c^2).$$

Здесь $c^2 = Y/\rho$ и $\tau_{rel} = \eta/Y$ характеризуют соответственно скорость звука и время микроскопической релаксации материала, а $\eta \sim \eta_1 \sim \eta_2$ [19]. Из решения задачи Герца может быть сделана оценка для упругого столкновения: $(R/u_0) \sim (v_0/c)^{-4/5}$. В итоге, для параметра λ_2 получаем $\lambda_2 \sim (v_0/c)^{6/5}$.

Пренебрегая слагаемыми порядка λ_1 и λ_2, получаем

$$\nabla \cdot \hat{\sigma}^{el}(\boldsymbol{u}) = 0, \quad \nabla \cdot \hat{\sigma}^{el}(\boldsymbol{w}) = 0.$$

Это приближение дает результаты, аналогичные получаемым в работах [19, 21, 22, 25, 26]. При сохранении слагаемых порядка λ_1 получаются следующие выражения:

$$\begin{gathered} \nabla\cdot\left(\hat{\sigma}^{el}(\boldsymbol{u}) + \hat{\sigma}^{v}(\dot{\boldsymbol{u}})\right) = 0, \\ \nabla\cdot\left(\hat{\sigma}^{el}(\boldsymbol{w}) + \hat{\sigma}^{v}(\dot{\boldsymbol{w}})\right) = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Таким образом, чтобы выйти за рамки использовавшегося ранее подхода, необходимо найти решение уравнения (7), которое содержит оба поля смещений, а также их производные. Граничные условия для уравнения (7) соответствуют нулевым напряжениям на свободной поверхности.

В большинстве случаев $\lambda_1 = \tau_{rel}/\tau_c \ll 1$, что означает малость вязких напряжений по сравнению с упругими. Это позволяет использовать стандартный метод возмущений (см, например, [6]) для решения уравнения (7), с разложением искомого поля в ряд по малому параметру $\lambda \sim \lambda_1$. Тогда

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^{(0)} + \lambda \hat{\sigma}^{(1)} + \lambda^2 \hat{\sigma}^{(2)} + \ldots \tag{8}$$

и соответственно:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{u}^{(0)}(\boldsymbol{r}) + \lambda \boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{r}) + \lambda^2 \boldsymbol{u}^{(2)}(\boldsymbol{r}) + \ldots, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{w}^{(0)}(\boldsymbol{r}') + \lambda \boldsymbol{w}^{(1)}(\boldsymbol{r}') + \lambda^2 \boldsymbol{w}^{(2)}(\boldsymbol{r}') + \ldots. \tag{10}$$

Подстановка выражений (8)–(10) в уравнение (7) дает набор уравнений разных порядков по λ. Уравнения нулевого порядка с соответствующими граничными условиями имеют вид

$$\nabla \cdot \hat{\sigma}^{el}\left(\boldsymbol{u}^{(0)}\right) = 0, \quad \nabla \cdot \hat{\sigma}^{el}\left(\boldsymbol{w}^{(0)}\right) = 0. \tag{11}$$

Уравнения первого порядка, в свою очередь, имеют вид

$$\nabla \cdot \left(\hat{\sigma}^{el}(\boldsymbol{u}^{(1)}) + \hat{\sigma}^{v}(\boldsymbol{u}^{(0)})\right) = 0, \tag{12}$$
$$\nabla \cdot \left(\hat{\sigma}^{el}(\boldsymbol{w}^{(1)}) + \hat{\sigma}^{v}(\boldsymbol{w}^{(0)})\right) = 0$$

с аналогичным разложением граничных условий (3)–(6) и условием согласования смещений:

$$u_z^{(1)}(x, y, 0) + w_{z'}^{(1)}(x, y, 0) = 0 \tag{13}$$

(и так далее для старших порядков).

4. Решение в нулевом порядке малости

Для упрощения обозначений на данном этапе мы не будем добавлять дополнительный индекс для обозначения тела: все характеристики относятся к рассматриваемому верхнему телу.

Для решения уравнения (11) применим подход, описанный в [13], и будем искать решение в виде

$$\boldsymbol{u}^{(0)} = f^{(0)} \boldsymbol{e}_z + \nabla \varphi^{(0)}. \tag{14}$$

Здесь $\varphi^{(0)} = K^{(0)} z f^{(0)} + \psi^{(0)}$, где $K^{(0)}$ – некоторая константа, которая будет найдена в ходе решения, $f^{(0)}$ и $\psi^{(0)}$ – некоторые гармонические функции: $\Delta f^{(0)} = 0$, $\Delta \psi^{(0)} = 0$. Мы предполагаем, что на поверхности контакта отсутствуют тангенциальные напряжения, что выполняется, например, при взаимодействии тел из одинакового материала. Принимая во внимание, что

$$\begin{gathered} \Delta \boldsymbol{u}^{(0)} = \Delta \nabla \varphi^{(0)} = 2K^{(0)} \nabla \frac{\partial f^{(0)}}{\partial z}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u}^{(0)} = (1 + 2K^{(0)}) \frac{\partial f^{(0)}}{\partial z}, \end{gathered} \tag{15}$$

перепишем уравнение (11) в виде:

$$\begin{gathered} \nabla_j \sigma_{ij}^{el(0)} = \left[2E_1 K^{(0)} + \right. \\ \left. + (1 + 2K^{(0)}) \left(E_2 + \frac{E_1}{3} \right) \right] \nabla_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial z} = 0, \end{gathered} \tag{16}$$

откуда следует

$$K^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{3E_2 + E_1}{3E_2 + 4E_1}. \tag{17}$$

Рассмотрим граничные условия (3)–(5) для тензора напряжений. На свободной границе все компоненты тензора напряжений отсутствуют. В зоне контакта, расположенной в плоскости $z = 0$, касательные напряжения $\sigma_{xz}^{el(0)}$ и $\sigma_{yz}^{el(0)}$ исчезают, а нормальные компоненты имеют вид

$$\boldsymbol{nn} : \hat{\sigma}^{el(0)} = \sigma_{zz}^{el(0)} = -P_z^{(0)}$$

где $\boldsymbol{n} = (0, 0, -1)$ – вектор внешней нормали. Таким образом, граничные условия имеют вид

$$\begin{gathered} \sigma_{xz}^{el(0)}\Big|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{yz}^{el(0)}\Big|_{z=0} = 0, \\ \sigma_{zz}^{el(0)}\Big|_{z=0} = -P_z^{(0)}. \end{gathered} \tag{18}$$

Подставляя выражения (2) и (14) в граничные условия (18), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3E_1}{4E_1+3E_2} f^{(0)} + 2\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0} = 0, \qquad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3E_1}{4E_1+3E_2} f^{(0)} + 2\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0} = 0, \qquad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(f^{(0)} + 2\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0} = -\frac{P_z^{(0)}}{E_1}. \qquad (21)$$

Интегрирование уравнений (19) и (20) по координатам x и y дает следующее соотношение между $f^{(0)}$ и $\partial\psi^{(0)}/\partial z$ при $z=0$:

$$\left(\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z} + \frac{3}{2}\frac{E_1}{4E_1+3E_2} f^{(0)}\right)\Bigg|_{z=0} = const = 0. \qquad (22)$$

Константа в уравнении (22) равна нулю, так как, с одной стороны, она не зависит от координат, а с другой стороны, на бесконечности описываемая функция должна равняться нулю. Так как $f^{(0)}$, $\psi^{(0)}$ и $\partial\psi^{(0)}/\partial z$ являются гармоническими функциями, условие того, что их линейная комбинация на границе равняется нулю, означает, что она равняется нулю во всем объеме, т.е.

$$\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z} = -\frac{3}{2}\frac{E_1}{4E_1+3E_2} f^{(0)}. \qquad (23)$$

Подставляя последнее выражение в (21), находим

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial z}\Bigg|_{z=0} = -\frac{4E_1+3E_2}{E_1(E_1+3E_2)} P_z^{(0)}. \qquad (24)$$

Так как $f^{(0)}$ – гармоническая функция, к ней применимо следующее соотношение между нормальной производной гармонической функции на поверхности и ее значением во всем объеме, известное из теории гармонических функций (см., например, [24, 27]):

$$f^{(0)}(\boldsymbol{r}) = \frac{4E_1+3E_2}{2\pi E_1(E_1+3E_2)} \iint_S \frac{P_z^{(0)}(x_1,y_1)\,dx_1 dy_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}, \qquad (25)$$

где S – область контакта. Используя выражение (14), можно написать в нулевом порядке z-компоненту смещения на границе $z=0$ в виде

$$u_z^{(0)}\Big|_{z=0} = (1+K^{(0)})\, f^{(0)}\Big|_{z=0} + \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z}\Bigg|_{z=0},$$

что, совместно с уравнением (23) и выражением для $K^{(0)}$ (17), дает

$$u_z^{(0)}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2} f^{(0)}\Big|_{z=0}. \qquad (26)$$

При выражении E_1 и E_2 в терминах ν_1 и Y_1 получаем из уравнений (25) и (26):

$$u_z^{(0)}(x,y,z=0) = \frac{1-\nu_1^2}{\pi Y_1} \iint_S \frac{P_z^{(0)}(x_1,y_1)\,dx_1 dy_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}. \qquad (27)$$

Аналогичный вывод можно привести и для нижнего тела. Учитывая, что внешняя нормаль к верхнему и нижнему телам так же, как и внешнее давление, равны по модулю, но имеют противоположный знак ($\boldsymbol{n} = \mathbf{n}_{\text{up}} = -\boldsymbol{n}_{\text{low}}$, $P_z = P_{z,\text{up}} = -P_{z,\text{low}} = P_{z',\text{low}}$), получаем

$$w_{z'}^{(0)}(x,y,z'=0) = \frac{1-\nu_2^2}{\pi Y_2} \iint_S \frac{P_z^{(0)}\,dx_1 dy_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}.$$

Согласно [25], давление $P_z^{(0)}$ определяется выражением

$$P_z^{(0)}(r)\Big|_{z=0} = -\sigma_{zz}^{el(0)}\Big|_{z=0} = \frac{3F^{el}}{2\pi ab}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, \qquad (28)$$

где F^{el} – полная упругая сила, действующая на тело, a и b – полуоси эллиптической области контакта поверхностей, выражения для них приведены в [24]. Эта задача контактного взаимодействия, которая была решена Г. Герцем в 1882 г. [13], описывает силы, возникающие при взаимодействии чисто упругих частиц.

В случае сферических тел радиусом R и R' область контакта имеет круговую форму ($a=b$), и выражение для радиуса области контакта принимает упрощенный вид

$$a = b = \sqrt{\frac{RR'}{R+R'}\xi}.$$

5. Решение в первом порядке малости

Мы снова будем рассматривать только верхнее тело при $z>0$ и введем следующие обозначения:

$$\hat{\sigma}^{el}\left(\boldsymbol{u}^{(0)}\right) = \hat{\sigma}^{el(0)}, \quad \hat{\sigma}^{el}\left(\boldsymbol{u}^{(1)}\right) = \hat{\sigma}^{el(1)}, \quad \hat{\sigma}^{v}\left(\dot{\boldsymbol{u}}^{(0)}\right) = \hat{\sigma}^{v(1)}. \qquad (29)$$

В этих терминах уравнения (2) и (15) дают:

$$\sigma_{ij}^{v}\left(\dot{\boldsymbol{u}}^{(0)}\right) = \sigma_{ij}^{v(1)} = \frac{\eta_1}{E_1}\dot{\sigma}_{ij}^{el(0)} + \left(\eta_2 - \eta_1\frac{E_2}{E_1}\right)(1+2K^{(0)})\frac{\partial \dot{f}^{(0)}}{\partial z}\delta_{ij}. \qquad (30)$$

Соответствующая дивергенция тензора напряжений с учетом (16) и (17):

$$\nabla_j \sigma_{ij}^{v(1)} = \left[2\eta_1 K^{(0)} + (1+2K^{(0)})\left(\eta_2 + \frac{\eta_1}{3}\right)\right]\nabla_i \frac{\partial \dot{f}^{(0)}}{\partial z} = \\ = \frac{3(E_1\eta_2 - E_2\eta_1)}{4E_1 + 3E_2}\nabla_i \frac{\partial \dot{f}^{(0)}}{\partial z}. \quad (31)$$

В уравнении (30) используем выражение (24) для $\partial\dot{f}^{(0)}/\partial z$ и выражение (17) для $K^{(0)}$, тогда zz-компонента тензора вязких напряжений на плоскости контакта $z = 0$:

$$\sigma_{zz}^{v(1)}(x,y,0) = \alpha\dot{\sigma}_{zz}^{el(0)}(x,y,0), \quad (32)$$

$$\alpha = \frac{3\eta_2 + \eta_1}{E_1 + 3E_2}.$$

Аналогичное выражение может быть получено для нижнего тела. Используя выражения для E_1 и E_2, для коэффициента α получаем

$$\alpha_i = \frac{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}{Y_i}\left(2\eta_{2(i)} + \frac{2}{3}\eta_{1(i)}\right), \quad (33)$$

где индекс $i = 1, 2$ обозначает номер тела: $i = 1$ для верхнего тела и $i = 2$ для нижнего. Приближение, предложенное в работе [19] и соответствующее результатам [21, 22], ограничивается вычислением $\sigma_{zz}^{v(1)}(x,y,0)$ и выражения для α_i. Заметим, однако, что такое приближение оказывается, очевидно, неправомочным в случае столкновения разнородных тел. В рамках этого приближения значение $\sigma_{zz}^{v(1)}$ на поверхности контакта отличается для нижнего и верхнего тел, так как $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Таким образом, третий закон Ньютона в этом случае не выполняется.

Кроме того, в результатах более ранних работ диссипативная сила исчезает при коэффициенте Пуассона $\nu = 1/2$, что соответствует материалам, у которых (как, например, у резины) объемный модуль упругости велик по сравнению со сдвиговым: $E_2/E_1 = [2(1+\nu)]/[3(1-2\nu)] \to \infty$. Такие материалы практически несжимаемы, однако сдвиговые деформации и сдвиговая вязкость для них не исчезают, а следовательно, не может обращаться в ноль диссипация.

Рассмотрим первый порядок (12) для напряжений (29) в верхнем теле:

$$\nabla_j(\sigma_{ij}^{el(1)} + \sigma_{ij}^{v(1)}) = 0. \quad (34)$$

Вследствие линейности задачи поле смещений в первом порядке можно представить в виде суммы двух слагаемых, $\boldsymbol{u}^{(1)} = \tilde{\boldsymbol{u}}^{(1)} + \bar{\boldsymbol{u}}^{(1)}$, которые отвечают двум частям тензора упругих напряжений:

$$\sigma_{ij}^{el(1)} = \tilde{\sigma}_{ij}^{el(1)}(\tilde{\boldsymbol{u}}^{(1)}) + \bar{\sigma}_{ij}^{el(1)}(\bar{\boldsymbol{u}}^{(1)}).$$

Здесь первая часть $\sigma_{ij}^{el(1)}$ представляет собой решение неоднородного уравнения с однородными граничными условиями («свободные» границы):

$$\nabla_j \tilde{\sigma}_{ij}^{el(1)} = -\nabla_j \sigma_{ij}^{v(1)}, \quad (35)$$

$$\tilde{\sigma}_{xz}^{el(1)}\Big|_{z=0} = \tilde{\sigma}_{yz}^{el(1)}\Big|_{z=0} = \tilde{\sigma}_{zz}^{el(1)}\Big|_{z=0} = 0, \quad (36)$$

а вторая часть – решение однородного уравнения

$$\nabla_j \bar{\sigma}_{ij}^{el(1)} = 0 \quad (37)$$

с заданным на поверхности контакта смещением $\bar{u}_z^{(1)}$ и свободными границами за пределами области контакта. Уравнение (37) решается аналогично уравнению (12) для функции в первом порядке малости. Таким образом, решение имеет тот же вид, что и выражение (27) (напомним, $\sigma_{zz}(z=0) = -P_z$):

$$\bar{u}_z^{(1)}\Big|_{z=0} = -\frac{1-\nu_1^2}{\pi Y_1}\times \\ \times\iint_S \frac{\bar{\sigma}_{zz}^{el(1)}(x_1, y_1, z=0\,|\,\boldsymbol{u}^{(1)})\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|}. \quad (38)$$

Для решения задачи (35)–(36) представим поле смещения $\tilde{\boldsymbol{u}}^{(1)}$ в виде аналогичном виду решения в нулевом порядке:

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^{(1)} = f^{(1)}\boldsymbol{e}_z + \nabla\varphi^{(1)}, \quad (39)$$

где $\varphi^{(1)} = K^{(1)} z f^{(1)} + \psi^{(1)}$, $K^{(1)}$ – некоторая константа, $f^{(1)}$ и $\psi^{(1)}$ – гармонические функции. Тогда тензор напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}^{el(1)}$ имеет вид

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{el(1)} = (1+2K^{(1)})\left[E_1(\delta_{jz}\nabla_i f^{(1)} + \delta_{iz}\nabla_j f^{(1)}) + \right. \\ \left. + \left(E_2 - \frac{2}{3}E_1\right)\frac{\partial f^{(1)}}{\partial z}\delta_{ij}\right] + 2E_1 K^{(1)} z\nabla_i\nabla_j f^{(1)} + \\ + 2E_1\nabla_i\nabla_j\psi^{(1)}.$$

Если выбрать $K^{(1)} = -1/2$, тензор напряжений принимает вид

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{el(1)} = -E_1 z\nabla_i\nabla_j f^{(1)} + 2E_1\nabla_i\nabla_j\psi^{(1)},$$

а граничные условия

$$\tilde{\sigma}_{xz}^{el(1)}\Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0} = 0,$$

$$\tilde{\sigma}_{yz}^{el(1)}\Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0} = 0.$$

Так как на бесконечности производные $\psi^{(1)}$ равны нулю, то

$$\left.\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z}\right|_{z=0} = const = 0$$

и, по свойствам гармонических функций, $\psi^{(1)} = 0$ во всем объеме. Тогда

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{el(1)} = -E_1 z \nabla_i \nabla_j f^{(1)}.$$

Третье граничное условие $\tilde{\sigma}_{zz}^{el(1)} = 0$ при $z = 0$ автоматически выполняется. Так как функция является гармонической, справедливо

$$\nabla_j \tilde{\sigma}_{ij}^{el(1)} = -E_1 \nabla_i \frac{\partial f^{(1)}}{\partial z}.$$

Используя уравнения (31) и (35), последнее уравнение можно переписать в виде

$$E_1 \nabla_i \frac{\partial f^{(1)}}{\partial z} = -\frac{3(E_2\eta_1 - E_1\eta_2)}{4E_1 + 3E_2} \nabla_i \frac{\partial \dot{f}^{(0)}}{\partial z},$$

что определяет соотношение между функциями $f^{(1)}$ и $\dot{f}^{(0)}$:

$$f^{(1)} = -\beta \dot{f}^{(0)}, \tag{40}$$

$$\beta = \frac{3(E_2\eta_1 - E_1\eta_2)}{E_1(3E_2 + 4E_1)}. \tag{41}$$

Подставляя $K^{(1)} = -1/2$ и $\psi^{(1)} = 0$ в (39), имеем:

$$\tilde{u}_z^{(1)} = \frac{1}{2} f^{(1)} - \frac{z}{2}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial z},$$

что совместно с (40) дает

$$\tilde{u}_z^{(1)} = -\frac{1}{2}\beta\left(\dot{f}^{(0)} - z\frac{\partial \dot{f}^{(0)}}{\partial z}\right),$$

где $f^{(0)}$ определяется выражением (25). Принимая во внимание соотношение между $f^{(0)}$ и $u_z^{(0)}$ на границе контакта (26) совместно с выражением (27) для $u_z^{(0)}$, получаем на поверхности $z = 0$:

$$\left.\tilde{u}_z^{(1)}\right|_{z=0} = \frac{1-\nu_1^2}{\pi Y_1}\iint_S \frac{\beta_1 \dot{\sigma}_{zz}^{el(0)}(x_1, y_1, z=0)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|}. \tag{42}$$

Аналогично для нижнего тела:

$$\left.\bar{w}_{z'}^{(1)}\right|_{z'=0} = \frac{1-\nu_2^2}{\pi Y_2} \times \\ \times \iint_S \frac{\bar{\sigma}_{z'z'}^{el(1)}(x_1, y_1, z'=0 \,|\, \boldsymbol{w}^{(1)})\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_1|} \tag{43}$$

и

$$\left.\tilde{w}_{z'}^{(1)}\right|_{z'=0} = \frac{1-\nu_2^2}{\pi Y_2}\iint_S \frac{\beta_2 \dot{\sigma}_{z'z'}^{el(0)}(x_1, y_1, z'=0)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_1|}. \tag{44}$$

Применим условие согласованности нормальных напряжений (6) с учетом (32) для обоих тел:

$$\left.\left(\alpha_1 \dot{\sigma}_{zz}^{el(0)}(\boldsymbol{u}^{(0)}) + \bar{\sigma}_{zz}^{el(1)}(\boldsymbol{u}^{(1)})\right)\right|_{z=0} = \\ = \left.\left(\alpha_2 \dot{\sigma}_{z'z'}^{el(0)}(\boldsymbol{w}^{(0)}) + \bar{\sigma}_{z'z'}^{el(1)}(\boldsymbol{w}^{(1)})\right)\right|_{z'=0},$$

или

$$\left.\bar{\sigma}_{z'z'}^{el(1)}(\boldsymbol{w}^{(1)})\right|_{z'=0} = \\ = (\alpha_1 - \alpha_2)\left.\dot{\sigma}_{zz}^{el(0)}\right|_{z=0} + \left.\bar{\sigma}_{zz}^{el(1)}(\boldsymbol{u}^{(1)})\right|_{z=0}. \tag{45}$$

Граничные условия (13) для вектора смещения:

$$u_z^{(1)} + w_{z'}^{(1)} = \bar{u}_z^{(1)} + \tilde{u}_z^{(1)} + \bar{w}_{z'}^{(1)} + \tilde{w}_{z'}^{(1)} = 0,$$

с учетом выражений (38), (42), (43) и (44) для $\bar{u}_z^{(1)}$, $\tilde{u}_z^{(1)}$, $\bar{w}_{z'}^{(1)}$ и $\tilde{w}_{z'}^{(1)}$, соответственно, дают:

$$\iint_S \Big[(\beta_1 D_1 + \beta_2 D_2)\dot{\sigma}_{zz}^{el(0)} - D_1 \bar{\sigma}_{zz}^{el(1)}(\boldsymbol{u}^{(1)}) - \\ - D_2 \bar{\sigma}_{z'z'}^{el(1)}(\boldsymbol{w}^{(1)}) \Big]\Big|_{z=0} \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|} = 0, \tag{46}$$

где для краткости введены обозначения

$$D_i = \frac{1-\nu_i^2}{Y_i}, \qquad i = 1, 2.$$

Уравнение (46) совместно с (45) дает нормальные упругие напряжения первого порядка малости на поверхности контакта:

$$\left.\bar{\sigma}_{zz}^{el(1)}(u^{(1)})\right|_{z=0} = \left[\frac{\beta_1 D_1 + \beta_2 D_2}{D_1 + D_2} - \\ - \frac{D_2(\alpha_1 - \alpha_2)}{D_1 + D_2} \right] \left.\dot{\sigma}_{zz}^{el(0)}\right|_{z=0}. \tag{47}$$

Учитывая, что полное напряжение в первом порядке на поверхности контакта имеет две составляющие – упругую, описываемую уравнением (47), и вязкую $\sigma_{zz}^{v(1)}$, описываемую уравнением (32), имеем

$$\left.\sigma_{zz}^{(1)}\right|_{z=0} = \left.(\sigma_{zz}^{v(1)} + \sigma_{zz}^{el(1)})\right|_{z=0} = A \left.\dot{\sigma}_{zz}^{el(0)}\right|_{z=0}, \tag{48}$$

где

$$A = \frac{(\alpha_1 + \beta_1)D_1 + (\alpha_2 + \beta_2)D_2}{D_1 + D_2}.$$

Константа A с учетом выражений (33) и (41) может быть записана в виде

$$A = \frac{\gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2}{D_1 + D_2},$$

$$\gamma_i = \frac{1}{Y_i}\left(\frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}\right)\left[\frac{4}{3}\eta_{1(i)}(1 - \nu_i + \nu_i^2) + \eta_{2(i)}(1 - 2\nu_i)^2\right].$$

6. Диссипативные силы

Найдем диссипативные силы, действующие между частицами. Величину этих сил можно получить интегрированием тензора напряжений первого порядка $\sigma_{zz}^{(1)}$, определяемого уравнением (48):

$$F_z^{v(1)} = \iint_S \sigma_{zz}^{(1)}(x,y)\,|_{z=0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ = A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \sigma_{zz}^{el(0)}(x,y)\,|_{z=0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{49}$$

Здесь следует быть аккуратным с изменением порядка операций интегрирования по зависящей от времени площади контакта $S(t)$ и дифференцирования по времени. В общем случае, для вариации интеграла нормальных упругих напряжений по площади контакта при инфинитезимальной вариации параметра сближения от ξ до $\xi+\delta\xi$ имеем

$$\delta\iint_{S(\xi)} \sigma_{zz}^{el(0)}(x,y\,|\,\xi)\,|_{z=0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ = \iint_{S(\xi)} (\sigma_{zz}^{el(0)}(x,y\,|\,\xi+\delta\xi)\,|_{z=0} - \\ - \sigma_{zz}^{el(0)}(x,y\,|\,\xi)\,|_{z=0})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \\ + \iint_{S(\xi+\delta\xi)-S(\xi)} \sigma_{zz}^{el(0)}(x,y\,|\,\xi+\delta\xi)\,|_{z=0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{50}$$

Как видно из (28), для решения задачи Герца нормальные напряжения $\sigma_{zz}^{el(0)}(x,y)|_{z=0}$ по мере приближения к краю области контакта стремятся к нулю по коренному закону: $\sigma_{zz}^{el(0)}(x,y\,|\,\xi)\,|_{z=0} \sim x_n^{1/2}$, где x_n – расстояние от границы области контакта. Вследствие чего последний интеграл в уравнении (50) по приращению области $S(\xi+\delta\xi)-S(\xi)$ пропорционален

$$\int_0^{a(\xi+\delta\xi)-a(\xi)} x_n^{1/2}\,\mathrm{d}\,x_n \sim \left[\frac{\delta a}{\delta\xi}\right]^{3/2}(\delta\xi)^{3/2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta\xi}\iint_{S(\xi)} \sigma_{zz}^{el(0)}(x,y\,|\,\xi)\,|_{z=0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ = \iint_{S(\xi)} \frac{\delta}{\delta\xi}\sigma_{zz}^{el(0)}(x,y\,|\,\xi)\,|_{z=0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + O\left[(\delta\xi)^{1/2}\right].$$

Можно видеть, что в случае инфинитезимального приращения $\delta\xi$ последний вклад исчезающе мал, поэтому воспользуемся тем, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\frac{\delta}{\delta\xi}.$$

Таким образом, получаем, что операции дифференцирования по времени и интегрирования по зависящей от времени области контакта коммутируют при условии, что нормальные напряжения достаточно быстро стремятся к нулю по мере приближения к границе этой области.

На основании равенства (49) имеем

$$F_z^{v(1)} = -A\dot{F}_z^{el(0)},$$

где $F_z^{el(0)}$ – нормальная составляющая силы, соответствующая упругой реакции среды. Она равняется силе Герца, поэтому получаем

$$F_z^{v(1)} = -\frac{3}{2}AC_0\sqrt{\xi}\dot{\xi}.$$

Здесь константа C_0 определяется геометрией сталкивающихся тел и их материальными свойствами, ξ – величина сближения тел по сравнению с недеформированным состоянием (см. рисунок).

Таким образом, полная сила, действующая между двумя вязкоупругими телами, в линейном по диссипативным константам приближении имеет вид

$$F_{\mathrm{tot}} = C_0\xi^{3/2} - \frac{3}{2}AC_0\sqrt{\xi}\dot{\xi},$$

где соотношение между деформацией ξ и полуосями a и b эллиптической области соприкосновения определяется аналогично статической теории Герца. Отметим, однако, что в теории Герца деформация ξ однозначно связана с полной силой, действующей между телами, в отличие от полученных нами результатов, где размер области контакта определяет упругую составляющую силы, а скорость его изменения – диссипативную.

7. Заключение

В работе получено новое выражение для диссипативной силы, действующей между вязкоупругими телами в процессе столкновения. В отличие от теорий, предлагавшихся ранее, основанных на недостаточно строгих физически и математически подходах, наша теория использует полное самосогласованное физическое описание и математически строгий метод возмущений. В роли малого параметра выступает отношение времени микроскопической релаксации напряжений к продолжительности процесса столкновения. Вычислены слагаемые нулевого и первого порядков и определена величина диссипативной составляющей сил взаимодействия между телами. Новое выражение для диссипативной силы значительно отличается от предыдущих, поскольку позволяет верно описать взаимодействие тел из разных материалов.

В данной работе не учитываются инерционные эффекты, так как рассматриваются случаи, при которых характерные скорости в задаче значительно меньше скорости звука в телах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант 14-21-00090.

Список литературы

1. *Hermann H. J., Hovi J. P., Luding S.* Physics of Dry Granular Media // NATO ASI Series. Dodrecht: Kluwer, 1998.
2. *Jaeger H., Nagel S., Behringer R.* Granular solids, liquids, and gases // Review of Modern Physics 1996. Vol. 68. 1259.
3. *Hinrichsen H., Wolf D. E.* The Physics of Granular Media. Berlin: Wiley, 2004.
4. *Duran J.* Sands, Powders and Grains. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
5. *Greenberg R., Brahic A.* Planetary Rings. Tucson: The University of Arizona Press, 1984.
6. *Brilliantov N. V., Pöschel T.* Kinetic theory of Granular Gases. Oxford: Oxford University Press, 2004.
7. *Pöschel T, Luding S.* Granular Gases // Lecture Notes in Physics. Vol. 564. Berlin: Springer, 2001.
8. *Pöschel T., Brilliantov N. V.* Granular Gas Dynamics // Lecture Notes in Physics. Vol. 624. Berlin: Springer, 2003.
9. *Barrat A., Trizac E., Ernst M. H.* Granular gases: dynamics and collective effects // Journal of Physics: Condensed Matter. 2005. Vol. 17. P. 2429–2437.
10. *Wildman R. D, Parker D. J.* Coexistence of Two Granular Temperatures in Binary Vibrofluidized Beds // Physical Review Letters. 2002. Vol. 88, 064301.
11. *Feitosa K., Menon N.* Breakdown of Energy Equipartition in a 2D Binary Vibrated Granular Gas. // Physical Review Letters. 2002. Vol. 88, 198301.
12. *Zik O., Levine D., Lipson S., Shtrikman S.,* Stavans J. Rotationally induced segregation of granular materials // Physical Review Letters. 1994. Vol. 73. P. 644–647.
13. *Hertz H.* Über die Berührung fester elastischer Körper // Journal für die reine und angewandte. Mathematik. 1882. Vol. 92. P. 156–171.
14. *Poeschel T., Schwager T.* Computational granular dynamics. Berlin: Springer, 2005.
15. *Luding S.* Towards dense, realistic granular media in 2D // Nonlinearity. 2009. Vol. 22. P. 101–146.
16. *Poeschl T.* Versuch einer Erweiterung der Hertzschen Theorie des Stoßes auf plastische Körper // Zeitschrift für Physik. 1928. Vol. 46. P. 142–146.
17. *Montaine M., Heckel M., Kruelle C., Schwager T., Poeschel T.* Coefficient of restitution as a fluctuating quantity // Physical Review E. 2011. Vol. 84, 041306.
18. *Pao Y. H.* Extension of the Hertz theory of impact to the viscoelastic case // Journal of Applied Physics. 1955. Vol. 26. P. 1083–1088.
19. *Brilliantov N., Spahn F., Hertzsch J., Pöschel T.* Model for collisions in granular gases // Physical Review E. 1996. Vol. 53. P. 5382–5392.
20. *Kuwabara G., Kono K.* Restitution coefficient in a collision between two spheres // Japanese Journal of Applied Physics. 1987. Vol. 26. Part 1. No. 6. P. 1230–1233.
21. *Zheng Q. J., Zhu H. P., Yu A. B.* Finite element analysis of the contact forces between a viscoelastic sphere and rigid plane // Powder Technology. 2012. Vol. 226. P. 130–142.
22. *Zheng Q. J, Zhou Z. Y., Yu A. B.* Contact forces between viscoelastic ellipsoidal particles // Powder Technology. 2013. Vol. 248. P. 25–33.
23. *Brilliantov N. V., Pimenova A. V., Goldobin D. S.* A dissipative force between colliding viscoelastic bodies: Rigorous approach // Europhysics Letters. 2015. Vol. 109, 14005.
24. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Теория упругости. М.: Наука, 1987
25. *Brilliantov N. V., Albers N., Spahn F., Pöschel T.* Collision dynamics of granular particles with adhesion // Physical Review E. 2007. Vol. 76, 051302.
26. *Dintwa E., van Zeebroeck M., Ramon H.* Torsional stiffness of viscoelastic spheres in contact // European Journal of Physics B. 2004. Vol. 39. P. 77–85.
27. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.
28. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
29. *Brilliantov N. V., Poeschel T.* Collision of adhesive viscoelastic particles // In: Hinrichsen H., Wolf D. (Eds.). The Physics of Granular Media. Berlin: Wiley-VCH, 2004.

References

1. Hermann H. J., Hovi J. P., Luding S. *Physics of dry granular media*, NATO ASI Series. Dodrecht: Kluwer, 1998.
2. Jaeger H., Nagel S., Behringer R. Granular solids, liquids, and gases. *Reviews of Modern Physics*, 1996, vol. 68, 1259.
3. Hinrichsen H., Wolf D. E. *The physics of granular media*. Berlin: Wiley, 2004.
4. Duran J. *Sands, powders and grains*. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
5. Greenberg R., Brahic A. *Planetary rings*. Tucson: The University of Arizona Press, 1984.
6. Brilliantov N. V., Pöschel T. *Kinetic theory of granular gases*. Oxford: Oxford University Press, 2004.
7. Pöschel T, Luding S. Granular gases. *Lecture Notes in Physics*, vol. 564. Berlin: Springer, 2001.

8. Pöschel T., Brilliantov N. V. Granular gas dynamics. *Lecture Notes in Physics*, vol. 624. Berlin: Springer, 2003.
9. Barrat A., Trizac E., Ernst M. H. Granular gases: dynamics and collective effects. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2005, vol. 17, pp. 2429–2437.
10. Wildman R. D, Parker D. J. Coexistence of two granular temperatures in binary vibrofluidized beds. *Physical Review Letters*, 2002, vol. 88, 064301.
11. Feitosa K., Menon N. Breakdown of energy equipartition in a 2D binary vibrated granular gas. *Physical Review Letters*, 2002, vol. 88, 198301.
12. Zik O., Levine D., Lipson S., Shtrikman S., Stavans J. Rotationally induced segregation of granular materials. *Physical Review Letters*, 1994, vol. 73, pp. 644–647.
13. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte. Mathematik*, 1882, vol. 92, pp. 156–171.
14. Poeschel T., Schwager T. *Computational granular dynamics*. Berlin: Springer, 2005.
15. Luding S. Towards dense, realistic granular media in 2D. *Nonlinearity*, 2009, vol. 22, pp. 101–146.
16. Poeschl T. Versuch einer Erweiterung der Hertzschen Theorie des Stoßes auf plastische Körper. *Zeitschrift für Physik*, 1928, vol. 46, pp. 142–146.
17. Montaine M., Heckel M., Kruelle C., Schwager T., Poeschel T. Coefficient of restitution as a fluctuating quantity. *Physical Review E*, 2011, vol. 84, 041306.
18. Pao Y. H. Extension of the Hertz theory of impact to the viscoelastic case. *Journal of Applied Physics*, 1955, vol. 26, pp. 1083–1088.
19. Brilliantov N., Spahn F., Hertzsch J., Pöschel T. Model for collisions in granular gases, *Physical Review E*, 1996, vol. 53, pp. 5382–5392.
20. Kuwabara G., Kono K. Restitution coefficient in a collision between two spheres. *Japanese Journal of Applied Physics*, 1987, vol. 26, no. 8R, pp. 1230–1233.
21. Zheng Q. J., Zhu H. P., Yu A. B. Finite element analysis of the contact forces between a viscoelastic sphere and rigid plane. *Powder Technology*, 2012, vol. 226, pp. 130–142.
22. Zheng Q. J, Zhou Z. Y., Yu A. B. Contact forces between viscoelastic ellipsoidal particles. *Powder Technology*, 2013, vol. 248, pp. 25–33.
23. Brilliantov N. V., Pimenova A. V., Goldobin D. S. A dissipative force between colliding viscoelastic bodies: Rigorous approach. *Europhysics Letters*, 2015, vol. 109, 14005.
24. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Theory of elasticity*. Moscow: Nauka, 1987.
25. Brilliantov N. V., Albers N., Spahn F., Pöschel T. Collision dynamics of granular particles with adhesion. *Physical Review E*, 2007, vol. 76, 051302.
26. Dintwa E., van Zeebroeck M., Ramon H. Torsional stiffness of viscoelastic spheres in contact. *European Journal of Physics B*, 2004, vol. 39, pp. 77–85.
27. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Equations of mathematical physics*. New-York: Dover Publications Inc., 1963.
28. Abramowitz M., Stegun A. *Handbook of mathematical functions*. Moscow: Nauka, 1979.
29. Brilliantov N. V., Poeschel T. Collision of adhesive viscoelastic particles. In: Hinrichsen H., Wolf D. (Eds.). *The physics of granular media*. Berlin: Wiley-VCH, 2004.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:
Голдобин Д. С., Пименова А. В., Суслопаров Е. А., Бриллиантов Н. В. Диссипативные силы при столкновении вязкоупругих тел // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2016. № 1 (32). С. 33–42. doi: 10.17072/1994-3598-2016-1-33-42

Please cite this article in English as:
Goldobin D. S., Pimenova A. V., Susloparov E. A., Brilliantov N. V. Dissipative force for collision of viscoelastic bodies // Bulletin of Perm University. Series: Physics, 2016, no. 1 (32), pp. 33–42. doi: 10.17072/1994-3598-2016-1-33-42