

УДК: 532.5  
PACS 47.55.P–

## Об эффективности активного управления тепловой конвекцией в термосифоне при запаздывающем контроллере

**И. В. Красняков, Д. А. Брацун**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
614990, Пермь, ул. Комсомольский проспект, 29  
email: krasnyakov\_ivan@mail.ru

В работе рассматривается задача об автоматическом управлении движением неоднородно нагретой жидкости в длинных вертикальных каналах, соединенных на концах. Такая прямоугольная петля (неодносвязный термосифон) позволяет достаточно просто поддерживать механическое равновесие жидкости при вертикальном градиенте температуры. Управление поведением жидкости осуществляется посредством малых дискретных изменений ориентации каналов относительно статической компоненты инерционного поля, например, силы тяжести. Изменения вносятся компьютером по закону пропорциональной отрицательной обратной связи. Изучается влияние запаздывания, которое естественным образом возникает в работе контроллера. Для изучения эффекта в работу контроллера также вносилась еще и искусственная задержка по времени. Разработана математическая модель явления. Численно изучены динамические режимы работы управляемой конвективной петли. Обнаружено, что чрезмерное усиление обратной связи может возбуждать в системе нестационарные режимы конвекции. Обсуждаются способы ослабления негативного эффекта запаздывания.

**Ключевые слова:** тепловая конвекция; активное управление; запаздывание

*Поступила в редакцию 17.07.2017; принята к опубликованию 31.07.2017*

## On the efficiency of active control of thermal convection in a thermosyphon with time-delayed controller

**I. V. Krasnyakov, D. A. Bratsun**

Perm National Research Polytechnic University, Komsomolsky prospect 29, 614990, Perm  
email: krasnyakov\_ivan@mail.ru

The paper deals with the problem of automatic control of the motion of an inhomogeneously heated liquid in long vertical channels connected at the ends. Such a rectangular loop (a non-simply connected thermosyphon) makes it easy to maintain the mechanical equilibrium of a liquid with a vertical temperature gradient. The fluid flow is controlled by small discrete channel orientation changes with respect to the static component of the inertial field, for example, gravity. Such changes are made by the computer according to the law of proportional negative feedback. The effect of a time delay, which naturally arises in the controller's commands, is considered. To study the effect in detail, an artificial time delay has been also added. A mathematical model of the phenomenon is developed. Dynamic modes of the work of a controlled convective loop are numerically studied. It

was found that the excessive feedback gain can cause non-stationary convection modes in the system. Methods for weakening the delay effect are discussed.

**Keywords:** thermal convection; active control; time-delay

*Received 17.07.2017; accepted 31.07.2017*

doi: 10.17072/1994-3598-2017-2-59-68

## 1. Введение

Развитие технологий требует создания систем автоматического и адаптивного управления, которое проецируется на систему с помощью обратной связи и не требуют постоянного слежения человека. При активном управлении целью является изменение состояния конвективной системы через подавление или, наоборот, усиление естественно возникающих малых возмущений в реальном времени. Адаптивность проявляется в том, что управляющий параметр становится функцией времени и состояния управляемой системы. Введение обратной связи является преимуществом, поскольку приводит к более эффективному управлению.

Существует ряд работ, посвящённых изучению управления тепловой конвекции в различных условиях и при различных воздействиях на неё. К пассивному типу управления можно отнести любое внешнее воздействие на конвективную систему, которое может качественно менять динамику системы. Так как большинство механизмов конвективной неустойчивости являются зависимым от инерционного поля [1], то одним из самых мощных инструментов влияния на неоднородно нагретую жидкость является изменение этого поля по величине или направлению. Монография [2] обобщает результаты исследований в этой области. Из более поздних работ можно выделить экспериментальные работы [3, 4], изучающие влияние со стороны вибраций на тепловую конвекцию в ячейке Хеле–Шоу [5], на неизотермическую взвесь твердых частиц [6, 7], химически реагирующие смешивающиеся жидкости [8], поверхность раздела несмешивающихся жидкостей [9] и т.д.

Перейдем к обсуждению работ, посвященных активному управлению конвекцией в петле. Значительный вклад в исследование этого вопроса внесла исследовательская группа во главе с Бау [10, 11]. В данных работах управление с обратной связью, организованное с помощью специального подогрева системы, поддерживало стационарное течение в конвективной петле тороидальной формы при значениях параметров, когда при отсутствии управления реализуется нестационарная конвекция. Подобная стратегия управления была выбрана и в работах [12–14]. К недостаткам такого метода управления стоит отнести тот факт, что при лабораторной реализации так и не удалось достичь равномерного изменения температуры из-за влия-

ния конечной теплопроводности реальных жидкостей. Изменение температуры границы приводит к образованию вблизи нее теплового скин-слоя [15], что существенно осложняет задачу. Исходя из этого, для управляющего воздействия лучше подходит использование модуляции силового поля. Кроме того, неудачно была выбрана и форма термосифона: дело в том, что привлекательная на первый взгляд тороидальная форма, которая не имеет углов и в большей степени отвечает требованию одномерности течения, приводит к необходимости специального нагрева для поддержания механического равновесия. И действительно, чтобы в такой петле установилось равновесие, необходимо добиться идеально вертикального градиента температуры. А это значит, что подогревать термосифон нужно специальным образом, причем величина нагрева должна меняться от точки к точке конвективной петли. Всё это привело к тому, что поддерживать механическое равновесие на закритичностях оказалось трудновыполнимой задачей, зато удалось успешно стабилизировать нестационарные режимы конвекции.

В работах авторов [16–20] была с самого начала выбрана другая стратегия управления: манипуляции инерционным полем путем наклона термосифона по отношению к силе тяжести. Кроме того, была сконструирована петля прямоугольной формы, поддержание в которой механического равновесия жидкости в статике не является проблемным. Было показано, что неподвижность жидкости может успешно поддерживаться вплоть до четырех закритичностей [16]. Однако был выявлен и недостаток: как оказалось, при больших значениях коэффициента усиления обратной связи в системе развиваются паразитные колебания. Причина их появления заключалась в том, что управляющая подсистема (контроллер) запаздывает вовремя вносить коррекцию в состояние управляемой системы [17–19]. В работах [17, 20] было изучено влияние шума на работу запаздывающего контроллера. Обнаружено, что из-за взаимодействия шума и запаздывания квазирегулярные колебания возникают даже в подкритической области параметров. Обнаруженный эффект аналогичен эффекту, описанному в [21].

В настоящей работе уточняются некоторые моменты, касающиеся работы контроллера с запаздыванием, и предлагается методика уменьшения влияния этого запаздывания.

## 2. Математическая модель

Для получения уравнений рассмотрим систему двух связанных параллельных каналов, окружённых массивом высокой теплопроводности (рис. 1). В массиве задаётся линейный градиент температуры  $A$ , направленный вдоль каналов, при этом его ориентация по отношению к силе тяжести может динамически меняться во времени. Это изменение задаётся вектором  $\mathbf{g} = -g\boldsymbol{\gamma}$ , который в каждый момент времени составляет угол  $\varphi(t)$  с направлением каналов. Будем считать, что изменения направления силы тяжести совершаются лишь в плоскости, задаваемой компонентами единичного вектора  $\boldsymbol{\gamma} : (\sin \varphi(t), 0, \cos \varphi(t))$ . Пусть термосифон имеет высоту  $H$  и ширину  $L$ , а поперечные размеры канала определим как  $-d_1 \leq x \leq d_1$  и  $-d_2 \leq y \leq d_2$ . Горизонтальные переемы между каналами имеют такое же сечение.

Исходными уравнениями для вывода модели является система уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска в размерном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + g\beta T \boldsymbol{\gamma}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{v}$  – скорость,  $T$  – температура,  $p$  – давление. Остальные обозначения стандартны. На границах каналов ставится стандартное условие прилипания для скорости

$$\mathbf{v} = 0. \quad (4)$$

Что касается температуры, то три стенки канала будем считать высокотеплопроводными, а четвертую, лицевую к наблюдателю, – теплоизолированной (как в эксперименте [16]):

$$T|_{1-3} = -Az, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_4 = 0, \quad (5)$$

где боковые и дальняя стенки каналов обозначены 1–3, а лицевая сторона, закрашенная на рис. 1, обозначена как 4. Граничное условие (5) объясняется тем, что в эксперименте конвективный канал был выточен в едином массиве алюминия, который затем для визуализации течения был накрыт сверху листом оргстекла. Неоднородные условия на границе (5) лишь немного корректируют выбор аппроксимирующих функций, что проявляется в значениях коэффициентов в конечных уравнениях, но качественно поведение системы не меняют.

Угол поворота  $\varphi(t)$  задаётся законом обратной связи, посредством которой и осуществляется внешнее управление конвективной системой. Как

видно из уравнений (1–5), состояние равновесия жидкости в системе реализуется только в случае, когда сила тяжести и градиент температуры направлены в одну сторону  $\varphi = 0$ . При малейшем отклонении термосифона в ту или иную сторону от этого положения  $\varphi \neq 0$  механическое равновесие жидкости без внешнего воздействия поддерживаться в системе уже не может.

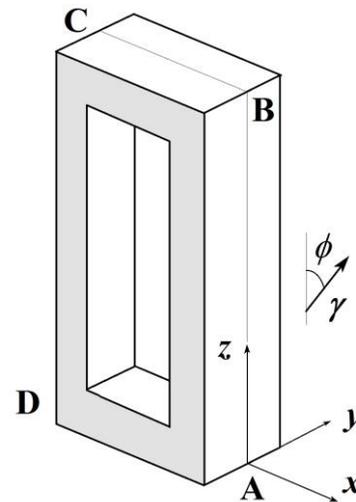


Рис. 1. Схематическое изображение прямоугольного неодносвязного термосифона

Будем полагать, что поперечное сечение каналов мало по сравнению с характерным размером термосифона  $H$ , и температура жидкости в пределах сечения практически не меняется. Тогда исходные уравнения конвекции (1–5) могут быть усреднены по сечению канала. Представим поля скорости и температуры в виде следующих аппроксимаций, удовлетворяющих граничным условиям (4) и (5) для каналов:

$$[AB], [CD]: v_x = 0, \quad v_y = 0,$$

$$v_z = X(t) \cos \frac{\pi x}{2d_1} \cos \frac{\pi y}{2d_2}; \quad (6)$$

$$[AB], [CD]:$$

$$T = \Theta(\zeta, t) \cos \frac{\pi x}{2d_1} \sin \left( \frac{\pi y}{4d_2} + \frac{\pi}{4} \right) - Az; \quad (7)$$

для соединяющих переемы:

$$[BC], [DA]: v_x = X(t) \cos \frac{\pi z}{2d_1} \cos \frac{\pi y}{2d_2};$$

$$v_y = 0, \quad v_z = 0; \quad (8)$$

$$[BC]: T = \Theta(\zeta, t) \cos \frac{\pi z}{2d_1} \sin \left( \frac{\pi y}{4d_2} + \frac{\pi}{4} \right) - AH; \quad (9)$$

$$[DA]: T = \Theta(\zeta, t) \cos \frac{\pi z}{2d_1} \sin \left( \frac{\pi y}{4d_2} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (10)$$

Тогда эволюционное уравнение для амплитуды скорости получается подстановкой аппроксимаций (6–10) в уравнение Навье–Стокса (1) и усреднением его в смысле скалярного произведения:

$$\begin{aligned} \langle \dots \rangle = & \frac{1}{2d_1 d_2} \int_{AB} \int_{-d_2}^{d_2} \int_{-d_1}^{d_1} \dots dx dy d\zeta + \\ & + \frac{1}{2d_1 d_2} \int_{BC} \int_{-d_2}^{d_2} \int_{-d_1}^{d_1} \dots dz dy d\zeta + \\ & + \frac{1}{2d_1 d_2} \int_{CD} \int_{-d_2}^{d_2} \int_{-d_1}^{d_1} \dots dx dy d\zeta + \\ & + \frac{1}{2d_1 d_2} \int_{DA} \int_{-d_2}^{d_2} \int_{-d_1}^{d_1} \dots dz dy d\zeta \end{aligned} \quad (11)$$

где переменная  $\zeta$  пробегает по контуру петли (рис. 1). Таким образом, мы получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} = & -\frac{v\pi^2}{4d^2} X(t) + \frac{4g\beta}{3\pi(H+L)} \int \Theta(\zeta, t) \gamma \cdot d\zeta + \\ & + \frac{8g\beta AHL}{\pi^2(H+L)} \sin \varphi(t), \end{aligned} \quad (12)$$

в котором контурный интеграл определяется ниже.

Что касается уравнения переноса тепла (2), то его редукция происходит в два этапа. Сначала усреднение по поперечному сечению каналов и перемычек приводит к уравнению в частных производных следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta(\zeta, t)}{\partial t} = & -\frac{\chi\pi^2}{4\bar{d}^2} \Theta(\zeta, t) + \\ & + X(t) \left( \frac{16}{3\pi^2} \frac{\partial \Theta(\zeta, t)}{\partial \zeta} + \frac{8}{3\pi} \Psi(\zeta) \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где функция  $\Psi(\zeta)$  задана только для каналов:  $\Psi(\zeta) = -A$  для  $0 \leq \zeta \leq H$  и  $\Psi(\zeta) = A$  для  $H+L \leq \zeta \leq 2H+L$ .

Следующий шаг упрощения – применение метода Галёркина: мы аппроксимируем амплитудную функцию  $\Theta(\zeta, t)$  двумя первыми модами (что вполне достаточно для описания конвекции вблизи порога), разделяя зависимости от  $t$  и  $\zeta$ :

$$\begin{aligned} \Theta(\zeta, t) = & Y(t) \mathcal{G}_1(\zeta) + Z(t) \mathcal{G}_2(\zeta) = \\ = & Y(t) \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi(2\zeta+L)}{2(H+L)} \\ \sin \frac{\pi H}{2(H+L)} \end{pmatrix} + Z(t) \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi(2\zeta+L)}{2(H+L)} \\ \cos \frac{\pi L}{2(H+L)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Применение метода Галёркина требует проектирования уравнения (13) на выбранный базис (14) таким образом, чтобы невязка была бы ортогональна всем функциям базиса:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{G}_1 \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right\rangle_2 = & \oint_{ABCD} \mathcal{G}_1(\zeta) \frac{\partial \Theta(\zeta, t)}{\partial t} d\zeta = 0, \\ \left\langle \mathcal{G}_2 \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right\rangle_3 = & \oint_{ABCD} \mathcal{G}_2(\zeta) \frac{\partial \Theta(\zeta, t)}{\partial t} d\zeta = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Будем полагать также, что обратная связь в системе имеет линейный характер и является отрицательной, т.е. стремится уменьшить причину, вызвавшую появление возмущения:

$$\varphi(t) = -kY(t - \tau). \quad (16)$$

Здесь  $k$  является размерным коэффициентом усиления обратной связи. В формуле (16) допускается возникновение в контроллере запаздывания  $\tau$ .

Процедура метода Галёркина приводит к системе из трёх обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} \frac{dX(t)}{dt} = & -X(t) + Y(t) \cos(KY(t - \tau)) + \\ & + (\alpha Z(t) - \xi R) \sin(KY(t - \tau)), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = -Y(t) - X(t)Z(t) + RX(t), \quad (18)$$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -Z(t) + X(t)Y(t), \quad (19)$$

где уравнения представлены уже в безразмерной форме с единицами измерения:  $d$  – длина,  $4\bar{d}^2 / \chi\pi^2$  – время,  $9\pi^3(H+L)\chi / 64\bar{d}^2$  – скорость,  $(9\pi^7 / 4096)(H+L)\chi v / d^2 \bar{d}^2 g\beta$  – температура. В результате динамика (17–19) определяется следующими безразмерными параметрами:

$$R = \frac{8192}{9\pi^8} \frac{Ag\beta d^2 \bar{d}^2}{\chi v} \sin^2 \frac{\pi H}{2(H+L)}, \quad (20)$$

$$K = \frac{9\pi^7}{4096} \frac{kv\chi(H+L)}{g\beta d^2 \bar{d}^2}, \quad (21)$$

$$P = \frac{v\bar{d}^2}{\chi d^2} \quad (22)$$

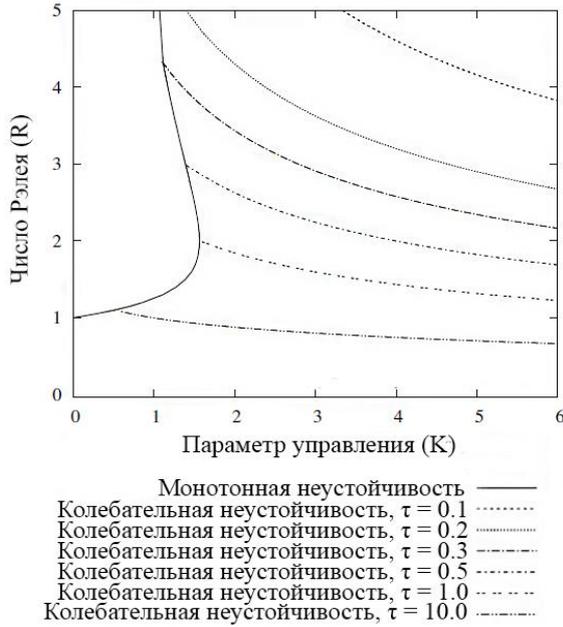
числом Рэлея  $R$ , коэффициентом обратной связи  $K$  и числом Прандтля  $P$ . Число Рэлея откалибровано в надкритичностях. Кроме того, появляется два параметра, заданных геометрией термосифона:

$$\alpha = \frac{\pi L}{2(H+L)}, \quad \xi = \frac{3\pi HL}{4(H+L)^2}, \quad (23)$$

которые для конкретных параметров экспериментальной установки, рассмотренной в [8], имеют следующие значения:  $\xi \approx 0.157$ ,  $\alpha \approx 0.113$ .

Параметры  $d$  и  $\bar{d}$  в (20–22) определены как:

$$d = \frac{d_1 d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}, \quad \bar{d} = \frac{2d_1 d_2}{\sqrt{d_1^2 + 4d_2^2}}. \quad (24)$$



**Рис. 2.** Нейтральные кривые устойчивости механического равновесия жидкости на плоскости числа Рэлея и коэффициента усиления обратной связи

### 3. Линейный анализ устойчивости

Для любых значений параметров уравнений (17–19) имеется стационарное решение

$$X^* = 0, \quad Y^* = 0, \quad Z^* = 0, \quad (25)$$

которое соответствует механическому равновесию жидкости в конвективной петле. Чтобы установить возможные механизмы неустойчивости, уравнения (17–19) линеаризуются вблизи (25):

$$\frac{1}{P} \frac{dX(t)}{dt} = -X(t) + Y(t) - \xi RKY(t - \tau), \quad (26)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = -Y(t) + RX(t), \quad (27)$$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -Z(t). \quad (28)$$

Тогда нейтральная кривая для монотонной (стационарной) неустойчивости может быть записана в замкнутой форме:

$$K = \frac{R-1}{\xi R^2}. \quad (29)$$

Кривая, определяемая (29), показана на рис. 2 сплошной линией. Стоит отметить, что формула (29) не включает число Прандтля, а значит, не зависит от свойств жидкости. При отсутствии внешнего воздействия нейтральная кривая включает в себя точку  $R = 1$ , что соответствует возбуждению естественной конвекции.

Рассмотрим теперь решения (26–28), зависящие от времени. Вторая тепловая мода, амплитуда которой описывается уравнением (28), в линейном приближении всегда затухает и может быть исключена из рассмотрения. Уравнения (26) и (27) описывают динамические процессы, существенно различающиеся по временным масштабам. Поскольку основная часть экспериментов [8] по изучению механического равновесия была проведена с трансформаторным маслом ( $P = 300$ ), уравнение (26) описывает медленную эволюцию амплитуды  $X(t)$  на фоне быстрых изменений  $Y(t)$ . Тогда

$$X(t) \approx Y(t) - \xi RKY(t - \tau), \quad (30)$$

что позволяет записать далее:

$$\frac{dY(t)}{dt} = (R-1)Y(t) - \xi KR^2 Y(t - \tau). \quad (31)$$

Уравнение (31) имеет нестационарное решение даже в ситуации нейтральной плавучести среды ( $R = 1$ ), что говорит о не конвективном механизме неустойчивости. В этом случае точка бифуркации сразу же выписывается в явном виде и существует точное решение (31):

$$Y(t) = a \cos\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right), \quad (32)$$

которое реализуется при критическом значении параметра  $K_{cr} = \pi / 2\tau\xi$ . Согласно (32) период колебаний в пороге равен  $T_{cr} = 4\tau$ . Последнее является известным результатом в теории запаздывающих дифференциальных уравнений и может быть использовано для оценки величины естественного запаздывания в эксперименте. Отметим, что полное уравнение (31) также может быть решено точно [21], но решение является громоздким и здесь не выписывается. Гораздо важнее самого решения найти порог возникновения колебаний. Для этого будем искать решение (31) в экспоненциальном виде с аргументом  $\lambda t$ , где  $\lambda = \mu + i\omega$ . Тогда условие разрешимости матрицы Якоби приводит к двум уравнениям, определяющим нейтральную устойчивость колебательной моды и критическую частоту колебаний:

$$\mu = \frac{1}{\tau} \operatorname{Re}(\Lambda(-\tau\xi KR^2 e^{\tau(1-R)})) + R - 1, \quad (33)$$

$$\omega = \frac{1}{\tau} \operatorname{Im}(\Lambda(-\tau\xi KR^2 e^{\tau(1-R)})), \quad (34)$$

где  $\Lambda$  – функция Ламберта, которая удовлетворяет выражению  $\Lambda(x)\exp(\Lambda(x)) = x$ . Выражения (33,34) определяют целое семейство нейтральных кривых для бифуркации Хопфа ( $\mu = 0, \omega \neq 0$ ), параметрически зависящих от запаздывания  $\tau$  (рис. 2).

Например, одна из нейтральных кривых для времени запаздывания  $\tau = 0.3$  (или около 13 с для трансформаторного масла в размерных единицах) идеально согласуется с экспериментальными данными для трансформаторного масла [8], что даёт информацию о величине запаздывания в эксперименте. Отметим, что запаздывание у додекана значительно меньше и составляет  $\tau \approx 0.1$ .

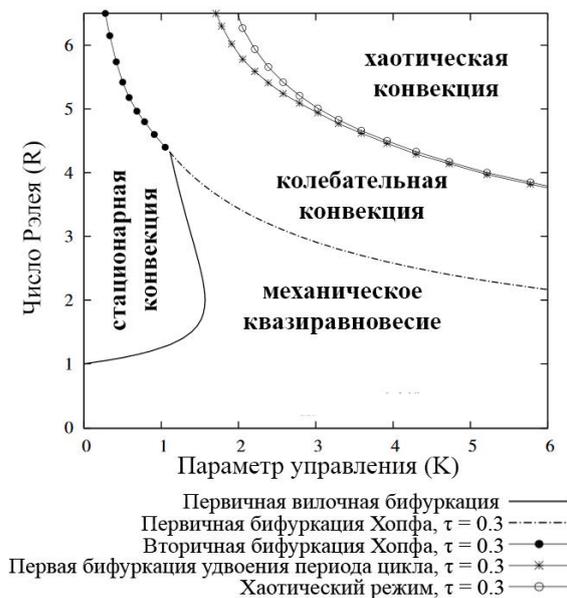
Как видно из рис. 2, с ростом времени запаздывания контроллера неустойчивость спускается ниже и этим самым значительно ограничивает возможность управления механическим равновесием жидкости в конвективной петле. При времени запаздывания  $\tau > 10$  попытки управления конвективной системой приводят к её дестабилизации даже при тех значениях параметров, когда система была стабильной без всякого управления. Следовательно, качество управления в значительной степени зависит от способности управляющей подсистемы быстро реагировать на изменения, происходящие в контуре конвективной петли. Таким образом, анализ математической модели в линейном приближении показывает, что причиной колебательной неустойчивости, которую правильнее считать паразитной с точки зрения целей управления, является неспособность контроллера произвести коррекцию системы вовремя. Очевидно, что попытка повысить эффективность управления путём простого усиления обратной связи приводит к ситуации, когда само управляющее воздействие начинает вносить возмущения и порождает неустойчивость равновесия жидкости.

#### 4. Нелинейная динамика

Рассмотрим нелинейную динамику системы. Анализ линейной устойчивости основного состояния (25) показал, что существуют критические возмущения двух типов: монотонные и колебательные (рис. 2). На рис. 3 представлена карта устойчивости, рассчитанная для трансформаторного масла. При небольших и умеренных значениях параметра усиления обратной связи механическое равновесие жидкости сменяется стационарной конвекцией через вилочную бифуркацию (Рэлеевская мода неустойчивости). С ростом  $R$  влияние запаздывания становится всё более заметным и при небольших  $K$ . Как видно из рис. 3, происходит вторичная бифуркация Хопфа, что приводит к развитию периодических осцилляций термосифона около одного из положений равновесия, соответствующих стационарному наклону петли по отношению к силе тяжести.

В области колебательной периодической конвекции есть внутренние области симметричных колебаний и асимметричных колебаний (не показаны на карте устойчивости). При определенном сочетании управляющих параметров в системе начинается переход к хаотической конвекции че-

рез каскад бифуркаций удвоения периода (сценарий перехода к хаосу Фейгенбаума).



**Рис. 3.** Карта режимов конвекции на плоскости числа Рэлея ( $R$ ) и коэффициента усиления обратной связи ( $K$ ). Сплошная линия соответствует возникновению монотонной неустойчивости. Нейтральные кривые для других типов неустойчивости, рассчитаны для трансформаторного масла ( $P = 300$ ,  $\tau = 0.3$ )

Возмущения, вносимые контроллером, в первую очередь влияют на ориентацию термосифона по отношению к полю тяжести. Но беспорядочно следующие друг за другом наклоны петли приводят в конечном итоге к развитию хаотического течения жидкости в каналах. Таким образом, из-за запаздывания контроллер вступает в сложные динамические отношения с управляемой подсистемой, которые могут выражаться даже в возникновении нерегулярной конвекции.

Стоит отметить, что описанная проблема, по-видимому, является вполне нормальной особенностью рассматриваемых систем из-за их большой инерционности. В теоретических работах, посвященных управлению тепловой конвекцией, авторы часто игнорируют существования запаздывания (см. [10–14]). Однако, как только дело касается физического эксперимента, возникает большая проблема. Например, в работе [22] экспериментально изучалось управление конвекцией Рэлея-Бенара в вертикальном цилиндре, заполненном маслом с очень большим значением числа Прандтля (для увеличения инертности системы и увеличения времени принятия решения контроллером). Контроль осуществлялся с помощью системы нескольких десятков точечных нагревателей, распределенных по дну цилиндра, которые могли включаться и выключаться в зависимости от сигнала,

формируемого системой термопар в центре цилиндра. Авторы констатируют внезапное наступление периодических колебаний, в принципе отсутствующих в их теории, и гипотетически рассуждают об их природе. Кажется почти очевидным, что большая тепловая инертность системы и разнесенность в пространстве датчиков и нагревателей контроллера должна приводить к естественному запаздыванию и развитию колебаний (в данном случае с периодом в несколько часов). Таким образом, выбранная в данной работе стратегия управления через изменение инерционного поля уже сама по себе сильно нивелируют эффект запаздывания.

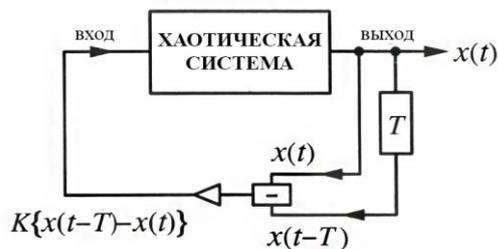


Рис. 4. Блок-схема управления хаотической системой с помощью введения искусственно-го запаздывания обратной связью [23], где  $T$  – время запаздывания

### 5. Методика ослабления паразитных колебаний

Борьба с паразитными колебаниями, описанными выше, является не такой простой, как это могло бы показаться с первого взгляда. Колебания являются органичной частью процесса управления, поэтому из общих соображений понятно, что борьба с колебаниями – есть борьба с самим управляющим воздействием. Но его ослабление неизбежно должно приводить к восстановлению подавляемой конвективной моды.

В теории оптимального управления есть рецепты по настройке внешнего контроля по отношению к управляемой системе. Но, как правило, такие рецепты предназначены для управления развитыми динамическими режимами. Например, в работе [23] предлагается модель управления хаотическими системами с помощью искусственного введения в обратную связь запаздывания по времени. При этом отмечается, что не важно, есть ли уже априори такое запаздывание в контроллере или нет, методика всё равно должна срабатывать. На рис. 4 приведена блок-схема алгоритма: сигнал, поступающий из управляемой системы раздваивается и по одному из каналов к нему добавляется искусственно задержка  $T$ . Затем из двух сигналов (исходного и преобразованного) составляется разность и запускается на вход контролируемой системы с некоторым коэффициентом, значение ко-

торого должно быть определено эмпирически, точно также, как и значение искусственного запаздывания  $T$ .

Данная методика может быть применена в нашей системе лишь частично, так как преобразованный сигнал мы не можем подавать напрямую на вход системы (математически это означает просто добавка слагаемых к правым частям уравнений (17–19)). С точки зрения постановки физического эксперимента мы ограничены манипуляцией лишь фазой колебаний тригонометрических функций в (17–19):

$$\varphi(t) = -K(Y(t-\tau) - bY(t-\tau-T)), \tag{35}$$

где  $b$  – амплитуда преобразованного сигнала. После линейризации системы (17–19) вместо (26,27) получим следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{P} \frac{dX(t)}{dt} = -X(t) + Y(t) - \xi RK(Y(t-\tau) - bY(t-\tau-T)), \tag{36}$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = -Y(t) + RX(t). \tag{37}$$

При условии, что  $P \gg 1$ , из (36) получим

$$X(t) = Y(t) - \xi RK(Y(t-\tau) - bY(t-\tau-T)). \tag{38}$$

После подстановки (38) в (37) приходим к

$$\frac{dY(t)}{dt} = (R-1)Y(t) + \xi R^2 K(bY(t-\tau-T) - Y(t-\tau)). \tag{39}$$

Анализ устойчивости уравнения (39), методика которого описана выше, приводит к выражениям, определяющим порог неустойчивости и частоту возникающих колебаний:

$$e^{\mu\tau}((\mu+1-R)\cos(\omega\tau) + \omega\cos(\omega\tau)) = \xi R^2 K(b e^{-\mu T} \cos(\omega T) - 1), \tag{40}$$

$$e^{\mu\tau}((\mu+1-R)\sin(\mu\tau) + \omega\cos(\omega\tau)) = -\xi R^2 K b e^{-\mu T} \sin(\omega T). \tag{41}$$

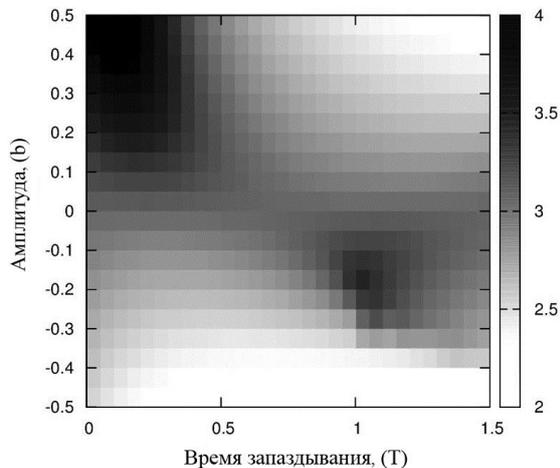
Условия бифуркации могут быть получены из (40), если положить  $\mu = 0$ . Для монотонной неустойчивости ( $\omega = 0$ ) получим соотношение:

$$K = \frac{R-1}{\xi R^2(1-b)}. \tag{42}$$

Из уравнения (42) следует, что монотонная мода усиливается с ростом амплитуды  $b$ . Она может принимать значения не более 1.

На рис. 5 представлена карта эффективности описанной настройки внешнего управления, рас-

считанная по формуле (40). Как видно из рис. 5, существует две области, в которых управление тепловой конвекцией осуществляется более эффективно при использовании описанного выше алгоритма. В этих областях порог наступления конвекции сдвигается вверх примерно на 50%.



**Рис. 5.** Карта эффективности внешнего управления в пространстве параметров искусственного времени запаздывания  $T$  и амплитуды преобразованного сигнала  $b$ . Карта получена для фиксированного значения  $K = 3$ , для которого критическое число Рэлея наступления колебательной конвекции равно  $R = 2.94$ . Области, где  $R > 2.94$ , соответствуют более эффективному управлению

## 6. Заключение

В работе показано, что использование изменения инерционного поля является эффективным инструментом управления тепловой конвекцией в прямоугольной петле термосифона. Описанная методика позволяет успешно стабилизировать механическое равновесие жидкости, чего в петлях тороидальной формы добиться не удалось. Недостатком метода управления является возникновение паразитных колебаний, связанных с естественным запаздыванием контроллера вносить изменения в состояние системы. Эти колебания с точки зрения целей управления являются паразитными и должны быть ослаблены. Предложена схема такого управления, которая может быть легко реализована экспериментально на аппаратном уровне. Показано, что эффективность управления может быть повышена в полтора раза.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и образования РФ (грант № 3.6990.2017/8.9).

## Список литературы

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Gershuni G. Z., Lyubimov D. V. Thermal vibrational convection. New York: Wiley, 1998. 358 p.
3. Mialdun A., Ryzhkov I. I., Melnikov D. E., Shevtsova V. Experimental evidence of thermal vibrational convection in a nonuniformly heated fluid in a reduced gravity environment // Physical Review Letters. 2008. Vol. 101, 084501.
4. Putin G. F., Zavarykin M. P., Zyuzgin A. V. Parametric resonance convection in a modulated gravity field // ASME proceedings, Heat Transfer, Part B. 2005. P. 579–588.
5. Бабушкин И. А., Демин В. А. Вибрационная конвекция в ячейке Хеле-Шоу. Теория и эксперимент // Прикладная механика и техническая физика. 2006. № 2. С. 40–48.
6. Брацун Д. А., Теплов В. С. О параметрическом возбуждении вторичного течения в вертикальном слое жидкости в присутствии мелких твердых частиц // Прикладная механика и техническая физика. 2001. № 1. С. 48–55.
7. Bratsun D. A., Teplov V. S. On the stability of the pulsed convective flow with small heavy particles // European Physical Journal Applied Physics. 2000. Vol. 10. P. 219–230.
8. Bratsun D. A., Stepkina O. S., Kostarev K. G., Mizev A. I., Mosheva E. A. Development of concentration-dependent diffusion instability in reactive miscible fluids under influence of constant or variable inertia // Microgravity Science and Technology. 2016. Vol. 28. N. 3. P. 575–585.
9. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003. 216 с.
10. Singer J., Bau H. Active control of convection // Physics of Fluids A. 1991. Vol. 3. P. 2859–2865.
11. Wang Y., Singer J., Bau H. Controlling chaos in a thermal convection loop // Journal of Fluid Mechanics. 1992. Vol. 237. P. 479–498.
12. Ott E., Grebogi C., Yorke J. A. Controlling chaos // Physical Review Letters. 1990. Vol. 64. P. 1196–1199.
13. Erhard P., Muller U. Dynamical behavior of natural convection in a single-phase loop // Journal of Fluid Mechanics 1990. Vol. 217. P. 487–518.
14. Дроздов С. М. Экспериментальное исследование конвекции жидкости в замкнутом тороидальном канале // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 4. С. 20–28.
15. Гетлинг А. В. Концентрация конвективных движений у границы горизонтального слоя жидкости с неоднородным по высоте неустойчивым градиентом температуры // Известия АН

- СССР. Механика жидкости и газа. 1975. № 5. С. 45–52.
16. Брацун Д. А., Зюзгин А. В., Половников К. В., Путин Г. Ф. Об активном управлении равновесием жидкости в термосифоне // Письма в журнал технической физики. 2008. Т. 34. Вып. 15. С. 36–42.
  17. Брацун Д. А., Зюзгин А. В. Эффект возбуждения подкритических колебаний в стохастических системах с запаздыванием. Ч. II. Управление равновесием жидкости // Компьютерные исследования и моделирование. 2012. Т. 4. № 2. С. 375–396.
  18. Брацун Д. А., Красняков И. В. Математическая модель активного управления конвекцией в термосифоне с запаздыванием по времени // Вестник Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета. Серия 2: Физико-математические и естественные науки. 2014. Вып. 2. С. 28–53.
  19. Брацун Д. А., Зюзгин А. В., Путин Г. Ф. О выборе параметра интеллектуального управления конвективной системой // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2012. Вып. 2 (20). С. 31–36.
  20. Bratsun D. A., Krasnyakov I. V., Zyuzgin A. V. Delay-induced oscillations in a thermal convection feedback control with noise // Communication. In Nonlinear Science. Numerical Simulation. 2017. Vol. 47. P. 109–126.
  21. Брацун Д. А. Эффект возбуждения подкритических колебаний в стохастических системах с запаздыванием. Ч. I. Регуляция экспрессии генов. // Компьютерные исследования и моделирование. 2011. Т. 3. № 4. С. 431–438.
  22. Remillieux, M., Zhao, H., Bau, H. Suppression of Rayleigh-Benard convection with proportional-derivative controller // Physics of Fluids. 2007. Vol. 19. P. 017102–017111.
  23. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Physics Letters A. 1992. Vol. 170. N. 6. P. 421–428.
- ### References
1. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. *Convective stability of incompressible fluids*. Jerusalem. Keterpress, 1976. 330 p.
  2. Gershuni G. Z., Lyubimov D. V. *Thermal vibrational convection*. New York: Wiley, 1998. 358 p.
  3. Mialdun A., Ryzhkov I. I., Melnikov D. E., Shevtsova V. Experimental evidence of thermal vibrational convection in a nonuniformly heated fluid in a reduced gravity environment. *Physical Review Letters*, 2008, vol. 101, 084501.
  4. Putin G. F., Zavarykin M. P., Zyuzgin A. V. Parametric resonance convection in a modulated gravity field. *ASME proceedings, Heat Transfer, Part B*, 2005, pp. 579–588.
  5. Babushkin I. A., Demin V. A. Vibrational convection in the Hele-Shaw cell. Theory and experiment. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2006, vol. 47, no. 2, pp. 183–189.
  6. Bratsun D. A., Teplov V. S. Parametric excitation of a secondary flow in a vertical layer of a fluid in the presence of small solid particles. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2001, vol. 42, no. 1, pp. 42–48.
  7. Bratsun D. A., Teplov V. S. On the stability of the pulsed convective flow with small heavy particles. *European Physical Journal Applied Physics*, 2000, vol. 10, pp. 219–230.
  8. Bratsun D. A., Stepkina O. S., Kostarev K. G., Mizev A. I., Mosheva E. A. Development of concentration-dependent diffusion instability in reactive miscible fluids under influence of constant or variable inertia. *Microgravity Science and Technology*, 2016, vol. 28, no. 3, pp. 575–585.
  9. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Cherepanov A. A. *Dinamika poverkhnostei razdela v vibratsionnykh poliakh* (Dynamics of interfaces in vibrational fields). Moscow: Fizmatlit, 2003..216 p. (In Russian).
  10. Singer J., Bau H. Active control of convection. *Physics of Fluids A*, 1991, vol. 3, pp. 2859–2865.
  11. Wang Y., Singer J., Bau H. Controlling chaos in a thermal convection loop. *Journal of Fluid Mechanics*, 1992, vol. 237, pp. 479–498.
  12. Ott E., Grebogi C., Yorke J. A. Controlling chaos. *Physical Review Letters*, 1990, vol. 64, pp. 1196–1199.
  13. Erhard P., Muller U. Dynamical behavior of natural convection in a single-phase loop. *Journal of Fluid Mechanics*, 1990, vol. 217, pp. 487–518.
  14. Drozdov S. M. Experimental investigation of fluid convection in a closed toroidal channel. *Fluid Dynamics*, 1995, vol. 30, no. 4, pp. 503–509.
  15. Getling A. V. Convective motion concentration at the boundaries of a horizontal fluid layer with inhomogeneous unstable temperature gradient along the height. *Fluid Dynamics*, 1975, vol. 10, no. 5, pp. 745–750.
  16. Bratsun D. A., Zyuzgin A. V., Polovnikov K. V., Putin G. F. Active control of fluid equilibrium in a thermosyphon. *Technical Physics Letters*, 2008, vol. 34, no. 8, pp. 650–652.
  17. Bratsun D. A., Zyuzgin A. V. Effect of subcritical excitation of oscillations in stochastic systems with time-delay. Part II. Control of fluid equilibrium. *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 375–396 (In Russian).
  18. Bratsun D. A., Krasnyakov I. V. Mathematical model of active control of convection in thermosyphon with time delay. *Vestnik PSPU. Series 2: Fiziko-matematicheskie i estestvennye nauki* (Bul-

- letin of PSPU. Series 2: Physical, mathematical and natural science), 2014. no. 2, pp. 28–53.
19. Bratsun D. A., Zyuzgin A. V., Putin G. F. On the selection of parameter of the convective system intellectual control. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2012, no. 2 (20), pp. 31–36.
  20. Bratsun D. A., Krasnyakov I. V., Zyuzgin A. V. Delay-induced oscillations in a thermal convection feedback control with noise. *Communications in Nonlinear Science. Numerical Simulation*, 2017, vol. 47, pp. 109–126.
  21. Bratsun D. A. Effect of excitation of subcritical oscillations in stochastic systems with delay. Part I. Regulation of gene expression. *Computer Research and Modeling*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 421–438.
  22. Remillieux M., Zhao H., Bau H. Suppression of Rayleigh-Benard convection with proportional-derivative controller. *Physics of Fluids*, 2007, vol. 19, pp. 017102–017111.
  23. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, 1992, vol. 170, no. 6, pp. 421–428.

**Просьба сослаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Красняков И. В., Брацун Д. А. Об эффективности активного управления тепловой конвекцией в термосифоне при запаздывающем контроллере // Вестник Пермского университета. Физика. 2017. № 2 (36). С. 59–68. doi: 10.17072/1994-3598-2017-2-59-68

**Please cite this article in English as:**

Krasnyakov I. V., Bratsun D. A. On the efficiency of active control of thermal convection in a thermosiphon with time-delayed controller. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2017, no. 2 (36), pp. 59–68. doi: 10.17072/1994-3598-2017-2-59-68