

УДК 532.546; 532.5.013.4  
PACS 47.56.+r, 47.55.pd

## **Моделирование транспорта конечного объёма примеси через вертикальную пористую колонну**

**М. Р. Хабин<sup>1†</sup>, Б. С. Марышев<sup>1,2‡</sup>**

<sup>1</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

<sup>2</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

<sup>†</sup> khabin.m@icmm.ru

<sup>‡</sup> bmaryshev@icmm.ru

Задача о вертикальном просачивании (снизу-вверх) порции смеси через массив пористой среды под действием постоянного перепада давления. Транспорт примеси моделируется в рамках MIM (mobile/immobile media) подхода. Процессы сорбции описываются нелинейной MIM моделью, учитывающей предел осаждения примеси на стенках пор. Фильтрация моделируется в приближении Дарси–Буссинеска, что позволяет учитывать влияние силы тяжести и, как следствие, развитие концентрационной конвекции. Зависимость проницаемости от пористости даётся соотношением Козени–Кармана. Аналитически получено основное бесконвективное состояние. Задача о возникновении конвекции решалась численно, методом конечных разностей. Получены поля концентрации и возмущений функции тока, а также средний мгновенный профиль концентрации по направлению течения для разных моментов времени. Показано, как рост числа Рэлея–Дарси влияет на времена закачивания и выхода раствора из рабочей области, а также на кривую прорыва.

**Ключевые слова:** пористая среда; МИМ подход; концентрационная конвекция

*Поступила в редакцию 08.08.2025; после рецензии 23.09.2025; принята к опубликованию 23.09.2025*

## **Modeling the transport of the finite volume of impurity in a vertical porous column**

**М. Р. Хабин<sup>1†</sup>, Б. С. Марышев<sup>1,2‡</sup>**

<sup>1</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

<sup>2</sup> Perm State University, Perm, Russia

<sup>†</sup> khabin.m@icmm.ru

<sup>‡</sup> bmaryshev@icmm.ru

We consider a problem of vertical percolation (bottom-up) of a mixture portion through a porous medium array under constant pressure drop. Contaminant transport is modeled within the MIM (mobile/immobile media) approach. Sorption processes are described by a nonlinear MIM model accounting for the limit of contaminant deposition on pore walls. Filtration is modeled using the Darcy–Boussinesq approximation, which enables the inclusion of gravity effects and consequently the development of concentration convection. The permeability-porosity dependence is given by the Kozeny–Carman relation. The basic non-convective state was obtained analytically. The convection onset problem was solved numerically using the finite difference method. The field of concentration and stream function perturbations were obtained, as well as the average instantaneous concentration profile along the flow direction at different time moments. It is demonstrated how the

growth of the Darcy–Rayleigh number affects the solution injection and breakthrough times, as well as the breakthrough curve.

**Keywords:** porous media; MIM approach; solutal convection

Received 08 August 2025; revised 23 September 2025; accepted 23 September 2025

doi: 10.17072/1994-3598-2025-4-05-15

## 1. Введение

Важным направлением экспериментального изучения переноса примесей в пористых колоннах является определение феноменологических параметров математических моделей. Основной метод заключается в подборе значений этих параметров таким образом, чтобы достичь максимального совпадения между экспериментальными данными о временной зависимости концентрации (кривой прорыва), измеренной в определённой точке колонны (обычно на выходе), и результатами численного моделирования данного процесса. Для применения данного метода требуется, чтобы транспорт примеси оставался одномерным.

Оценке параметров сорбции и влиянию на такую оценку различных факторов была посвящена серия работ. Работа [1] посвящена оценке параметров MIM модели на основе сравнения экспериментальных данных с расчётом, методом решения обратной задачи были определены параметры для фильтрации натриевой соли через кварцевый песок и стеклянный гранулят. Подробное описание и тесты алгоритма, использовавшегося для оценки параметров приведены в работе [2]. В работе [3] на основе экспериментальных данных исследована конвективная неустойчивость, возникающая при прокачке порции примеси через массив пористой среды в горизонтальном направлении. Работы [4, 5] посвящены исследованию возможности подавления неустойчивости с помощью пульсаций потока и наклона области. В процессе этой работы так же было показано, что в вертикальной области неустойчивость одномерного фильтрационного течения присутствует всегда. В работе [6] продемонстрировано, что эта неустойчивость имеет Рэлей–Тейлоровскую природу [7]. Оценены времена её возникновения экспериментально и с помощью численного решения задачи линейной устойчивости одномерной фильтрации, показано хорошее совпадение данных. Целью настоящей работы является прямое численное моделирование подобного эксперимента для детального понимания механизмов влияния концентрационной конвекции на транспорт примеси.

Перенос вещества в пористых средах осложняется его взаимодействием с твёрдой матрицей. Причины иммобилизации растворенного вещества могут различаться. Это может быть блокировка пористых каналов агрегатами, химическая реакция, адгезия бактерий и т.д. Однако наиболее рас-

пространённым типом иммобилизации является адсорбция. Одним из наиболее популярных методов моделирования транспорта с иммобилизацией, является MIM (mobile/immobile media) подход [8]. Данный подход позволяет учесть тот факт, что часть растворенного вещества, переносимого жидкостью, насыщающей пористую среду, может оседать на стенках пор. Для этого в рамках подхода концентрация разделяется на две фазы мобильности. Мобильная фаза описывает концентрацию вещества, движущуюся вместе с потоком несущей жидкости, а иммобильная фаза – осевшую на стенах пор. Фазовый переход между состояниями мобильности примеси определяется кинетическим уравнением. В литературе описаны различные варианты таких уравнений и условия их применимости.

Наиболее простой моделью является линейная MIM модель [9]. Данная модель применима при фильтрации смесей со слабой концентрацией. Для растворов высоких концентраций примеси лучше подходит нелинейная MIM модель [10]. Эта модель учитывает предельное значение иммобильной концентрации, при достижении которого процесс адсорбции прекращается. Это отражает тот факт, что на стенах пор бесконечное количество примеси оседать не может.

Иммобилизация примеси на стенах пор приводит к увеличению гидравлического сопротивления пористой среды, то есть уменьшению её проницаемости. Зависимость проницаемости от пористости может сильно различаться для разных пористых материалов. Наиболее простой и часто используемой зависимостью является соотношение Козени–Кармана [11]. Данное соотношение является модификацией Кармана для теории Козени, относящейся к теориям гидравлического радиуса, объясняющей проницаемость через геометрические свойства среды. Процесс фильтрации моделируется в приближении Дарси с учётом силы тяжести. При фильтрации порции смеси в вертикальной пористой колонне возникает неустойчивая стратификация в результате неоднородности плотности флюида: тяжёлая жидкость оказывается над более лёгкой, что приводит к развитию неустойчивости Рэлея–Тейлора.

Статья состоит из 5 разделов. Во введении описан используемый подход и мотивация работы, во 2 разделе – постановка задачи, 3 раздел посвящён методу решения, 4 раздел содержит результаты и их обсуждение, и в 5 разделе статьи приведено заключение, содержащее основные выводы.

## 2. Постановка задачи

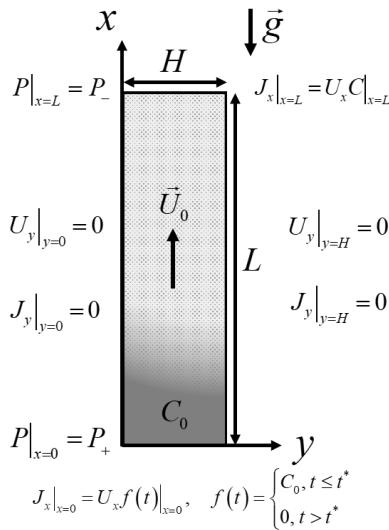


Рис. 1. Схема задачи

Задача решается в двухмерной постановке (рис. 1). Конечный объём смеси прокачивается через вытянутую в вертикальном направлении прямоугольную область (снизу-вверх), заполненную пористой средой. Соотношение сторон прямоугольника  $H/L=0.1$ .

В рамках МИМ подхода [8] уравнение транспорта примеси можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial(\phi C + Q)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (1)$$

где  $C, Q$  – объёмные концентрации примеси, находящейся в мобильной и немобильной фазах, соответственно. Поток вещества  $\mathbf{J}$  состоит из двух компонент диффузационной (закон Фика) и адвективной:

$$\mathbf{J} = \phi \mathbf{J}_p = \phi(-D \nabla C + \mathbf{W} C) = -\phi D \nabla C + \mathbf{U} C, \quad (2)$$

где  $\mathbf{U} = \phi \mathbf{W}$  – вектор скорости фильтрации (соотношение Диопюи–Форхгеймера [12]),  $\phi$  – текущая пористость,  $\mathbf{J}_p$  – поток вещества через поры,  $D$  – эффективный коэффициент диффузии.

Нелинейная МИМ модель [10], учитывающая предел насыщения немобильной фазы до предельной концентрации  $Q_0$ , после достижения которой процесс адсорбции прекращается, содержит следующее кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \alpha((Q_0 - Q)C - K_d Q), \quad (3)$$

где  $\alpha$  – коэффициент переноса примеси,  $K_d$  – коэффициент распределения примеси.

Закон Дарси с учётом силы тяжести:

$$\frac{\eta}{\kappa(\phi)} \mathbf{U} = -\nabla P + \rho \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = -g \mathbf{e}_x, \quad (4)$$

где  $\kappa(\phi)$  – проницаемость среды,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости,  $\mathbf{g}$  – вектор ускорения сво-

бодного падения,  $P$  – давление. Несущую жидкость считаем несжимаемой, следовательно, для неё справедливо соотношение:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (5)$$

Пористость чистой среды –  $\phi_0$ . Текущая пористость  $\phi$  линейно уменьшается с ростом концентрации иммобилайнерной примеси:

$$\phi = \phi_0 - Q. \quad (6)$$

Зависимость проницаемости от пористости описывается соотношением Козени–Кармана [11]:

$$\kappa(\phi) = \gamma \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}, \quad (7)$$

где  $\gamma$  – константа Козени–Кармана, которая может быть определена экспериментально для чистой среды. Зависимость плотности несущей жидкости от концентрации мобильной примеси запишем в приближении Буссинеска [12]:

$$\rho(C) = \rho_0 (1 + \beta_C C), \quad (8)$$

где  $\rho$  – плотность раствора,  $\rho_0$  – плотность чистой жидкости,  $\beta_C$  – коэффициент концентрационного объёмного расширения. Используя формулу (7), из уравнения (4) можно получить закон фильтрации в приближении Дарси–Буссинеска

$$\mathbf{U} = -\frac{\kappa(\phi)}{\eta} (\nabla P' + \rho_0 g \beta_C C \mathbf{e}_x), \quad (9)$$

$$P' = P - \rho_0 g (L - x).$$

Объединяя уравнения (1)–(7) и (9), получаем систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi C + Q)}{\partial t} &= \phi D \Delta C + D (\nabla \phi \cdot \nabla C) - \mathbf{U} \cdot \nabla C, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= \alpha ((Q_0 - Q)C - K_d Q), \\ \mathbf{U} &= -\frac{\kappa(\phi)}{\eta} (\nabla P' + \rho_0 g \beta_C C \mathbf{e}_x), \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \\ \kappa(\phi) &= \gamma \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}, \quad \phi = \phi_0 - Q. \end{aligned} \quad (10)$$

Границные условия: подача смеси заданной концентрации в рабочую область (при  $x=0$ ), свободное вытекание (при  $x=L$ ), непроницаемые для смеси боковые стенки, постоянный перепад давления между входом и выходом из колонны:

$$\begin{aligned} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_x)|_{x=0} &= U_x C_0 f(t)|_{x=0}, \\ f(t) &= 1 - \theta(t - t^*), \\ (\mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_x)|_{x=L} &= U_x C|_{x=L}, \quad (\mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_y)|_{y=0,H} = 0, \\ P'|_{x=0} &= P_+ - \rho_0 g L, \quad P'|_{x=L} = P_-, \\ (\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_y)|_{y=0,H} &= 0; \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\theta(t-t^*)$  – функция Хевисайда,  $t^*$  – время закачки порции смеси,  $C_0$  – концентрация порции смеси.

Начальные условия: отсутствие примеси в области и линейный профиль давления (с учётом гидростатического распределения):

$$\begin{aligned} C(x, y, t=0) &= 0, \quad Q(x, y, t=0) = 0, \\ P'(x, y, t=0) &= \\ &= P_+ - \frac{P_+ - P_-}{L} x - \rho_0 g (L - x). \end{aligned} \quad (12)$$

## 2.1. Безразмерная система уравнений

Обезразмерим систему уравнений (10). Введём следующие единицы измерения – длины  $L$ , времени  $L^2/D$ , скорости  $\phi D/L$ , мобильной фазы концентрации  $C_0$ , немобильной фазы концентрации  $Q_0$ , проницаемости  $\gamma$ , давления  $P_+ + P_-$ . Тогда (10) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( c + \frac{\zeta}{C_0} q \right) - \zeta \frac{\partial (qc)}{\partial t} &= (1 - \zeta q) \Delta c - \\ &- \zeta (\nabla q \cdot \nabla c) - \mathbf{u} \cdot \nabla c, \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= a(1 - q)c - bq, \\ \mathbf{u} &= -\kappa(\phi)(Pe\nabla p + Rpce_x), \quad \mathbf{e}_x = \{1, 0\}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \kappa(\phi) &= \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}, \quad \phi = \phi_0(1 - \zeta q). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь введены следующие безразмерные параметры: диффузионный аналог числа Пекле  $Pe = \gamma(P_+ + P_- - \rho_0 g L)/\eta D \phi_0$ , число Релея–Дарси  $Rp = \gamma \rho_0 g \beta_C C_0 L / \eta D \phi_0$ , коэффициент закупорки  $\zeta = Q_0/\phi_0$ , коэффициент адсорбции  $a = \alpha C_0 L^2/D$ , и коэффициент десорбции  $b = \alpha K_d L^2/D$ .

Система уравнений (13) в приближении слабой закупорки ( $\zeta \ll 1$ ) [2] будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( c + \frac{\zeta}{C_0} q \right) &= \Delta c - \mathbf{u} \cdot \nabla c, \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= a(1 - q)c - bq, \\ \mathbf{u} &= -\kappa(\phi)(Pe\nabla p + Rpce_x), \quad \mathbf{e}_x = \{1, 0\}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \kappa(\phi) &= \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}, \quad \phi = \phi_0(1 - \zeta q). \end{aligned} \quad (14)$$

Задача решается в двумерной постановке:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \kappa(\phi) R_p c \frac{\partial c}{\partial x} + \\ &+ \kappa(\phi) Pe \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} \right) - \frac{\zeta}{C_0} \frac{\partial q}{\partial t}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = a(1 - q)c - bq, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - F(\phi) \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial y} \right) + \\ + \frac{Rp}{Pe} \left( \frac{\partial c}{\partial x} - F(\phi) c \frac{\partial q}{\partial x} \right) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где функции определены как

$$\begin{aligned} \kappa(\phi) &= \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}, \quad \phi = \phi_0(1 - \zeta q), \\ F(\phi) &= \zeta \frac{\phi_0}{\phi} \frac{(3-\phi)}{(1-\phi)}. \end{aligned}$$

С безразмерными граничными условиями, которые могут быть получены из (11). Для концентрации:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} + u_x c \Big|_{x=0} &= u_x \Big|_{x=0} f(t), \\ f(t) &= 1 - \theta(t - t^*), \\ \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=1} &= 0, \\ \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

для давления:

$$\begin{aligned} p(x=0) &= 1, \quad p(x=1) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0; \end{aligned} \quad (20)$$

Начальные условия: отсутствие какой-либо примеси внутри рабочей полости и линейный перепад давления:

$$\begin{aligned} c(x, y, t=0) &= 0, \quad q(x, y, t=0) = 0, \\ p(x, y, t=0) &= 1 - x. \end{aligned} \quad (21)$$

## 3. Метод решения задачи

Задача решается численно методом конечных разностей. Численная схема первого порядка точности по времени и второго порядка точности по пространству. Используется сетка размером  $(N+1) \times (M+1)$  с шагами  $x_i = i \cdot h_x$ ,  $i=0, N$ ;  $y_j = j \cdot h_y$ ,  $j=0, M$ ;  $t_k = k \cdot \tau$ ,  $k=0, K$ ;  $h_x = 1/N$ ,  $h_y = h_x$ ,  $\tau = 1/K$ . Таким образом, поля основные неизвестных величин в дискретном виде можно записать:

$$\begin{aligned} c(x_i, y_j, t_k) &= c_{i,j}^k, \quad q(x_i, y_j, t_k) = q_{i,j}^k, \\ p(x_i, y_j, t_k) &= p_{i,j}^k \end{aligned} \quad (22)$$

Для решения уравнения (15) использовался метод переменных направлений [13]. Для решения на  $k + 1/2$  шаге по времени, решалась следующая система:

$$\begin{aligned} A_{i,j}^k c_{i-1,j}^{k+1/2} + B_{i,j}^k c_{i,j}^{k+1/2} + C_{i,j}^k c_{i+1,j}^{k+1/2} &= F_{i,j}^k, \\ i = 1..N-1, \quad j = 1..M-1, \end{aligned} \quad (23)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} A_{i,j}^k &= -\frac{\tau}{2h_x^2} + \frac{\kappa_{i,j}^k \text{Pe} \tau}{2} \frac{p_{i+1,j}^k - p_{i-1,j}^k}{4h_x^2} + \frac{\text{Rp} \tau}{4h_x} \kappa_{i,j}^k c_{i,j}^k, \\ B_{i,j}^k &= 1 + \frac{\tau}{h_x^2} + \frac{\zeta}{C_0} \frac{a\tau}{1 + (ac_{i,j}^k + b)\frac{\tau}{2}}, \\ C_{i,j}^k &= -\frac{\tau}{2h_x^2} - \frac{\kappa_{i,j}^k \text{Pe} \tau}{2} \frac{p_{i+1,j}^k - p_{i-1,j}^k}{4h_x^2} \\ &\quad - \frac{\text{Rp} \tau}{4h_x} \kappa_{i,j}^k c_{i,j}^k, \\ F_{i,j}^k &= \left( \frac{\tau}{2h_y^2} + \frac{\kappa_{i,j}^k \text{Pe} \tau}{2} \frac{p_{i,j+1}^k - p_{i,j-1}^k}{4h_y^2} \right) c_{i,j+1}^k + \\ &\quad + \left( 1 - \frac{\tau}{h_y^2} \right) c_{i,j}^k + \frac{\zeta}{C_0} \frac{(ac_{i,j}^k + b)\frac{\tau}{2}}{1 + (ac_{i,j}^k + b)\frac{\tau}{2}} q_{i,j}^k + \\ &\quad + \left( \frac{\tau}{2h_y^2} - \frac{\kappa_{i,j}^k \text{Pe} \tau}{2} \frac{p_{i,j+1}^k - p_{i,j-1}^k}{4h_y^2} \right) c_{i,j-1}^k. \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнение на  $k+1$  шаге по времени

$$\begin{aligned} A_{i,j}^k c_{i,j-1}^{k+1} + B_{i,j}^k c_{i,j}^{k+1} + C_{i,j}^k c_{i,j+1}^{k+1} &= F_{i,j}^k, \\ i = 1..N-1, \quad j = 1..M-1, \end{aligned} \quad (25)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} A_{i,j}^k &= -\frac{\tau}{2h_y^2} + \frac{\kappa(\phi) \text{Pe} \tau}{2} \frac{p_{i,j+1}^k - p_{i,j-1}^k}{4h_y^2}, \\ B_{i,j}^k &= 1 + \frac{\tau}{h_y^2} - \kappa(\phi) \text{Rp} \tau \frac{(c_{i+1,j}^{k+1/2} - c_{i-1,j}^{k+1/2})}{4h_x} + \\ &\quad + \frac{\zeta}{C_0} \frac{a\tau}{1 + (ac_{i,j}^k + b)\tau}, \\ C_{i,j}^k &= -\frac{\tau}{2h_y^2} - \frac{\kappa(\phi) \text{Pe} \tau}{2} \frac{p_{i,j+1}^k - p_{i,j-1}^k}{4h_y^2}, \\ F_{i,j}^k &= \left( \frac{\tau}{2h_x^2} + \frac{\kappa(\phi) \text{Pe} \tau}{2} \frac{p_{i+1,j}^k - p_{i-1,j}^k}{4h_x^2} \right) c_{i+1,j}^{k+1/2} + \\ &\quad + \left( 1 - \frac{\tau}{h_x^2} + \frac{\zeta}{C_0} \frac{a\frac{\tau}{2}}{1 + (ac_{i,j}^k + b)\frac{\tau}{2}} \right) c_{i,j}^{k+1/2} + \\ &\quad + \left( \frac{\tau}{2h_x^2} - \frac{\kappa(\phi) \text{Pe} \tau}{2} \frac{p_{i+1,j}^k - p_{i-1,j}^k}{4h_x^2} \right) c_{i-1,j}^{k+1/2} + \\ &\quad + \frac{\zeta}{C_0} \frac{(ac_{i,j}^k + b)\frac{\tau}{2}}{\left( 1 + (ac_{i,j}^k + b)\tau \right) \left( 1 + (ac_{i,j}^k + b)\frac{\tau}{2} \right)} q_{i,j}^k. \end{aligned} \quad (26)$$

Уравнения (23) и (25) решаются методом диагональной прогонки [13].

Уравнение для иммобилльной фазы концентрации (16) в конечно-разностной форме (неявная схема):

$$q_{i,j}^{k+1} = \frac{a\tau c_{i,j}^{k+1} + q_{i,j}^k}{1 + (ac_{i,j}^k + b)\tau}.$$

Метод Ричардсона [14] относится к схемам явного типа и применяется для решений уравнений эллиптического типа. Уравнение (17) решалось в рамках метода Ричардсона. В дискретной форме может быть записано как:

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{m+1} &= \left( 1 - \delta \left( \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \right) \right) P_{i,j}^m + \delta f_{i,j}^k + \\ &\quad + \delta \left( H_x^- p_{i+1,j}^m + H_x^+ p_{i-1,j}^m + H_y^- p_{i,j+1}^m + H_y^+ p_{i,j-1}^m \right), \\ H_x^- &= \frac{1}{h_x^2} - F_{i,j}^k \frac{q_{i+1,j}^k - q_{i-1,j}^k}{4h_x^2}, \\ H_x^+ &= \frac{1}{h_x^2} + F_{i,j}^k \frac{q_{i+1,j}^k - q_{i-1,j}^k}{4h_x^2}, \\ H_y^- &= \frac{1}{h_y^2} - F_{i,j}^k \frac{q_{i,j+1}^k - q_{i,j-1}^k}{4h_y^2}, \\ H_y^+ &= \frac{1}{h_y^2} + F_{i,j}^k \frac{q_{i,j+1}^k - q_{i,j-1}^k}{4h_y^2}, \\ f_{i,j}^k &= \frac{\text{Rp}}{\text{Pe}} \left( \frac{c_{i+1,j}^k - c_{i-1,j}^k}{2h_x} - F_{i,j}^k c_{i,j}^k \left( \frac{q_{i+1,j}^k - q_{i-1,j}^k}{2h_x} \right) \right), \\ F_{i,j}^k &= \frac{\zeta}{(1 - \zeta q_{i,j}^k)} \frac{3 - \phi_0(1 - \zeta q_{i,j}^k)}{1 - \phi_0(1 - \zeta q_{i,j}^k)}. \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\delta$  – шаг по фиктивному времени. Для расчёта принято  $\delta = h_x^2/4$ . Итерационный процесс идёт до выполнения условия:

$$\left| \frac{P_{i,j}^{m+1} - P_{i,j}^m}{P_{i,j}^m} \right| < \varepsilon, \quad P_{i,j}^m \neq 0. \quad (28)$$

Границные условия в конечно-разностной форме для концентрации:

$$\begin{aligned} c_{0,j}^{k+1/2} &= \\ &= \frac{-\kappa(\phi_{0,j}^k) (\text{Pe}(p_{1,j}^k - p_{0,j}^k) + h_x \text{Rp} f^k) f^k + c_{1,j}^{k+1/2}}{1 - \kappa(\phi_{0,j}^k) (\text{Pe}(p_{1,j}^k - p_{0,j}^k) + h_x \text{Rp} c_{0,j}^k)}, \end{aligned}$$

$$j = 0..M,$$

$$f^k = \begin{cases} 1, k \leq k^* \\ 0, k > k^* \end{cases}$$

$$c_{N,j}^k = c_{N-1,j}^k, \quad j = 0..M,$$

$$c_{i,M}^k = c_{i,M-1}^k, \quad i = 1..N,$$

$$c_{i,0}^k = c_{i,1}^k, \quad i = 1..N,$$

для давления:

$$\begin{aligned} p_{0,j}^k &= 1, \quad p_{N,j}^k = 0, \quad j = 0..M, \\ p_{i,0}^k &= p_{i,1}^k, \quad p_{i,M}^k = p_{i,M-1}^k, \quad i = 1..N-1. \end{aligned} \quad (29)$$

Начальные условия ( $k=0$ )

$$\begin{aligned} c(x_i, y_j, t_0 = 0) &= c_{i,j}^0 = 0, \\ q(x_i, y_j, t_0 = 0) &= q_{i,j}^0 = 0, \\ p(x_i, y_j, t_0 = 0) &= p_{i,j}^0 = 1 - i \cdot h_x \end{aligned} \quad (30)$$

Для расчётов использовалась квадратная сетка размером  $1001 \times 101$  узел, шаг сетки по пространству и времени:  $h_x = h_y = 0.001$ ,  $\tau = 1 \cdot 10^{-6}$ .

Время закачивания порции смеси в область  $t^*$  определяется по условию, что в область закачивается 10% от порового пространства внутри рабочей области.

#### 4. Результаты

Для оценки значений безразмерных параметров модели были взяты физические параметры из экспериментов по изучению транспорта растворённого вещества, в ходе которых через пористую колонну прокачивали порцию раствора хлорида натрия [4]. Длина пористой колонны  $L = 0.6$  м, в качестве несущей жидкости использовалась вода, плотность  $\rho_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, динамическая вязкость  $\eta = 10^{-3}$  Па·с. Коэффициент концентрационного объёмного расширения водного раствора хлорида натрия  $\beta_C = 1.55$ , массовая концентрация порции раствора равна 10 % (объёмная концентрация  $C_0 \approx 5\%$ ). Пористость  $\phi_0 = 0.48$  и проницаемость пористой среды  $k(\phi_0) = 2.5 \cdot 10^{-6}$  см<sup>2</sup> (кварцевый песок), по этим двум параметрам из формулы (7) может быть выражена и рассчитана константа Козени–Кармана, значение которой составило  $\gamma = 6.1 \cdot 10^{-6}$  см<sup>2</sup>. Некоторые параметры не могут быть измерены в эксперименте напрямую, однако их можно получить в ходе решения обратной задачи. Для модели (10) параметры были оценены в работе [5]. Таким образом, коэффициент распределения примеси  $K_d \approx 0.1$ , коэффициент переноса примеси  $a \approx 0.01$  с<sup>-1</sup>, коэффициент молекулярной диффузии  $D \approx 4 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>/с. Полученные значения безразмерных констант занесены в таблицу.

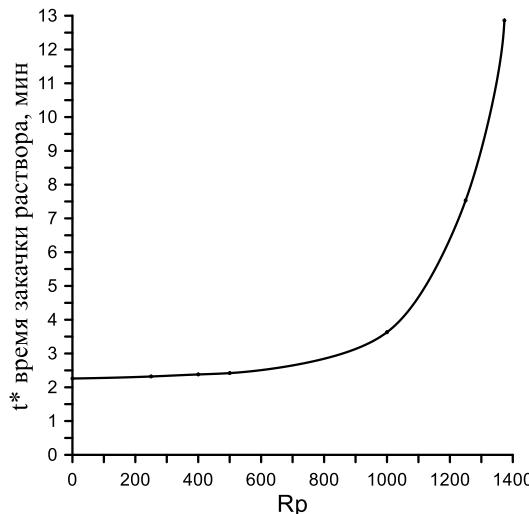
Числовые значения безразмерных параметров

Наименование	обозначение	значение
Диффузионное число Пекле	$Pe$	1580
Число Рэлея–Дарси	$Rp$	1370
Коэффициент адсорбции	$a$	438
Коэффициент десорбции	$b$	960
Коэффициент закупорки	$\zeta$	0.24

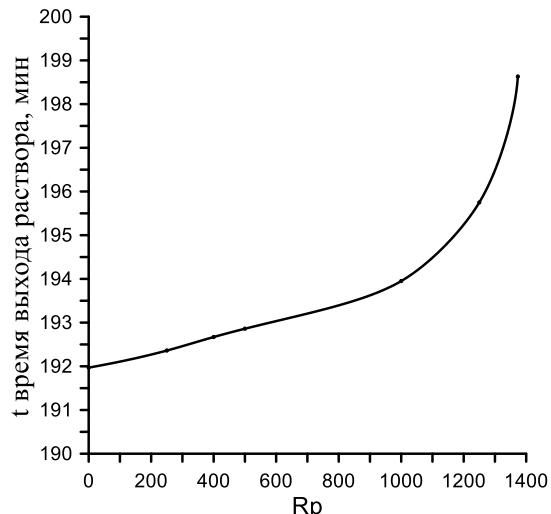
Полученные результаты моделирования приведены на рис. 2–8. На рисунке 2 показана зависимость времени закачивания порции раствора (фиксированного объёма) в рабочую область от числа Рэлея–Дарси. Видно, что при  $Rp < 800$  время меняется незначительно. Это связано с тем, что, как можно видеть на рис. 6, конвективное течение возникает ещё при подаче примеси в рабочую область и при малых значениях числа  $Rp$  оно слабо влияет на процесс закачки, определяющийся главным образом скоростью фильтрации, обусловленной перепадом давления. При  $Rp > 800$  интенсивность вихря растёт, и он начинает оказывать существенное влияние на скорость фильтрации, так как скорость на входе уменьшается, а время закачки увеличивается.

Рост числа Рэлея–Дарси приводит также к увеличению времени выхода примеси из области рис. 3 движение раствора вверх по колонне образует неустойчивую стратификацию, когда более тяжёлая жидкость оказывается над лёгкой, и это приводит к развитию неустойчивости Рэлея–Тейлора. В результате развивается концентрационная конвекция, по мере выхода примеси из области конвективное течение ослабевает, что тоже можно видеть на рис. 6. При этом снижение скорости фильтрации на входе значительнее, чем на выходе.

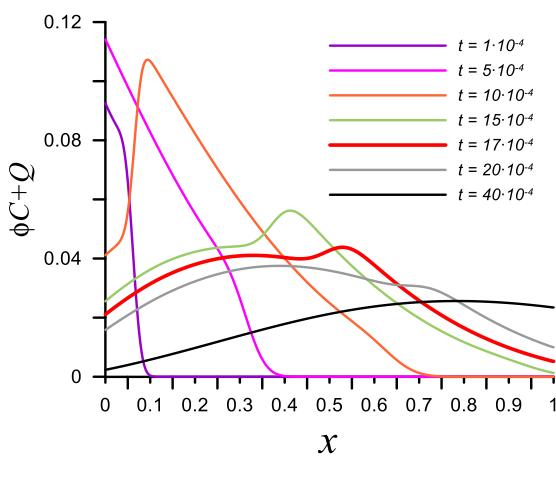
В рамках экспериментальных работ наиболее доступным методом измерения концентрации является кондуктометрия. При кондуктометрии измеряется величина силы тока между электродами, значение этой величины связано с проводимостью раствора. Проводимость раствора тем выше, чем выше концентрация ионов. В рамках классического MIM подхода подразумевается полная иммобилизация частиц примеси на стенках пор, в результате чего экспериментально определялась бы только мобильная фаза концентрации. Однако MIM подход не описывает конкретный механизм иммобилизации; внутри пористой среды скорость потока вблизи стенок меньше, чем в центральной части пор. Слой вблизи стенок обычно сильнее насыщен примесью (ионами). Таким образом, под мобильной фазой можно понимать слой медленно движущихся вдоль стенки ионов. Они не теряют подвижность, а концентрация их обычно выше, чем в потоке и, как следствие, они влияют на проводимость. Параметры сорбции в уравнении обмена в этом случае имитируют не физическую сорбцию, а переход ионов между пристеночными слоями с медленной скоростью и основного быстрого потока в поре. Это означает, что в эксперименте невозможно точно измерить соотношение между фазами подвижности примеси. При использовании методов кондуктометрии для полевых испытаний учитывают, что показания прибора зависят не только от концентрации солей, но и от влажности, гранулометрического состава, плотно-



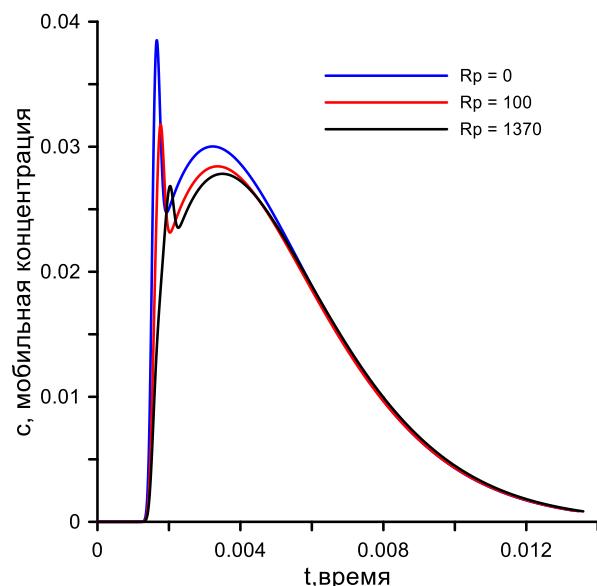
**Рис. 2.** Зависимость времени закачивания раствора фиксированного объема раствора в рабочую область от числа Рэлея–Дарси. Построено для параметров:  $Pe = 1580$ ,  $R_p = 1370$ ,  $a = 438$ ,  $b = 960$ ,  $\zeta = 0.24$ ,  $t^* = 8.48 \cdot 10^{-4}$



**Рис. 3.** Зависимость времени выхода раствора из рабочей области от числа Рэлея–Дарси. Построено для параметров:  $Pe = 1580$ ,  $R_p = 1370$ ,  $a = 438$ ,  $b = 960$ ,  $\zeta = 0.24$ ,  $t^* = 8.48 \cdot 10^{-4}$



**Рис. 4.** Распределение средней полной концентрации вдоль оси  $x$  в различные моменты времени. Построено для параметров:  $Pe = 1580$ ,  $R_p = 1370$ ,  $a = 438$ ,  $b = 960$ ,  $\zeta = 0.24$ ,  $t^* = 8.48 \cdot 10^{-4}$

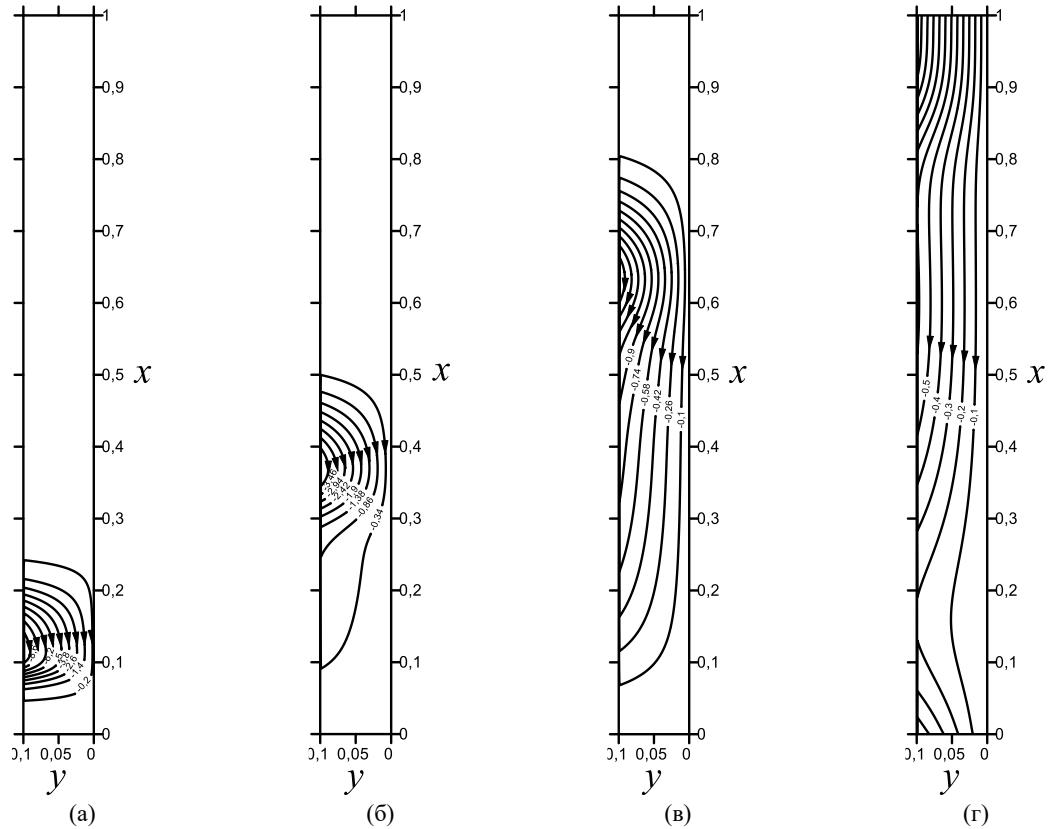


**Рис. 5.** Зависимость средней концентрации мобильной фазы на выходе из области от времени для различных значений числа Рэлея–Дарси. Построено для параметров:  $Pe = 1580$ ,  $R_p = 1370$ ,  $a = 438$ ,  $b = 960$ ,  $\zeta = 0.24$ ,  $t^* = 8.48 \cdot 10^{-4}$

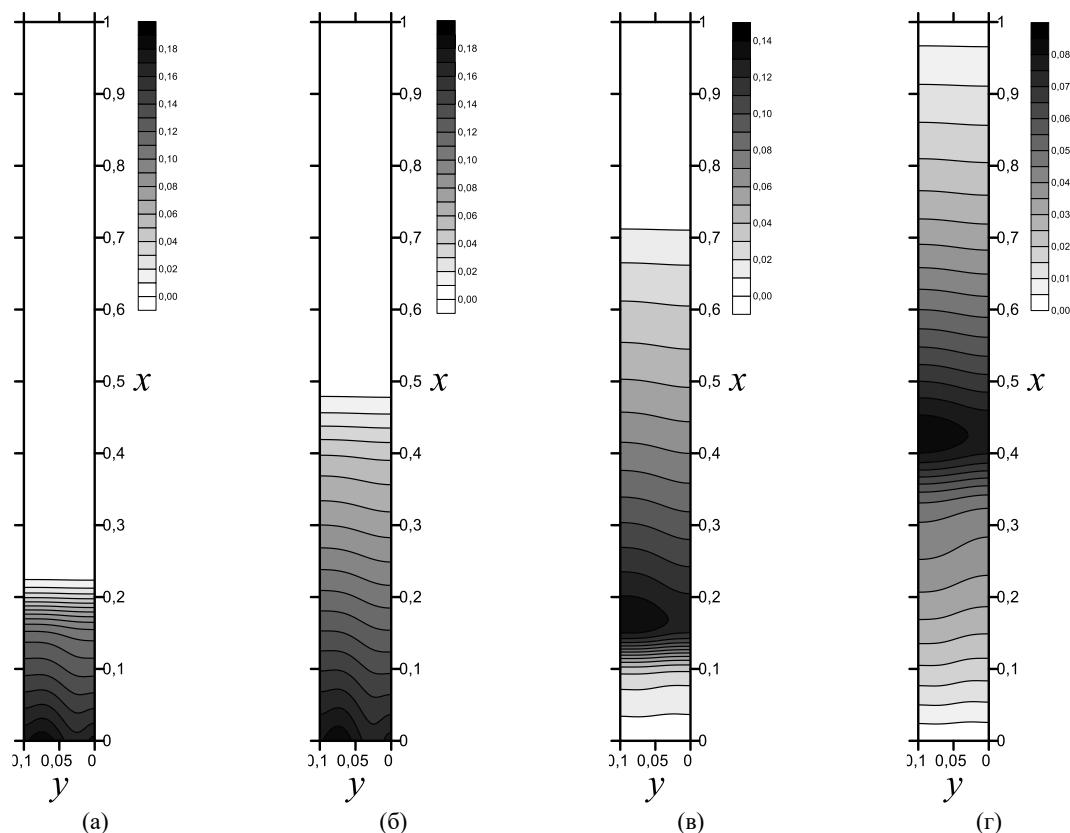
сти и температуры почвы. Электропроводность почвы обусловлена тремя путями прохождения тока: через почвенный раствор, через обменные катионы на глинистых частицах и через непосредственный контакт твёрдых частиц. Подробнее методы кондуктометрии и её особенности описаны в обзорной статье [15]. В связи с этим для сравнения в работе приводится средняя полная концентрация, учитывающая как мобильную, так и иммобилльную фазы (рис. 4).

На рисунке 4 представлены мгновенные профили средней полной концентрации (учитываю-

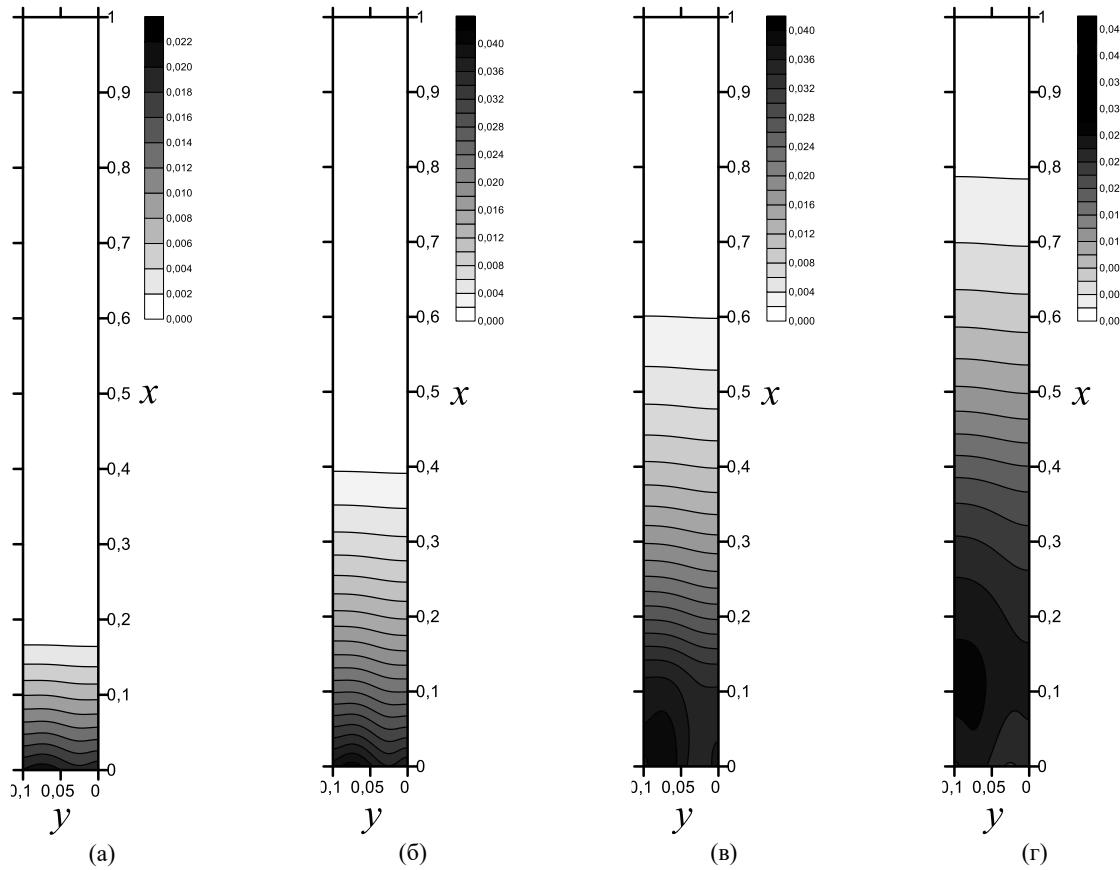
щие вклад обеих фаз) вдоль колонны. Видно, что пик концентрационного импульса движется по направлению потока и размывается, в момент времени  $t = 17 \cdot 10^{-4}$  на профиле образуется два выпуклых участка. Эти участки обусловлены максимумами концентрационных импульсов в мобильной и иммобилльной фазах, когда в дальнейшем мобильная примесь покидает область, остаётся только концентрационный импульс иммобилльной фазы. Эволюция профиля концентрации мобильной фазы представлена на рис. 7, иммобилльной – на рис. 8. За счёт снижения скорости примесь в обеих



**Рис. 6.** Функция тока для различных моментов времени а)  $t=3 \cdot 10^{-4}$ , б)  $t=7 \cdot 10^{-4}$ , в)  $t=11 \cdot 10^{-4}$ , г)  $t=15 \cdot 10^{-4}$ . Построено для параметров:  $Pe = 1580$ ,  $Rp = 1370$ ,  $a = 438$ ,  $b = 960$ ,  $\zeta = 0.24$ ,  $t^* = 8.48 \cdot 10^{-4}$



**Рис. 7.** Поле мобильной фазы концентрации  $c(x,y,t)$  для различных моментов времени а)  $t=3 \cdot 10^{-4}$ , б)  $t=7 \cdot 10^{-4}$ , в)  $t=11 \cdot 10^{-4}$ , г)  $t=15 \cdot 10^{-4}$ . Построено для параметров:  $Pe = 1580$ ,  $Rp = 1370$ ,  $a = 438$ ,  $b = 960$ ,  $\zeta = 0.24$ ,  $t^* = 8.48 \cdot 10^{-4}$



**Рис. 8.** Поле иммобилной фазы концентрации  $q(x,y,t)$  для различных моментов времени а)  $t=3 \cdot 10^{-4}$ , б)  $t=7 \cdot 10^{-4}$ , в)  $t=11 \cdot 10^{-4}$ , г)  $t=15 \cdot 10^{-4}$ . Построено для параметров:  $Pe = 1580$ ,  $Rp = 1370$ ,  $a = 438$ ,  $b = 960$ ,  $\zeta = 0.24$ ,  $t^* = 8.48 \cdot 10^{-4}$

фазах концентрируется вблизи входа в область, после прекращения процесса подачи раствора фильтрационный поток начинает сносить их к выходу. Мобильная фаза, ожидаемо, опережает иммобилную, которая перемещается за счёт «фазового перехода». Растворённое вещество может снова начать движение из-за процесса десорбции.

На рисунке 5 приведены кривые прорыва – зависимости мобильной фазы концентрации на выходе из области от времени (так как покинуть область вместе с несущей жидкостью может только мобильная фаза). Можно видеть, что увеличение числа Рэлея–Дарси приводит к уменьшению левого пика концентрации. Этот пик связан с мобильной фазой, его уменьшение обусловлено увеличением интенсивности концентрационной конвекции. Концентрационный импульс размывается вихревым течением. Вид профиля незначительно меняется за исключением левого пика, связанного с течением несущей жидкости, второй пик соответствует выходу иммобилной фазы поэтому можно предполагать, что профиль будет сильно зависеть от параметров сорбции, что скажется и на времени выхода.

## 5. Заключение

Решена задача о вертикальной фильтрации конечного объёма смеси через массив пористой среды при прокачке смеси снизу-вверх. Было показано, что для рассматриваемых параметров в системе развивается концентрационная конвекция, причиной возникновения которой является неустойчивость Рэлея–Тейлора. Получена эволюция полей концентрации мобильной и иммобилной фазы концентрации, а также поле возмущений функции тока, демонстрирующие развитие конвективного течения. Данна интерпретация образования двух максимумов (наблюдаемых также экспериментально) у среднего профиля полной концентрации в рамках МИМ подхода. Исследовано влияние конвективного течения на процесс введения порции в рабочую область и время выхода из области, в обоих случаях с ростом числа Рэлея–Дарси время растёт.

Работа выполнена в рамках государственного задания, регистрационные номера тем 124021600038-9, 121031700169-1.

## Список литературы

1. Maryshev B. S., Khabin M. R., Evgrafova A. V. Identification of transport parameters for the solute filtration through porous media with clogging // Journal of Porous Media. 2023. Vol. 26, № 6. P. 31–53.
2. Хабин М. Р., Марышев Б. С. Идентификация параметров транспорта примеси через пористую среду с учётом закупорки // Вестник Пермского университета. Физика. 2021. № 3. С. 44–55.
3. Evgrafova A. E., Kolchanova E. A., Maryshev B. S. Solute transport in a horizontal porous layer at a high solute concentration // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 2057, № 1, 012031.
4. Belyaeva A. V. Maryshev B. S. Effect of bulk flow pulsation on the filtering process for porous columns with different permeability // Microgravity Science and Technology. 2025. Vol. 37, № 2, 15.
5. Belyaeva A., Maryshev B. Impact of variable hydraulic gradient on filtering process // Journal of Porous Media. 2026. Vol. 29, № 1. P. 101–117.
6. Maryshev B. S., Klimenko L. S., Kolchanov N. V. Stability of one-dimensional vertical flow through a porous domain under pumping of a finite volume of impurity // Microgravity Science and Technology. 2024. Vol. 36, № 1, 10.
7. Maryshev B. S., Klimenko L. S. Cleaning porous media by an external vertical flow // Acta Mechanica. 2023. Vol. 234, № 8. P. 3305–3320.
8. Deans H. A. A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media // Society of Petroleum Engineers Journal. 1963. Vol. 3, № 01. P. 49–52.
9. van Genuchten M. Th., Wierenga P. J. Mass transfer studies in sorbing porous media I. Analytical solutions // Soil Science Society of America Journal. 1976. Vol. 40, № 4. P. 473–480.
10. Selim H. M. Prediction of contaminant retention and transport in soils using kinetic multireaction models // Environmental Health Perspectives. 1989. Vol. 83. P. 69–75.
11. Carman P. C. Fluid flow through a granular bed. // Trans. Inst. Chem. Eng. London. 1937. Vol. 15. P. 150–156.
12. Nield D. A., Bejan A., Convection in Porous Media. New York: Springer, 2017. 801 p.
13. Simoncini V. Computational methods for linear matrix equations // SIAM Review. 2016. Vol. 58, № 3. P. 377–441.
14. Roache P. J. Computational Fluid Dynamics, Albuquerque: Hermosa Publishers, 1972. 434 p.
15. Corwin D. L., Lesch S. M. Apparent soil electrical conductivity measurements in agriculture // Computers and Electronics in Agriculture. 2005. Vol. 46, № 1–3. P. 11–43.

## References

1. Maryshev B. S., Khabin M. R., Evgrafova A. V. Identification of transport parameters for the solute filtration through porous media with clogging. *Journal of Porous Media*, 2023, vol. 26, no. 6, pp. 31–53.
2. Khabin M. R., Maryshev B. S. Identification of the parameters of transport through porous media with clogging. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2021, no. 3, pp. 44–55.
3. Evgrafova A. E., Kolchanova E. A., Maryshev B. S. Solute transport in a horizontal porous layer at a high solute concentration. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 2057, no. 1, 012031.
4. Belyaeva A. V. Maryshev B. S. Effect of bulk flow pulsation on the filtering process for porous columns with different permeability. *Microgravity Science and Technology*, 2025, vol. 37, no. 2, 15.
5. Belyaeva A., Maryshev B. Impact of variable hydraulic gradient on filtering process. *Journal of Porous Media*, 2026, vol. 29, no. 1, pp. 101–117.
6. Maryshev B. S., Klimenko L. S., Kolchanov N. V. Stability of one-dimensional vertical flow through a porous domain under pumping of a finite volume of impurity. *Microgravity Science and Technology*, 2024, vol. 36, no. 1, 10.
7. Maryshev B. S., Klimenko L. S. Cleaning porous media by an external vertical flow. *Acta Mechanica*, 2023, vol. 234, no. 8, pp. 3305–3320.
8. Deans H. A. A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 1963, vol. 3, no. 01, pp. 49–52.
9. van Genuchten M. Th., Wierenga P. J. Mass transfer studies in sorbing porous media I. Analytical solutions. *Soil Science Society of America Journal*, 1976, vol. 40, no. 4. pp. 473–480.
10. Selim H. M. Prediction of contaminant retention and transport in soils using kinetic multireaction models. *Environmental Health Perspectives*, 1989, vol. 83, pp. 69–75.
11. Carman P. C. Fluid flow through a granular bed, *Trans. Inst. Chem. Eng. London*, 1937, vol. 15, pp. 150–156.
12. Nield D. A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. New York: Springer, 2017. 801 p.
13. Simoncini V. Computational methods for linear matrix equations. *SIAM Review*, 2018, vol. 58, no. 3, pp. 377–441.
14. Roache P. J. *Computational Fluid Dynamics*, Albuquerque: Hermosa Publishers, 1972. 434 p.
15. Corwin D. L., Lesch S. M. Apparent soil electrical conductivity measurements in agriculture. *Computers and Electronics in Agriculture*, 2005, vol. 46, no. 1–3, pp. 11–43.

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Хабин М. Р., Марышев Б. С. Моделирование транспорта конечного объёма примеси через вертикальную пористую колонну // Вестник Пермского университета. Физика. 2025. № 4. С. 5–15. doi: 10.17072/1994-3598-2025-4-05-15

**Please cite this article in English as:**

Khabin M. R., Maryshev B. S. Modeling the transport of the finite volume of impurity in a vertical porous column. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2025, no. 4, pp. 5–15. doi: 10.17072/1994-3598-2025-4-05-15

**Сведения об авторах**

1. *Михаил Романович Хабин*, аспирант, инженер-исследователь, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королёва, 1, Пермь, 614013; инженер, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614068.
2. *Борис Сергеевич Марышев*, канд. физ-мат. наук, н.с., Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королёва, 1, Пермь, 614013; доцент, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614068.

**Author information**

1. *Mikhail R. Khabin*, Postgraduate Student, Research Engineer, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia; Engineer, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia.
2. *Boris S. Maryshev*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia; Associate Professor, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia.