

Об устойчивости равновесия заряженного шара в переменном электрическом поле

В. А. Семёнов

Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: semenov@psu.ru

Вопрос об устойчивости равновесия тела в электрическом поле имеет различные технические и технологические приложения. Одно из приоритетных направлений – это реализация устойчивой левитации тел в вакууме в электрическом поле, на основе которой возможно создание высокочувствительных датчиков ускорения. В настоящее время технические решения, обеспечивающие устойчивость левитации, основаны на двух подходах – управление потенциалами электродов и динамическая устойчивость. В работе приведено решение задачи о динамической устойчивости равновесия заряженного проводящего шара вблизи центра тонкого кольцевого электрода, на который подается переменное напряжение. Показано, что устойчивое равновесие возможно, если кулоновская сила больше силы взаимодействия индуцированных зарядов с внешним полем.

Ключевые слова: устойчивость; электрический заряд; электрическое поле

Поступила в редакцию 20.05.2019; принята к опубликованию 05.06.2019

About a stability of equilibrium of the charged sphere in a variation electric field

V. A. Semenov

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm
email: semenov@psu.ru

The problem of the equilibrium stability of a body in an electric field has various technical and technological applications. One of the priorities is the implementation of the stable levitation of a body in the vacuum in an electric field, on the basis of which it is possible to construct high-sensitive sensors of acceleration. Currently, the technical solutions to ensure the stability of levitation state are based on approaches – the control of electrodes potentials and dynamic stability. The paper presents the solution of the problem of dynamic equilibrium stability of a charged conducting sphere near the center of a thin circular electrode to which an alternating voltage is applied. It is shown that the stable equilibrium is possible if Coulomb force is greater than interaction force of induction charges with the field.

Keywords: stability; electric charge; electric field

Received 20.05.2019; accepted 05.06.2019

doi: 10.17072/1994-3598-2019-2-05-07

Известно [1,2], что динамическая устойчивость состоит в появлении устойчивых состояний системы, которые в статическом равновесии являются

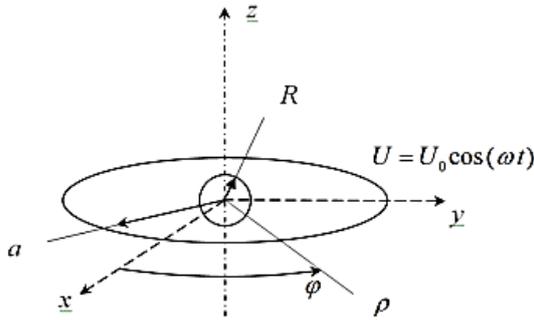
неустойчивыми. Для обеспечения динамической устойчивости необходимо изменение со временем одного или нескольких параметров системы.

Впервые возможность управления потоком заряженных частиц с помощью пространственно-неоднородных переменных электрических полей показана в работе А. В. Гапонова и М. А. Миллера [3].

Цель настоящей работы – определение условий устойчивого равновесия заряженного проводящего шара в вакууме вблизи центра тонкого кольцевого электрода, на который подается переменное напряжение, в отсутствие силы тяжести (см. рисунок).

Допустим, что распределение заряда по поверхности шара равномерное и не меняется при его смещении. На кольцевой электрод (далее – кольцо) подается переменное напряжение U частотой ω . Шар в центре кольца будет находиться в равновесии, поскольку напряженность поля в центре кольца равна нулю.

Запишем уравнения, определяющие эволюцию возмущений (малых отклонений) шара из положения равновесия. Совместим начало цилиндрической системы координат (ρ, ϕ, z) с центром кольца (рисунок). Рассмотрим динамику возмущений вдоль осей ρ и z .



Система координат

Предположим, что радиус шара R и его смещение из центра кольца ρ' и z' очень малы по сравнению с радиусом кольца a :

$$R \ll a, \quad z' \ll a, \quad \rho' \ll a, \quad (1)$$

а длина электромагнитной волны много больше диаметра кольца:

$$\frac{2\pi c}{\omega} \gg a. \quad (2)$$

В этом случае электрическую силу, действующую на шар при его смещениях, с учетом конфигурации электрического поля кольцевого электрода [4] можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_z &= (c_1 q U + c_2 U^2) z', \\ F_\rho &= (-c_1 q U + c_2 U^2) \rho', \end{aligned} \quad (3)$$

$$c_1 \approx \frac{C_0}{a^3}, \quad c_2 \approx \frac{R^3 C_0^2}{a^6}.$$

Здесь q – заряд шара, C_0 – емкость кольцевого электрода.

В (3) члены с U^2 – сила взаимодействия индуцированных зарядов с внешним полем, а с U – кулоновская сила. При постоянном напряжении на кольце знак заряда шара совпадает со знаком заряда кольца, поэтому в (3) при смещении вдоль ρ кулоновская сила – со знаком минус. С учетом (3) имеем следующие уравнения движения шара:

$$\begin{aligned} m \ddot{z}' - (c_1 q U + c_2 U^2) z' &= 0, \\ m \ddot{\rho}' + (c_1 q U - c_2 U^2) \rho' &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где m – масса шара.

Из (4) следует, что в постоянном поле равновесие шара неустойчиво при смещениях вдоль оси z . Перепишем (4) для случая переменного поля

$$\begin{aligned} \ddot{z}' - \alpha^2 (1 + \beta \cos(\omega t)) z' \cos(\omega t) &= 0, \\ \ddot{\rho}' + \alpha^2 (1 - \beta \cos(\omega t)) \rho' \cos(\omega t) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\alpha^2 = \frac{U_0 c_1 q}{m} \approx \frac{U_0 C_0 q}{m a^3},$$

$$\beta = \frac{c_2 U_0}{c_1 q} \approx \frac{R^3 C_0 U_0}{a^3 q}.$$

Допустим, что $\beta \ll 1$, т.е. сила взаимодействия индуцированных зарядов с внешним полем очень мала. В этом случае из (5) получим следующие уравнения:

$$\ddot{z}' - \alpha^2 z' \cos \omega t = 0, \quad \ddot{\rho}' + \alpha^2 \rho' \cos \omega t = 0. \quad (6)$$

Допустим, что характерное время изменения смещений ρ' и z' много больше периода изменения поля:

$$\frac{1}{\alpha} \gg \frac{2\pi}{\omega}. \quad (7)$$

Известно [1,5], что условие (7) позволяет для решения уравнений (6) воспользоваться методом усреднения. Следуя этому методу, представим функции $\rho'(t)$ и $z'(t)$ в виде суммы медленно изменяющейся со временем части ρ_0, z_0 и быстро осциллирующей малой добавки ρ_1, z_1 :

$$z = z_0 + z_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), раскладывая по степеням ρ_1, z_1 и выделяя в группе быстро осциллирующих членов ρ_0, z_0 , запишем уравнения для z_1 и ρ_1 :

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 &= \alpha^2 z_0 \cos(\omega t), \\ \ddot{\rho}_1 &= -\alpha^2 \rho_0 \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (9)$$

Интегрируя (9), в предположении $z_0 = \text{const}$, $\rho_0 = \text{const}$, получим

$$z_1 = -\frac{\alpha^2 z_0}{\omega^2} \cos \omega t, \quad (10)$$

$$\rho_1 = \frac{\alpha^2 \rho_0}{\omega^2} \cos \omega t.$$

Подставим (10) в исходное уравнение (6) и усредним его по периоду изменения поля $T = 2\pi/\omega$. В результате имеем

$$\ddot{z}_0 + \frac{\alpha^4}{2\omega^2} z_0 = 0, \quad (11)$$

$$\ddot{\rho}_0 + \frac{\alpha^4}{2\omega^2} \rho_0 = 0.$$

Из (11) следует, что в рассматриваемых условиях шар будет совершать устойчивые колебательные движения вблизи центра кольца.

При $\beta \gg 1$ (малая кулоновская сила) из (5) имеем следующие уравнения:

$$\ddot{z}' - \alpha^2 \beta z' \cos^2(\omega t) = 0, \quad (12)$$

$$\ddot{\rho}' - \alpha^2 \beta \rho' \cos^2(\omega t) = 0.$$

Соответственно, применяя метод усреднения, из (12) получим решение, в котором медленно изменяющиеся со временем составляющие возмущений ρ_0, z_0 монотонно растут со временем, т.е. в этом случае равновесие шара неустойчиво.

Таким образом, если кулоновская сила много больше силы взаимодействия индуцированных зарядов с внешним полем и период изменения поля значительно меньше характерного времени изменения положения тела, то возможно устойчивое равновесие заряженного тела в переменном электрическом поле в вакууме. На указанной возможности устойчивого равновесия основана реализация подвеса тел в электрическом поле с динамической устойчивостью. Основной технической проблемой при создании таких подвесов является задача поддержания постоянного во времени заряда подвешиваемого тела. Один из способов постоянной электризации тела состоит в использовании радиоактивных веществ, например, в [6] описан подвес, в котором осуществлена устойчивая электростатическая левитация шара, покрытого бета-активным золотом-198. Другой способ электризации связан с применением электронных и ионных пучков [7]. В этой связи необходимо отметить, что перспективным и недостаточно изученным способом поддержания заряда тела является использование внешнего фотоэффекта при

освещении подвешиваемого тела лазерным излучением соответствующей мощности.

Список литературы

1. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–597.
2. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физических наук. 1951. Т. 44. Вып. 5. С. 7–20.
3. Гапонов А. В., Миллер М. А. О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотном электромагнитном поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1958. Т. 34. Вып. 2. С. 242–243.
4. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Изд.-во иностр. лит, 1954. 606 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М.: Физматлит, 2004. 224 с.
6. Бережной В. М., Дунаева Н. П., Зубарев В. В. и др. Способ подвеса радиоактивных тел // А.с. № 801679 СССР, МКИ G01C 19/24.
7. Вяткина Т. С., Грибель Л. В., Малеев И. А. и др. Электрический подвес // А.с. № 515940 СССР, МКИ G01C 19/24. № 2048996/23.

References

1. Kapitza P. L. Dynamic stability of the pendulum at the fluctuating suspension point. *Soviet Physics JETP*, 1951, vol. 21, no. 5, pp. 588–597.
2. Kapitza P. L. The pendulum with the vibrating suspension. *Soviet Physics Achievements of Physical Sciences*, 1951, vol. 44, no. 5, pp. 7–20.
3. Gaponov A. V., Miller M. A. Potential wells for charged particles in a high-frequency electromagnetic field. *Soviet Physics JETP*, 1958, vol. 34, no. 2, pp. 242–243.
4. Smythe W. Static and dynamic electricity. New York, 1950, 606 s.
5. Landau L. D., Lifshits E. M. Mechanics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1976. 224 p.
6. Berezhnoi V. M., Dunaeva N. P., Zubarev V. V. et al. Sposob podvesa radioaktivnykh tel (Pendant for radioactive bodies). Certificate of authorship N. 801679, USSR, MKI G01S 19/24.
7. Viatkina T. S., Gribel' L. V., Maleev I. A. et al. Elektricheskii podves (Electric pendant). Certificate of authorship N. 515940 USSR, MKI G01S 19/24. N. 2048996/23.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Семёнов В. А. Об устойчивости равновесия заряженного шара в переменном электрическом поле // Вестник Пермского университета. Физика. 2019. № 2. С. 5–7. doi: 10.17072/1994-3598-2019-2-05-07

Please cite this article in English as:

Semenov V. A.. About a stability of equilibrium of the charged sphere in a variation electric field. Bulletin of Perm University. Physics, 2019, no. 2, pp. 5–7. doi: 10.17072/1994-3598-2019-2-05-07