

УДК 532.5.013; 536.425; 534.8
PACS 47.20.Ma, 47.55.-t, 47.35.-i

Численное моделирование формирования дорожки Кармана в неустойчиво стратифицированном потоке

А. О. Иванцов

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия
aivantsov@icmm.ru

Проведено численное моделирование формирования дорожки Кармана за круговым цилиндром в неустойчиво стратифицированной жидкости. Исследуется влияние термической стратификации на характеристики вихревого следа при различных числах Рейнольдса и Ричардсона. Рассматривается система уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска, учитывающая эффекты плавучести в неустойчиво стратифицированной среде. Численное решение получено методом конечных разностей с использованием схемы расщепления по физическим процессам. Показано, что при наличии неустойчивой стратификации происходит интенсификация вихреобразования и изменение геометрических характеристик дорожки Кармана по сравнению с однородной жидкостью. Выявлено, что конвективная неустойчивость, обусловленная распределением плотности, приводит к возникновению вторичных структур в вихревом следе. Показано, что с увеличением числа Ричардсона происходит качественная перестройка течения от регулярной дорожки Кармана к сложному хаотическому режиму с многомасштабными вихревыми структурами.

Ключевые слова: дорожка Кармана; вихревая структура, стратифицированная жидкость, неустойчивость, численное моделирование, уравнения Навье–Стокса

Поступила в редакцию 04.11.2025; после рецензии 03.12.2025; принята к опубликованию 03.12.2025

Numerical simulation of a Kármán vortex street in an unstably stratified flow

А. О. Ivantsov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia
aivantsov@icmm.ru

Numerical simulation of a Kármán vortex street formation behind a circular cylinder in an unstably stratified fluid was performed. The influence of thermal stratification on the vortex wake characteristics at different Reynolds and Richardson numbers is investigated. The system of Navier–Stokes equations in the Boussinesq approximation, which accounts for buoyancy effects in an unstably stratified medium, is considered. The numerical solution was obtained by the finite difference method using a splitting scheme for physical processes. It is shown that in the presence of unstable stratification, vortex formation intensifies and the geometric characteristics of the Kármán vortex street change compared to a homogeneous fluid. It has been found that convective instability, caused by the density distribution, leads to the emergence of secondary structures in the vortex wake. It is shown that with an increase in the Richardson number, a qualitative restructuring of the

flow occurs: from a regular Kármán vortex street to a complex chaotic regime with multiscale vortex structures.

Keywords: Kármán vortex street, vortex structure, stratified fluid, instability, numerical simulation, Navier–Stokes equations

Received 04 November 2025; revised 03 December 2025; accepted 03 December 2025

doi: 10.17072/1994-3598-2025-4-49-58

1. Введение

Явление периодического срыва вихрей за круговым цилиндром, обтекаемым потоком вязкой жидкости, известное как дорожка Кармана, представляет собой одну из фундаментальных проблем гидродинамики [1, 2]. Вихревая дорожка за телами возникает в широком диапазоне чисел Рейнольдса и является характерной особенностью течений за плохообтекаемыми телами. Исследование динамики вихревых структур в следе за круговым цилиндром остаётся актуальной задачей как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения [3]. В работе [3] проведен обширный обзор работ по динамике вихрей в следе за цилиндром, систематизировав знания о режимах вихреобразования в зависимости от числа Рейнольдса.

Связь между частотой срыва вихрей и числом Рейнольдса описывается числом Струхала, которое для дорожки Кармана в однородной жидкости демонстрирует характерную зависимость от режима течения [4, 5]. В работе [5] впервые детально изучено развитие турбулентных следов из вихревых дорожек, установив основные закономерности перехода между различными режимами. Экспериментальные и численные исследования показали, что с увеличением числа Рейнольдса происходит последовательная смена режимов течения: от ламинарного периодического вихреобразования к трёхмерным неустойчивостям и, в конечном счёте, к турбулентному следу [6–8]. Переход к турбулентности в следе за круговым цилиндром обусловлен развитием трёхмерных неустойчивостей, детально исследованных в работах [9, 10].

Значительный практический интерес представляет изучение вихревых следов в стратифицированных средах, поскольку такие течения широко распространены в природе – в атмосфере и океане [11, 12]. Здухов и Хромов [11] исследовали образование вихревых дорожек за препятствиями в атмосфере, продемонстрировав важность учёта стратификации для понимания атмосферных процессов. В стратифицированной жидкости течение характеризуется дополнительным безразмерным параметром – числом Ричардсона, которое определяет относительную важность силы Архимеда по сравнению с инерционными силами.

Влияние стратификации на характер течения за телами было предметом многочисленных экспе-

риментальных и теоретических исследований. В работе [13] изучены турбулентные следы в линейно стратифицированном потоке за сферой, выявив существенное изменение структуры следа при наличии стратификации. Структура близкого следа за сферой, движущейся горизонтально в стратифицированной жидкости рассмотрена в [14]. Показано, что стратификация приводит к подавлению вертикального движения и изменению характеристик вихревых структур. В работе [15] экспериментально исследовано линейно стратифицированное течение за горизонтально расположенным круговым цилиндром, установив ключевые особенности поведения вихревого следа в зависимости от степени стратификации.

Особый интерес представляет случай неустойчивой стратификации, когда лёгкая жидкость находится под тяжёлой. В этой ситуации конвективная неустойчивость может существенно влиять на динамику вихревых структур, приводя к значительной интенсификации процессов перемешивания [16–18]. Здухов [16] теоретически и экспериментально исследовал вихреобразование в стратифицированной жидкости, обнаружив качественные изменения в характере течения. Работы Гольдина и Ступишина [17, 18] посвящены численному моделированию взаимодействия вихревых структур со стратифицированной средой, где показано, что стратификация оказывает определяющее влияние на эволюцию вихрей.

Современные экспериментальные методы визуализации позволяют детально исследовать структуру течений в стратифицированных средах. В работе [19] проведено экспериментальное исследование картины течения вокруг полосы, равномерно движущейся в непрерывно стратифицированной жидкости, выявив тонкую структуру вихревого следа и внутренних волн. В эксперименте [20] исследованы стратифицированные следы за движущимися телами и показано сложное взаимодействие между вихревыми структурами и внутренними волнами.

Целью настоящей работы является численное исследование формирования и эволюции дорожки Кармана за круговым цилиндром в неустойчиво стратифицированной жидкости. Рассматривается влияние термической стратификации на характеристики вихревого следа, частоту срыва вихрей и пространственную структуру течения. Особое внимание уделяется роли конвективной неустой-

чивости в формировании вторичных структур и интенсификации процессов вихреобразования.

2. Постановка задачи

Рассматривается двумерное обтекание неподвижного кругового цилиндра диаметром D несжимаемой вязкой жидкостью в прямоугольной полости длиной $L_x = 30D$ и высотой $L_y = 15D$ (рис. 1). Набегающий поток направлен справа налево против оси x и имеет начальную скорость U_∞ . Ось y направлена вертикально вверх. Предполагается, что полость подогревается снизу, в результате формируется неустойчивая вертикальная стратификация жидкости.

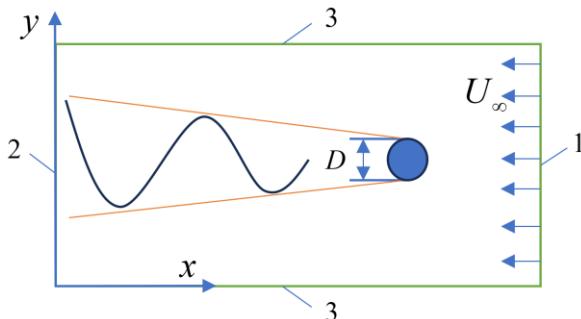


Рис. 1. Схематическое изображение геометрии задачи: 1 – входная граница, 2 – выходная граница, 3 – верхняя и нижняя границы

Неустойчивая стратификация создаётся путём поддержания постоянной температуры на верхней и нижней границах расчтной области, причём температура нижней границы T_h превышает температуру верхней границы T_c , что приводит к конвективной неустойчивости. Характерный градиент температуры

$$\beta = \frac{T_h - T_c}{L_y}$$

определяет степень стратификации среды.

Движение жидкости описывается системой уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска, дополненной уравнением переноса тепла:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + g \alpha (T - T_0) \mathbf{e}_y, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T, \quad (3)$$

где $\mathbf{u} = (u, v)$ – вектор скорости жидкости, t – время, p – давление, T – температура, ρ_0 – характеристическая плотность, ν – кинематическая вязкость, κ – коэффициент температуропроводности, g – ускорение свободного падения, α – коэффи-

циент теплового расширения, $T_0 = (T_h - T_c) / 2$ – средняя температура, \mathbf{e}_y – единичный вектор вдоль оси y .

В приближении Буссинеска плотность жидкости считается постоянной везде, кроме слагаемого с силой Архимеда, где учитывается её зависимость от температуры:

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0)].$$

На входной границе ($x = L_x$) задаются условия равномерного потока:

$$u = U_\infty, \quad v = 0, \quad T = T_0 + \beta y,$$

где начальное распределение температуры соответствует линейной стратификации. На выходной границе ($x = 0$) ставятся мягкие граничные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

На верхней ($y = L_y$) и нижней ($y = 0$) границах задаются условия проскальзывания для скорости и постоянные температуры:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad T|_{y=0} = T_h, \quad T|_{y=L_y} = T_c.$$

На поверхности цилиндра ($x^2 + y^2 = R^2, R = D/2$) выполняются условия прилипания и теплоизоляции:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0,$$

где n – внешняя нормаль к поверхности цилиндра.

В начальный момент времени задаются однородное поле скорости и линейное распределение температуры:

$$\mathbf{u} = (U_\infty, 0), \quad T = T_0 + \beta y.$$

Введём характерные масштабы: для длины – диаметр цилиндра D ; для скорости – скорость набегающего потока U_∞ ; для времени – D/U_∞ ; для температуры – разность температур $\Delta T = T_h - T_c$. Безразмерные переменные обозначаются звёздочкой:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \frac{\mathbf{u}}{U_\infty}, & \mathbf{x}^* &= \frac{\mathbf{x}}{D}, & t^* &= \frac{t U_\infty}{D}, \\ p^* &= \frac{p}{\rho_0 U_\infty^2}, & T^* &= \frac{T - T_c}{\Delta T}. \end{aligned}$$

В безразмерных переменных (опуская звёздочки для краткости) система уравнений (1)–(3) принимает вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + Ri \cdot T \mathbf{e}_y, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{1}{Re \cdot Pr} \nabla^2 T. \quad (6)$$

Задача характеризуется тремя безразмерными параметрами:

Число Рейнольдса, $Re = U_\infty D / \nu$, определяет соотношение инерционных и вязких сил. В данной работе исследуется диапазон $Re = 20 \div 200$, охватывающий ламинарный и переходный режимы течения;

Число Ричардсона, $Ri = g \alpha \beta D^2 / U_\infty^2$, характеризует отношение силы Архимеда к инерционным силам. Положительные значения $Ri > 0$ соответствуют неустойчивой стратификации (лёгкая жидкость под тяжёлой). В расчётах варьируется диапазон $Ri = 0 \div 1$;

Число Прандтля, $Pr = \nu / \kappa$, представляет собой отношение кинематической вязкости к температуропроводности. Для большинства расчётов принято значение $Pr = 1$.

3. Устойчивость обтекания цилиндра

Рассматриваемая задача характеризуется взаимодействием двух типов неустойчивостей: гидродинамической неустойчивости обтекания цилиндра, приводящей к периодическому срыву вихрей, и конвективной неустойчивости, обусловленной неустойчивой термической стратификацией. Рассмотрим известные результаты линейного анализа для каждого из этих механизмов.

Для течения за круговым цилиндром в однородной жидкости ($Ri = 0$) линейный анализ устойчивости стационарного симметричного решения позволяет определить критическое число Рейнольдса, при котором начинается периодический срыв вихрей [1,14]. Классические экспериментальные и численные исследования [7,19] показали, что неустойчивость развивается при $Re_{cr} \approx 47$, когда стационарная пара симметричных вихрей в ближнем следе теряет устойчивость по отношению к двумерным возмущениям.

При $Re < Re_{cr}$ течение остаётся стационарным и симметричным относительно оси x . При $Re > Re_{cr}$ реализуется режим периодического вихреобразования с характерной частотой, определяемой числом Струхала:

$$St = \frac{fD}{U_\infty},$$

где f – частота срыва вихрей.

Для диапазона $Re = 50 \div 150$ число Струхала рассчитывается по эмпирической формуле [3]:

$$St \approx 0.198 \left(1 - \frac{19.7}{Re} \right).$$

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса ($Re > 180 \div 200$) развиваются трёхмерные неустойчивости [14, 16], приводящие к переходу к турбулентности.

Линейный анализ трёхмерной устойчивости двумерной дорожки Кармана, выполненный в [14], показал, что существуют два различных типа трёхмерной неустойчивости с разными характерными длинами волн в направлении, перпендикулярном плоскости течения. Критические значения числа Рейнольдса для этих неустойчивостей составляют $Re_{3D,A} \approx 188$ и $Re_{3D,B} \approx 259$.

В отсутствие внешнего течения ($U_\infty = 0$) неустойчиво стратифицированный горизонтальный слой жидкости, подогреваемый снизу, теряет устойчивость при достижении критического числа Рэлея [18]. Рассмотрим слой толщиной H с граничными условиями свободной поверхности (нулевые касательные напряжения) на верхней и нижней границах, которые используются в данной работе.

Линейная теория устойчивости приводит к следующему критическому значению числа Рэлея для возникновения конвективной неустойчивости:

$$Ra_{cr} = \frac{g \alpha \Delta T H^3}{\nu \kappa} = \frac{27 \pi^4}{4} \approx 657.5,$$

где H – характерная высота слоя (в нашей задаче $H = L_y$).

Число Рэлея связано с числом Ричардсона соотношением:

$$Ra = Ri \cdot Re^2 \cdot Pr \left(\frac{H}{D} \right)^4.$$

Для используемых в расчётах параметров ($L_y = 15D$, $Pr = 1$, $Re = 75$) критическому числу Рэлея соответствует критическое число Ричардсона:

$$Ri_{cr} = \frac{Ra_{cr}}{Re^2 \cdot Pr \cdot (L_y / D)^4} \approx 2.65 \cdot 10^{-6}.$$

Полученное значение Ri_{cr} является малым, что указывает на вероятность высокой чувствительности стратифицированной системы к конвективной неустойчивости (даже при малых Ri система неустойчива). При превышении этого порога в системе отчета, движущейся со скоростью потока, в слое возникают конвективные ячейки с характерным горизонтальным размером порядка высоты слоя. Однако, интенсивное течение быстро выносит нарастающие возмущения за пределы рассматриваемой области. В результате течение остаётся

плоскопараллельным даже при значительных надкритичностях ($Ri \gg Ri_{cr}$).

В рассматриваемой задаче присутствуют оба типа неустойчивостей одновременно. Их взаимодействие приводит к качественно новым эффектам, которые не могут быть описаны простой суперпозицией независимых решений. Конвективная неустойчивость модифицирует поле плотности в вихревом следе, что через силу Архимеда влияет на динамику вихрей. В свою очередь, вихревое течение интенсифицирует перенос тепла и изменяет характер развития конвективной неустойчивости.

Важно отметить, что линейная теория не может предсказать нелинейные режимы взаимодействия неустойчивостей, которые реализуются при конечных амплитудах возмущений. Для исследования этих режимов необходимо прямое численное моделирование полной нелинейной системы уравнений, что и является целью настоящей работы.

4. Методика численного моделирования

Численное решение уравнений (4)–(6) проведено методом конечных объёмов с использованием разнесённой сетки. Для дискретизации конвективных членов применяется схема второго порядка точности QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics). Диффузионные члены аппроксимируются центральными разностями второго порядка точности. Временная дискретизация осуществляется по неявной схеме второго порядка.

Связь полей скорости и давления обеспечивается алгоритмом SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations). На каждом временном шаге выполняется итерационная процедура до достижения заданной точности по невязке уравнений (10^{-4} для всех полей).

Как отмечено выше, расчётная область представляет собой прямоугольник длиной $L_x = 30D$ и высотой $L_y = 15D$. Необходимо отметить, что безразмерные параметры задачи не зависят от параметров расчетной области. Следовательно, наблюдаемые физические явления не будут зависеть от ее размеров в случае, если она достаточна велика, т.е. $L_x \gg D$, $L_y \gg D$. Вычислительный домен дискретизируется неравномерной структурированной сеткой с сгущением вблизи цилиндра и границ области. Типичный размер сетки составляет 800×400 узлов. Шаг по времени выбирается из условия Куранта–Фридрихса–Леви:

$$\Delta t \leq \frac{0.01D}{U_\infty}.$$

Важными характеристиками обтекания цилиндра являются силы, действующие на него со сто-

роны потока. Вычисляются две компоненты результирующей силы: сила сопротивления F_D (в направлении набегающего потока вдоль оси x) и подъёмная сила F_L (в перпендикулярном направлении вдоль оси y).

Полная сила, действующая на цилиндр, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности цилиндра:

$$\mathbf{F} = \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS,$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, \mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности цилиндра, S – поверхность цилиндра.

Проектируя полную силу на оси координат, получаем:

$$F_D = \oint_S \left[-pn_x + \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right) \right] dS,$$

$$F_L = \oint_S \left[-pn_y + \mu \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + 2 \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right) \right] dS,$$

где n_x и n_y – компоненты вектора нормали.

Первые слагаемые в этих выражениях представляют собой вклад от давления (форма сопротивления), а вторые – вклад от вязких напряжений (сопротивление трения).

Для сравнения с экспериментальными данными и результатами других численных исследований силы выражаются в безразмерном виде через коэффициенты сопротивления и подъёмной силы:

$$C_D = \frac{2F_D}{\rho_0 U_\infty^2 D},$$

$$C_L = \frac{2F_L}{\rho_0 U_\infty^2 D},$$

где в двумерном случае в качестве характерного масштаба для нормировки силы используется диаметр цилиндра D , что соответствует силе, действующей на единицу длины цилиндра.

Проведено исследование сеточной сходимости численного решения. В качестве контрольного параметра было выбрано значение коэффициента сопротивления C_D при $t = 100$. Результаты тестовых расчётов на сетках различных размеров показали, что при уменьшении характерного размера расчётной сетки в 1.5 и 2 раза наблюдается монотонное уменьшение контрольного параметра на 5% и 11% соответственно. Увеличение характерного размера сетки в 1.5 раза приводит к изменению коэффициента сопротивления менее чем на 1%. Полученная слабая зависимость решения от дальнейшего сгущения сетки свидетельствует о достижении асимптотической сходимости и позволяет сделать вывод о достаточной разрешающей способности базовой расчётной сетки для адекват-

ного моделирования рассматриваемых физических процессов.

5. Результаты моделирования

Для проверки достоверности численной модели первоначально проведены расчёты обтекания кругового цилиндра в однородной жидкости ($Ri = 0$) при различных числах Рейнольдса. Результаты моделирования развития неустойчивости показаны на рис. 2. При $Re = 40 < Re_{cr}$ наблюдается стационарное симметричное обтекание с парой стационарных вихрей за цилиндром (рис. 2, а). При $Re = 70$ формируется характерная дорожка Кармана с периодическим срывом вихрей (рис. 2, б). При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса до $Re = 200$ вихревой след становится более протяжённым (рис. 2, в).

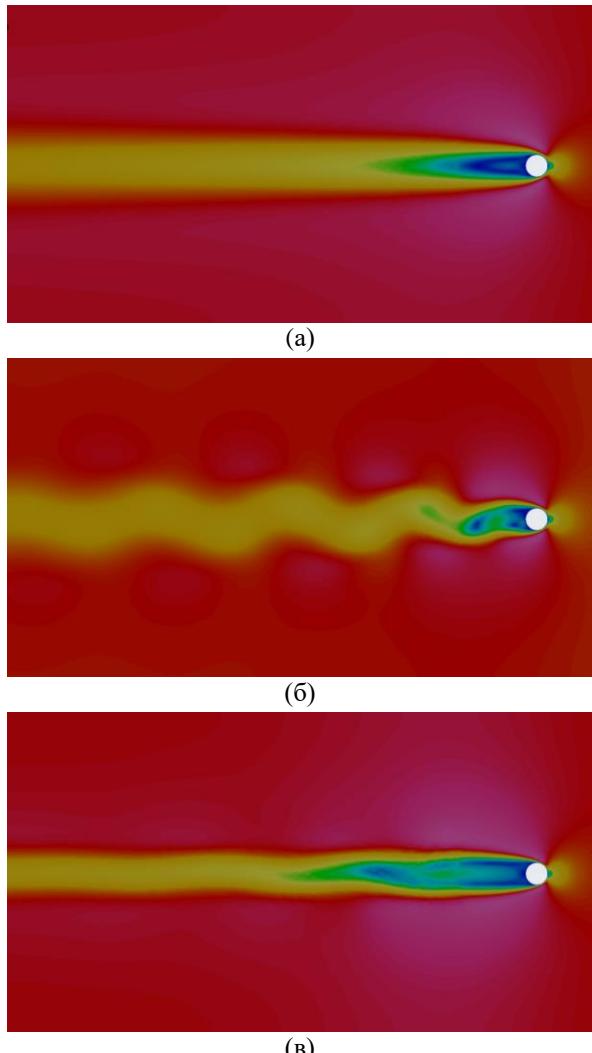


Рис. 2. Поле модуля скорости при $Ri = 0$, $Pr = 1$ и различных интенсивностях потока: (а) – $Re = 40$, (б) – $Re = 70$, (в) – $Re = 200$

Для количественной верификации модели вычислены интегральные характеристики обтекания.

При периодическом срыве вихрей коэффициенты C_D и C_L являются функциями времени.

Коэффициент сопротивления $C_D(t)$ осциллирует около среднего значения $\overline{C_D}$ с амплитудой, значительно меньшей среднего значения (рис. 3). Коэффициент подъёмной силы $C_L(t)$ осциллирует с нулевым средним и амплитудой, сравнимой с отклонением $\overline{C_D}$ от начального значения (рис. 4). Частота осцилляций $C_L(t)$ определяет частоту срыва вихрей и используется для вычисления числа Струхала:

$$St = \frac{f_L D}{U_\infty},$$

где f_L – частота колебаний подъёмной силы.

Полученное значение числа Струхала $St = 0.14 \pm 0.01$ при $Re = 70$ хорошо согласуется с классическими экспериментальными данными [3]. Средний коэффициент сопротивления также находится в хорошем соответствии с литературными данными.

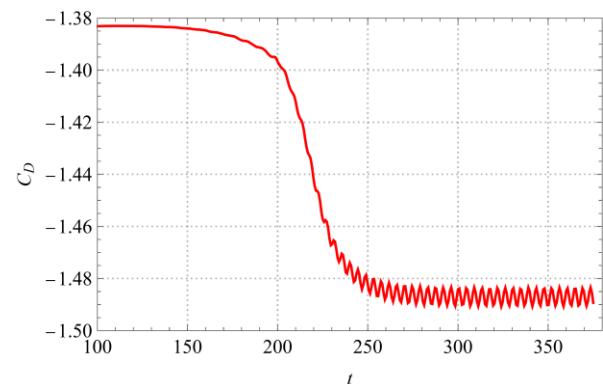


Рис. 3. Временная зависимость коэффициента сопротивления C_D при $Re = 70$, $Ri = 0$, $Pr = 1$

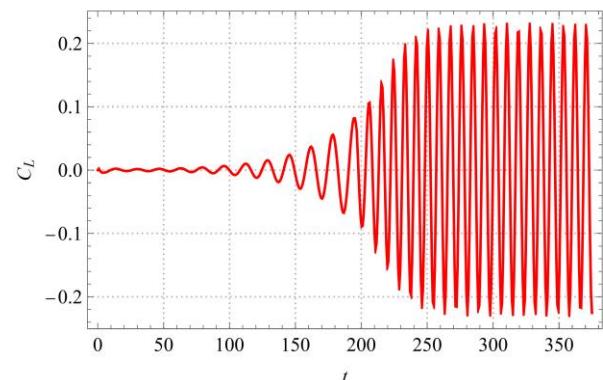


Рис. 4. Временная зависимость коэффициента подъёмной силы C_L при $Re = 70$, $Ri = 0$, $Pr = 1$

Результаты моделирования влияния неустойчивой термической стратификации на формирование дорожки Кармана представлены на рис. 5. При

фиксированном числе Рейнольдса $Re = 70$ рассмотрено изменение структуры течения с увеличением числа Ричардсона от $Ri = 0$ (однородная жидкость) до $Ri = 0.054$ (сильная неустойчивая стратификация).

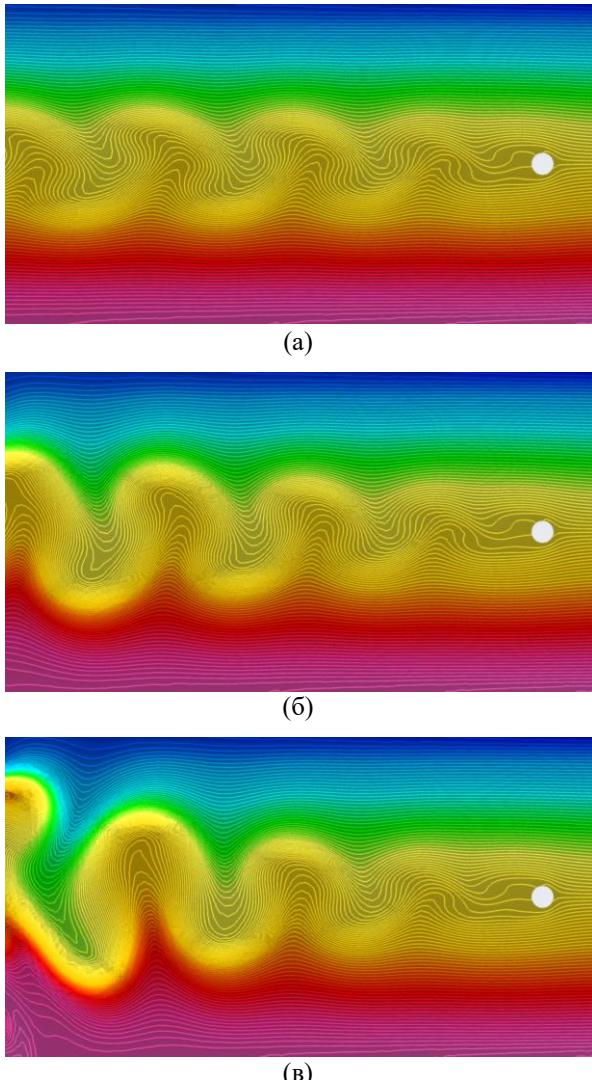


Рис. 5. Поле безразмерной температуры при $Re = 70$, $Pr = 1$ и различных интенсивностях нагрева: (а) – $Ri = 0$, (б) – $Ri = 0.027$, (в) – $Ri = 0.054$

В случае однородной жидкости (рис. 5, а) температурное поле демонстрирует классическую картину конвективного переноса тепла вихрями дорожки Кармана. Изотермы вытягиваются вдоль линий тока, образуя характерную вихревую структуру. Перенос тепла осуществляется преимущественно за счёт адвекции вихрями.

При умеренной неустойчивой стратификации (рис. 5, б) наблюдается существенное изменение структуры температурного поля. Помимо основных вихрей дорожки Кармана, в следе возникают вторичные конвективные структуры, обусловленные неустойчивой стратификацией.

При сильной неустойчивой стратификации (рис. 5, в) конвективная неустойчивость становится доминирующим фактором. Температурное поле характеризуется сложной многомасштабной структурой с интенсивным развитием вторичных конвективных течений. Вихри дорожки Кармана существенно деформируются под действием плавучестных сил, что приводит к изменению их формы и траекторий движения. Наблюдаются образование восходящих струй горячей жидкости и нисходящих струй холодной жидкости, которые существенно модифицируют основное вихревое течение.

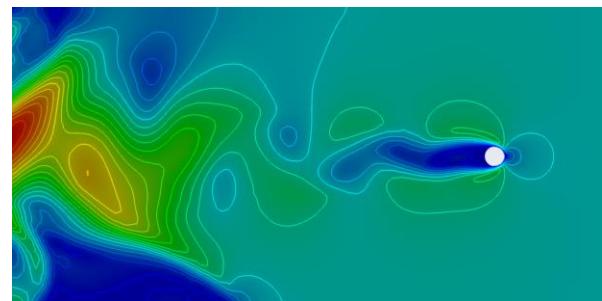


Рис. 6. Поле модуля скорости при $Ri = 0.11$, $Pr = 1$, $Re = 70$

Наличие неустойчивой стратификации приводит к существенному изменению динамических характеристик обтекания. Сила Архимеда, действующая на элементы жидкости с различной температурой, вносит дополнительный вклад в поле течения, что влияет на распределение давления и скорости вблизи цилиндра и, следовательно, на величины коэффициентов сопротивления C_D и подъёмной силы C_L .

Анализ зависимостей средних и амплитудных значений этих коэффициентов от числа Ричардсона показывает следующие закономерности. С увеличением Ri средний коэффициент сопротивления $\overline{C_D}$ монотонно возрастает, что связано с дополнительным вкладом давления, обусловленного неоднородностью поля плотности. При $Ri = 0.054$ значение $\overline{C_D}$ увеличивается примерно на 15% по сравнению со случаем однородной жидкости. Амплитуда колебаний подъёмной силы также возрастает с увеличением числа Ричардсона, что свидетельствует об интенсификации вихреобразования под действием сил плавучести.

Результаты численного моделирования позволяют выделить три характерных режима взаимодействия гидродинамической и конвективной неустойчивостей в зависимости от числа Ричардсона.

Режим I, ($Ri < 0.03$): Влияние стратификации слабое. Характеристики течения близки к случаю однородной жидкости (см. рис. 5, а). Конвективная неустойчивость проявляется лишь в небольших возмущениях температурного поля внутри

вихрей, не оказывая существенного влияния на структуру дорожки Кармана.

Режим II, ($0.03 < Ri < 0.1$): Умеренное влияние стратификации. Наблюдается формирование вторичных конвективных структур в вихревом следе, которые, однако, не нарушают регулярного характера вихреобразования (см. рис. 5, в). Этот режим характеризуется слабым взаимодействием двух типов неустойчивостей с частичным изменением геометрических характеристик дорожки Кармана.

Режим III, ($Ri > 0.1$): Сильное влияние стратификации. Конвективная неустойчивость становится определяющей. Происходит качественная перестройка структуры течения с формированием сложных многомасштабных вихревых структур. Регулярность вихреобразования нарушается, и течение приобретает хаотический характер (см. рис. 6).

Переход между режимами не является резким и характеризуется постепенным изменением характеристик течения.

6. Заключение

Проведено численное исследование формирования дорожки Кармана за круговым цилиндром в неустойчиво стратифицированной жидкости. Разработана и верифицирована численная модель на основе полной системы уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска. Показано хорошее согласие расчётных характеристик обтекания с известными экспериментальными и теоретическими данными для случая однородной жидкости.

Численное моделирование показало, что наличие неустойчивой термической стратификации существенно влияет на структуру вихревого следа и динамические характеристики обтекания. Выявлено формирование вторичных конвективных структур в вихревом следе, обусловленных взаимодействием гидродинамической и конвективной неустойчивостей. Показано, что с увеличением числа Ричардсона происходит качественная перестройка течения от регулярной дорожки Кармана к хаотической конвекции с вихревыми структурами сложной формы формирующиеся вблизи выхода из расчетной области.

Выделены три характерных режима взаимодействия неустойчивостей: режим слабого влияния стратификации ($Ri < 0.03$), режим умеренного влияния ($0.03 < Ri < 0.1$) и режим доминирующей роли конвективной неустойчивости ($Ri > 0.1$). Показано, что средний коэффициент сопротивления монотонно возрастает с увеличением числа Ричардсона, увеличиваясь на 12–15% при переходе от однородной жидкости к режиму сильной стратификации.

Результаты работы представляют интерес для понимания физики течений в природных стратифицированных средах, таких как атмосфера и океан, где неустойчивая стратификация часто возни-

кает вблизи нагретых поверхностей или в областях с градиентом солёности. Полученные данные могут быть использованы для разработки упрощённых моделей вихревых следов за телами в стратифицированных средах и оптимизации конструкций, эксплуатируемых в условиях термической неоднородности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 121031700169-1).

Список литературы

1. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 584 с.
2. Tritton D. J. Physical Fluid Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. 536 p.
3. Williamson C. H. K. Vortex dynamics in the cylinder wake // Annual Review of Fluid Mechanics. 1996. Vol. 28. P. 477–539.
DOI: 10.1146/annurev.fl.28.010196.002401
4. Ponta F. L., Aref H. The Strouhal–Reynolds number relationship for vortex streets // Journal of Fluid Mechanics. 2004. Vol. 520. P. 227–244. DOI: 10.1017/S0022112004009814
5. Roshko A. On the development of turbulent wakes from vortex streets // NACA Technical Note. 1953. № 2913, 1191.
6. Persillon H., Braza M. Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional Navier–Stokes simulation // Journal of Fluid Mechanics. 1998. Vol. 365. P. 365–398.
DOI: 10.1017/S0022112097007465
7. Henderson R. D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition // Journal of Fluid Mechanics. 1997. Vol. 352. P. 23–62. DOI: 10.1017/S0022112097007283
8. Schewe G. On the force fluctuations acting on a circular cylinder in crossflow from subcritical up to transcritical Reynolds numbers // Journal of Fluid Mechanics. 1983. Vol. 133. P. 375–398. DOI: 10.1017/S0022112083001159
9. Barkley D., Henderson R. D. Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder // Journal of Fluid Mechanics. 1996. Vol. 322. P. 239–263.
DOI: 10.1017/S0022112096002777
10. Mittal R., Balachandar S. Effect of three-dimensionality on the lift and drag of nominally two-dimensional cylinders // Physics of Fluids. 1995. Vol. 7. P. 1658–1669. DOI: 10.1063/1.868854
11. Здухов Л. Н., Хромов С. П. О вихревых дорожках за препятствиями в атмосфере // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1976. Т. 12, № 3. С. 227–236.

12. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 696 с.
13. Lin Q., Boyer D. L., Fernando H. J. S. Turbulent wakes of linearly stratified flow past a sphere // *Physics of Fluids*. 1992. Vol. 4. P. 1687–1696. DOI: 10.1063/1.858389
14. Chomaz J. M., Bonneton P., Hopfinger E. J. The structure of the near wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid // *Journal of Fluid Mechanics*. 1993. Vol. 254. P. 455–474. DOI: 10.1017/S0022112093001442
15. Boyer D. L., Davies P. A., Fernando H. J. S., Zhang X. Linearly stratified flow past a horizontal circular cylinder // *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. 1991. Vol. 59. P. 265–294. DOI: 10.1080/03091929108227788
16. Здухов Л. Н. О вихреобразовании в стратифицированной жидкости // Метеорология и гидрология. 1985. № 8. С. 27–35.
17. Ступишин Л. Ю., Гольдин В. Д. Численное исследование взаимодействия вихревых структур со стратифицированной средой // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43, № 5. С. 897–908.
18. Гольдин В. Д., Ступишин Л. Ю. Моделирование вихревых процессов в стратифицированной жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2003. Т. 44, № 4. С. 47–56
19. Chashechkin Y. D., Mitkin V. V. A visual study on flow pattern around the strip moving uniformly in a continuously stratified fluid // *Journal of Visualization*. 2004. Vol. 7. P. 127–134. DOI: 10.1007/BF03181585
20. Meunier P., Spedding G. R. Stratified propelled wakes // *Journal of Fluid Mechanics*. 2006. Vol. 552. P. 1–23. DOI: 10.1017/jfm.2006.393
- 365, pp. 365–398. DOI: 10.1017/S0022112097007465
7. Henderson R. D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition. *Journal of Fluid Mechanics*, 1997, vol. 352, pp. 23–62. DOI: 10.1017/S0022112097007283
8. Schewe G. On the force fluctuations acting on a circular cylinder in crossflow from subcritical up to transcritical Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, vol. 133, pp. 375–398. DOI: 10.1017/S0022112083001159
9. Barkley D., Henderson R. D. Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 1996, vol. 322, pp. 239–263. DOI: 10.1017/S0022112096002777
10. Mittal R., Balachandar S. Effect of three-dimensionality on the lift and drag of nominally two-dimensional cylinders. *Physics of Fluids*, 1995, vol. 7, pp. 1658–1669. DOI: 10.1063/1.868854
11. Zdukhov L. N., Khromov S. P. O vikhrevykh dorozhkah za prepiatstviami v atmosfere [On vortex streets behind obstacles in the atmosphere]. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 1976, vol. 12, no. 3, pp. 227–236. (In Russian)
12. Monin A. S., Yaglom A. M. *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*. Vol. 1. Cambridge: MIT Press, 1971. 769 p.
13. Lin Q., Boyer D. L., Fernando H. J. S. Turbulent wakes of linearly stratified flow past a sphere. *Physics of Fluids*, 1992, vol. 4, pp. 1687–1696. DOI: 10.1063/1.858389
14. Chomaz J. M., Bonneton P., Hopfinger E. J. The structure of the near wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 1993, vol. 254, pp. 455–474. DOI: 10.1017/S0022112093001442
15. Boyer D. L., Davies P. A., Fernando H. J. S., Zhang X. Linearly stratified flow past a horizontal circular cylinder. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 1991, vol. 59, pp. 265–294. DOI: 10.1080/03091929108227788
16. Zdukhov L. N. On vortex formation in a stratified fluid. *Russian Meteorology and Hydrology*, 1985, no. 8, pp. 27–35.
17. Stupishin L. Y., Goldin V. D. Numerical investigation of the interaction of vortex structures with a stratified medium. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, no. 5, pp. 860–871.
18. Goldin V. D., Stupishin L. Y. Modeling of vortex processes in a stratified fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2003, vol. 44, no. 4, pp. 517–525. DOI: 10.1023/A:102479911182
19. Chashechkin Y. D., Mitkin V. V. A visual study on flow pattern around the strip moving uniformly

References

- Van Dyke M. *An Album of Fluid Motion*. Stanford: Parabolic Press, 1982. 176 p.
- Tritton D. J. *Physical Fluid Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. 536 p.
- Williamson C. H. K. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1996, vol. 28, pp. 477–539. DOI: 10.1146/annurev.fl.28.010196.002401
- Ponta F. L., Aref H. The Strouhal–Reynolds number relationship for vortex streets. *Journal of Fluid Mechanics*, 2004, vol. 520, pp. 227–244. DOI: 10.1017/S0022112004009814
- Roshko A. On the development of turbulent wakes from vortex streets. *NACA Technical Note*, 1953, no. 2913, 1191.
- Persillon H., Braza M. Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional Navier–Stokes simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 1998, vol. 365, pp. 365–398. DOI: 10.1017/S0022112097007465
- Henderson R. D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition. *Journal of Fluid Mechanics*, 1997, vol. 352, pp. 23–62. DOI: 10.1017/S0022112097007283
- Schewe G. On the force fluctuations acting on a circular cylinder in crossflow from subcritical up to transcritical Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, vol. 133, pp. 375–398. DOI: 10.1017/S0022112083001159
- Barkley D., Henderson R. D. Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 1996, vol. 322, pp. 239–263. DOI: 10.1017/S0022112096002777
- Mittal R., Balachandar S. Effect of three-dimensionality on the lift and drag of nominally two-dimensional cylinders. *Physics of Fluids*, 1995, vol. 7, pp. 1658–1669. DOI: 10.1063/1.868854
- Zdukhov L. N., Khromov S. P. O vikhrevykh dorozhkah za prepiatstviami v atmosfere [On vortex streets behind obstacles in the atmosphere]. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 1976, vol. 12, no. 3, pp. 227–236. (In Russian)
- Monin A. S., Yaglom A. M. *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*. Vol. 1. Cambridge: MIT Press, 1971. 769 p.
- Lin Q., Boyer D. L., Fernando H. J. S. Turbulent wakes of linearly stratified flow past a sphere. *Physics of Fluids*, 1992, vol. 4, pp. 1687–1696. DOI: 10.1063/1.858389
- Chomaz J. M., Bonneton P., Hopfinger E. J. The structure of the near wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 1993, vol. 254, pp. 455–474. DOI: 10.1017/S0022112093001442
- Boyer D. L., Davies P. A., Fernando H. J. S., Zhang X. Linearly stratified flow past a horizontal circular cylinder. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 1991, vol. 59, pp. 265–294. DOI: 10.1080/03091929108227788
- Zdukhov L. N. On vortex formation in a stratified fluid. *Russian Meteorology and Hydrology*, 1985, no. 8, pp. 27–35.
- Stupishin L. Y., Goldin V. D. Numerical investigation of the interaction of vortex structures with a stratified medium. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, no. 5, pp. 860–871.
- Goldin V. D., Stupishin L. Y. Modeling of vortex processes in a stratified fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2003, vol. 44, no. 4, pp. 517–525. DOI: 10.1023/A:102479911182
- Chashechkin Y. D., Mitkin V. V. A visual study on flow pattern around the strip moving uniformly

- in a continuously stratified fluid. *Journal of Visualization*, 2004, vol. 7, pp. 127–134. DOI: 10.1007/BF03181585
20. Meunier P., Spedding G. R. Stratified propelled wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006, vol. 552, pp. 1–23. DOI: 10.1017/jfm.2006.393

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Иванцов А. О. Численное моделирование формирования дорожки Кармана в неустойчиво стратифицированном потоке // Вестник Пермского университета. Физика. 2025. № 4. С. 49–58. doi: 10.17072/1994-3598-2025-4-49-58

Please cite this article in English as:

Ivantsov A. O. Numerical simulation of a Kármán vortex street in an unstably stratified flow. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2025, no. 4, pp. 49–58. doi: 10.17072/1994-3598-2025-4-49-58

Сведения об авторе

Иванцов Андрей Олегович, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Лаборатории вычислительной гидродинамики, Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, ул. Ак. Королева, 1, Пермь, 614013.

Author information

Andrey O. Ivantsov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Laboratory of Computational Fluid Dynamics, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia.