

УДК 622.253.3; 539.42
PACS 62.20.–x

Расчет толщины ледопородного ограждения в условиях высоких внешних нагрузок

Д. Р. Поспелов^{1,2†}, М. А. Сёмин^{1,2‡}

¹ Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

² Горный Институт Уральского отделения Российской Академии Наук, Пермь

† dmitriy-pospelov@bk.ru

‡ seminma@inbox.ru

На практике, для расчёта необходимой толщины ледопородных ограждений (ЛПО) по критерию предельной прочности обычно применяются формулы, выведенные на основе критерия прочности Мора–Кулона (МК). Применение таких формул для расчёта толщины ЛПО в обводнённых горных породах на больших глубинах замораживания может быть сопряжено с существенными ошибками, связанными с влиянием нелинейности огибающей предельных кругов Мора. В рамках настоящей работы проведен анализ функционального вида нелинейных зависимостей максимального касательного напряжения (соответствующего предельному состоянию) от среднего нормального напряжения для различных типов пород, проведена классификация горных пород (песок, глина, алевроит), исходя из функционального вида аппроксимирующих формул для нелинейности огибающей предельных кругов Мора. На примере алевроита при -6°C построено численное решение задачи о предельном напряженном состоянии ЛПО при различных величинах нагрузки, действующей на внешнюю стенку ЛПО. Это решение было сопоставлено с классическим решением С. С. Вялова, в результате чего определены условия и границы применимости классических формул по расчёту толщины ЛПО на основании линейного критерия МК. Была выведена новая формула толщины ЛПО от внешней нагрузки на ЛПО, учитывающая нелинейное поведение огибающей предельных кругов Мора.

Ключевые слова: искусственное замораживание пород; ледопородное ограждение; горное давление; несущая способность; критерий Мора–Кулона

Поступила в редакцию 24.07.2025; после рецензии 13.09.2025; принята к опубликованию 13.09.2025

Calculation of the freeze wall thickness under high external loads

D. R. Pospelov^{1,2†}, M. A. Semin^{1,2‡}

¹ Perm State University, Perm, Russia

² Mining Institute UB RAS, Perm, Russia

† dmitriy-pospelov@bk.ru

‡ seminma@inbox.ru

In practice, the required thickness of freeze walls (FWs) is typically calculated using formulas based on the Mohr–Coulomb (MC) strength criterion. However, applying such formulas to determine FW thickness in water-saturated rocks at great freezing depths may lead to significant errors due to the nonlinearity of the failure envelope of Mohr’s circles. This study analyzes the functional form of nonlinear relationships between the maximum shear stress (corresponding to the failure state) and the mean normal stress for various rock types. A classification of rocks (sand, clay, siltstone) is proposed based on the functional form of the approximating formulas representing the nonlinear failure envelope of Mohr’s circles. A numerical solution was obtained for the limit stress state of an FW in siltstone at -6°C under varying external loads applied to the outer wall of the

FW. This solution was compared with the classical solution by S. S. Vyalov; as a result, we have identified the conditions and boundaries within which classical FW thickness formulas, based on the linear MC criterion, remain valid. A new formula was derived for determining FW thickness under external load with taking into account the nonlinear behavior of the failure envelope of Mohr's circles.

Keywords: artificial ground freezing; freeze wall; confining pressure; bearing capacity; Mohr-Coulomb criterion

Received 24 July 2025; revised 13 September 2025; accepted 13 September 2025

doi: 10.17072/1994-3598-2025-3-53-60

1. Введение

Способ искусственного замораживания широко используется при строительстве шахтных стволов во влажных и неустойчивых массивах горных пород. В ходе его применения породный массив замораживается до температуры ниже температуры кристаллизации поровой воды, в результате чего получается ледопородное ограждение (или ЛПО). ЛПО выполняет функции гидроизоляции и временной крепи на время строительства горной выработки до возведения постоянной бетонной крепи [1, 12].

Одной из первостепенных задач является расчёт толщины ЛПО, при которой обеспечивается его надлежащая прочность и гидроизоляция. Желательно добиться минимума временных и финансовых затрат для его образования. Это возможно только тогда, когда будет применяться адекватная модель термомеханических процессов в замороженных породах на всем интервале замораживания. Такая модель позволит предупредить возможное перемораживание верхних слоёв и опасное недомораживание глубоко лежащих слоёв.

В настоящее время расчёт толщины ЛПО по критерию предельной прочности проводится на базе уравнений равновесия круглого ледопородного цилиндра в комплексе с прочностным критерием Мора–Кулона (МК) [13]. Последний может быть записан в виде:

$$\tau = c + \sigma_m \operatorname{tg} \varphi, \quad (1)$$

где τ есть максимальная величина касательных напряжений, соответствующих предельному состоянию ЛПО, Па; σ_m – средняя величина напряжений всестороннего сжатия, Па; c – внутреннее сцепление замороженной породы, Па; φ – угол внутреннего трения замороженной породы, рад.

Вялов С. С. в монографии [1] вывел формулы (2), (3), связывающие геометрические размеры ледопородного цилиндра с величиной нагрузки p на его внешнюю стенку:

$$\frac{b}{a} = \left[p \frac{1-\Lambda}{\bar{\Lambda}} + 1 \right]^{1/(1-\Lambda)}, \quad (2)$$

$$\Lambda = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right), \quad \bar{\Lambda} = 2c \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (3)$$

Согласно этим формулам, геометрические размеры ледопородного цилиндра (точнее, отношение внешнего радиуса цилиндра b , м к внутреннему радиусу a , м) зависят от внешней нагрузки p , Па. Формулы (2) и (3) характеризуют ситуацию, когда ЛПО переходит в предельное равновесное состояние. Важным следствием формулы Вялова является формула Либермана (4). Она получается решением уравнения равновесия ледопородного цилиндра в паре с критерием прочности $\tau = c$ (условие идеальной пластичности) или устремлением угла внутреннего трения в формуле Вялова к нулю:

$$\frac{b}{a} = \exp \left(\frac{p}{\Lambda} \right). \quad (4)$$

Несмотря на повсеместное использование формул (2)–(3), основанных на линейной форме огибающей предельных кругов Мора, результаты многочисленных исследований на трёхосное сжатие образцов замороженных пород демонстрировали нелинейную связь между максимальным касательным напряжением τ и средним нормальным напряжением σ_m . Этот эффект возникал тогда, когда величина σ_m в ходе экспериментов превышала 6–12 МПа [2–9]. Кроме того, величины границ данного диапазона существенно зависели от температуры и типа горной породы. Например, нижняя граница указанного диапазона в большей степени соответствует глинам [8, 10], а верхняя – пескам [4, 9]. На больших глубинах (более 500 м) суммарное горное и гидростатическое давление обычно достаточно велико, чему соответствуют высокие внешние нагрузки величиной от 6 МПа.

Таким образом, критерий МК ограничен в применении случаями, при которых зависимость τ_m от σ_m можно считать линейной. Вместе с этим, на данный момент отсутствуют инженерные методы расчета толщины ЛПО в зависимости от горного давления, которому соответствует нелинейная огибающая кругов Мора $\tau(\sigma_m)$. Целью данной работы является анализ влияния нелинейности огибающей предельных кругов на расчетные значения толщин ЛПО и разработка расчетного метода для определения толщин ЛПО при высоких значениях внешних нагрузок, воздействующих на ЛПО, с учетом нелинейной формы этой огибающей. Для получения новой формулы будет проведено численное решение уравнения равновесия ледопород-

ного цилиндра с критерием прочности, учитывающим нелинейную форму огибающей предельных кругов $\tau(\sigma_m)$. Выбор прочностного критерия в данной работе произведен на основе литературных данных.

2. Анализ функциональных зависимостей для огибающей предельных кругов Мора

В работах [2–11] рассматривалась прочность замороженных пород при высоких давлениях всестороннего сжатия, исследовалась применимость разных критериев прочности (МК, Друкер–Прагер и пр.). Поэтому графический вид огибающей предельных кругов Мора в этих работах приводится в различных координатах. Наиболее распространёнными являются два варианта записи. Один из них основан на записи через максимальное σ_1 и минимальное σ_3 главные напряжения, т.е. $\sigma_3(\sigma_1)$. Частным случаем является прямое задание огибающей предельных кругов $\tau(\sigma_m)$, где $\tau = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, а $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Другой вариант основан на записи через первый инвариант тензора напряжений I_1 и второй инвариант девиатора тензора напряжений J_2 . Однако в литературе вместо самих инвариантов применяются их аналоги p и q [7], которые выражаются через инварианты I_1 и J_2 по формулам (5) и (6):

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3}, \quad (5)$$

$$2q^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2. \quad (6)$$

Предполагается, что механические и прочностные свойства замороженных пород являются однородными и изотропными. Естественное поле напряжений в массиве пород подчиняется условию $\sigma_2 = \sigma_3$ [5]. Тогда имеем:

$$p = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3}, \quad q = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (7)$$

Наиболее интересными являются нелинейные аппроксимации огибающей предельных кругов через степенные и экспоненциальные зависимости.

В работе [2] была предложена степенная аппроксимация кривой $\tau(\sigma_m)$ для алевроитов, которую можно переписать в виде:

$$\tau = A(B + \sigma_m)^n, \quad A, B > 0, \quad 0 < n < 1. \quad (8)$$

При n , равном единице, выражение (8) сводится к линейному прочностному критерию МК. Проблема аппроксимации (8) состоит в том, что она является монотонно-возрастающей и не отражает эффект снижения τ с ростом σ_m , наблюдаемый в опытах [2].

В экспоненциальной аппроксимации, предложенной в работе [7] был введен член, отвечающий за эффекты плавления и дробления порового льда. Одной из форм записи этой аппроксимации является формула (8):

$$\tau = B\sigma_m + A(2 - e^{n\sigma_m/\sigma_0}), \quad A, B > 0, \quad \sigma_0 = 1 \text{ Па}. \quad (9)$$

Нетрудно убедиться, что при $n = 0$ выражение (9) сводится к линейному критерию МК.

По итогу проведенного анализа литературных данных построен рис. 1, на котором представлены описанные в исследованиях [5, 7, 8, 10, 11] экспериментальные зависимости для трёх типов горных пород: алевроита, глины и песка. Анализ рисунка показывает наличие существенной нелинейности кривых $\tau(\sigma_m)$ для всех трёх рассмотренных типов геосред. Более того, многие эмпирические кривые в области больших σ_m демонстрируют изменение производной – возрастание зависимости $\tau(\sigma_m)$ сменяется ее убыванием. Это говорит о том, что для функционального описания кривой $\tau(\sigma_m)$ классический критерий МК необходимо дополнить соотношением, учитывающим нелинейные эффекты (дробление льда и самой породы, плавление льда) при высоких значениях сжимающих напряжений σ_m .

Наиболее адекватной зависимостью для огибающей $\tau(\sigma_m)$ в данном случае является формула (9). Действительно, на рис. 2 и 3 представлены два способа аппроксимации для алевроита: по формуле (8) и по формуле (9) соответственно. Среднеквадратическое отклонение, рассчитанное при применении зависимости (9), оказалось меньше среднеквадратического отклонения для аппроксимации (8)

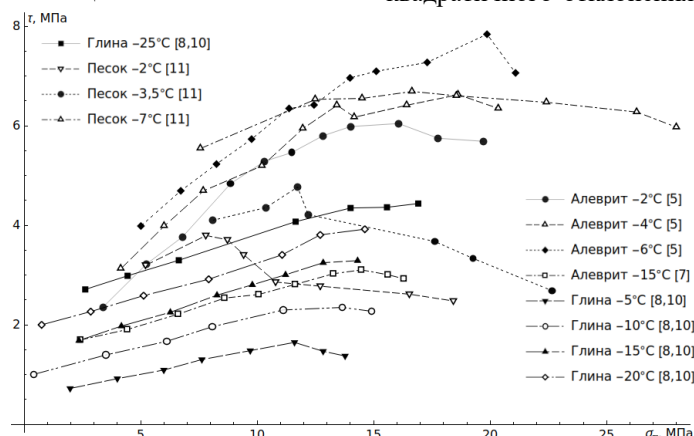


Рис. 1. Экспериментальные зависимости $\tau(\sigma_m)$ для алевроита, песка и глины

более чем в 4 раза. Кроме того, зависимость (9) адекватна в описании огибающей $\tau(\sigma_m)$ для глины и песка, что видно из рис. 4 и 5.

3. Постановка задачи о предельном напряжённом состоянии ледопородного цилиндра

Проведенный анализ экспериментальных данных убедительно показывает важность учета нелинейного поведения огибающей предельных кругов Мора для различных типов горных пород (алевроит, глина, песка). Дальнейший теоретический анализ, направленный на расчет требуемых толщин ЛПО, связан именно с такими типами пород.

Для получения зависимости толщины ЛПО от высокого внешнего давления требуется произвести решение уравнения равновесия круглого ледопородного цилиндра с условием прочности (9), то есть решить задачу Ламе [14] с нелинейным условием прочности (9). Пусть круглый ледопородный цилиндр, поперечное сечение которого изображено на рис. 6, имеет бесконечную протяженность, внешний радиус b и внутренний радиус a , причём на внешнюю стенку с радиусом b действует сжимающее давление $p = \text{const}$. На внутренней стенке ($r = a$) отсутствует нагрузка. Механические свойства ледопородного цилиндра полагаются однородными и изотропными. Это позволяет ограничиться случаем плоского деформированного состояния. Уравнение равновесия круглого ледопородного цилиндра в полярных координатах имеет вид [1,14]:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (10)$$

где $\sigma_r(r)$ – радиальные напряжения, Па, а $\sigma_\theta(r)$ – окружные напряжения, Па.

Условие предельной прочности (9) может быть переписано с использованием понятных параметров – сцепления c и угла внутреннего трения φ . Поскольку при $\sigma_m = 0$ величина τ должна быть равна c , а $d\tau/d\sigma = \tan \varphi$ [1], то условие прочности (9) переписывается в виде:

$$\tau = \left(\frac{cn}{\sigma_0} + \tan \varphi \right) \sigma_m + c \left(2 - e^{n\sigma_m/\sigma_0} \right), \quad (11)$$

$$c = A, \quad \tan \varphi = B - A \frac{n}{\sigma_0},$$

откуда выражаем A и B :

$$A = c, \quad B = \tan \varphi + \frac{cn}{\sigma_0}, \quad (12)$$

Таким образом, условие прочности (9) переписывается в виде:

$$\tau = \left(\frac{cn}{\sigma_0} + \tan \varphi \right) \sigma_m + c \left(2 - e^{n\sigma_m/\sigma_0} \right), \quad (13)$$

при этом между напряжениями τ, σ_m и σ_r, σ_θ имеют место соотношения [1]:

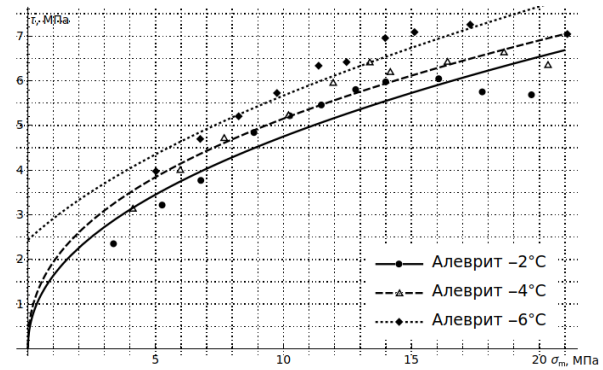


Рис. 2. Аппроксимация зависимости $\tau(\sigma)$ с использованием формулы (8), алевроит

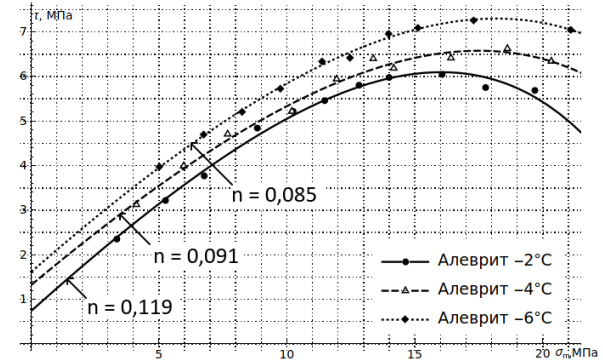


Рис. 3. Аппроксимация зависимости $\tau(\sigma)$ с использованием формулы (9) для алевроита

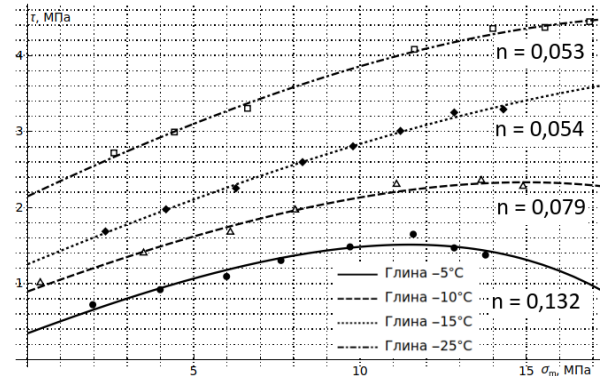


Рис. 4. Аппроксимация зависимости $\tau(\sigma)$ с использованием формулы (9) для глины

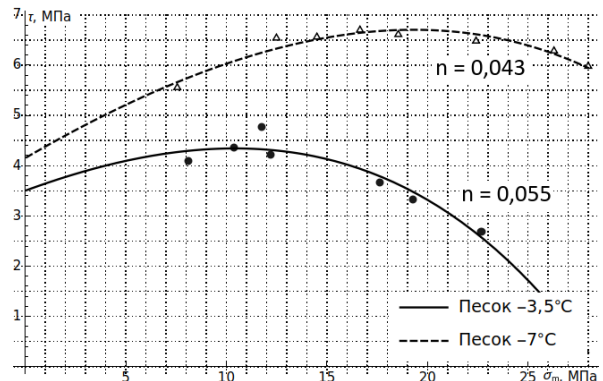


Рис. 5. Аппроксимация зависимости $\tau(\sigma)$ с использованием формулы (9) для песка

$$\sigma_r = \sigma_m + \tau \left(\operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{\cos \varphi} \right), \quad (14)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_m + \tau \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{\cos \varphi} \right), \quad (15)$$

или, выразив τ , σ_m из (14), (15):

$$\sigma_m = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sin \varphi (\sigma_r - \sigma_\theta)}{2}, \quad (16)$$

$$\tau = -\frac{1}{2} \cos \varphi (\sigma_r - \sigma_\theta). \quad (17)$$

Подставляя (16) и (17) в (13) с учётом (3), получается запись критерия прочности через напряжения σ_r, σ_θ :

$$\begin{aligned} \sigma_r \Lambda - \sigma_\theta + 2 = \\ = \bar{\Lambda} \left[\exp \left(n \frac{\sigma_r \Lambda - \sigma_\theta}{\sigma_0 (1 + \Lambda)} \right) - n \frac{\sigma_r \Lambda + \sigma_\theta}{\sigma_0 (1 + \Lambda)} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Система уравнений (10) и (18) дополняется граничным условием на внутренней стенке:

$$\sigma_r(a) = 0. \quad (19)$$

В силу нелинейности соотношения (18) система уравнений не имеет точного аналитического решения.

4. Получение результатов и их обсуждение

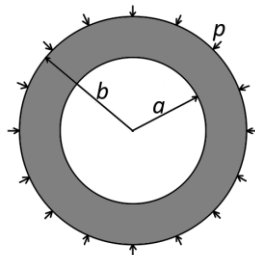


Рис. 6. Расчетная схема задачи о предельном напряжённом состоянии ледопородного цилиндра

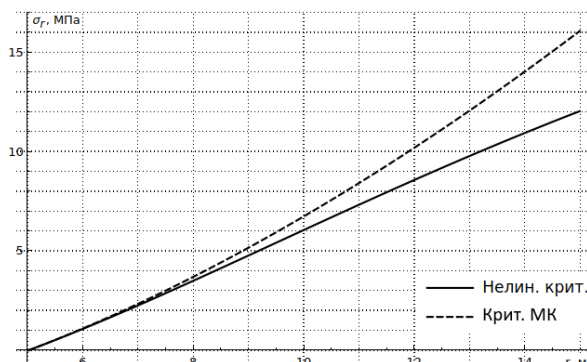


Рис. 7. Радиальные напряжения в ледопородном цилиндре. $R_1 = 5$ м, $c = 1,626$ МПа, $\varphi = 27^\circ$, $n = 0,085$ (алеврит при -6°C)

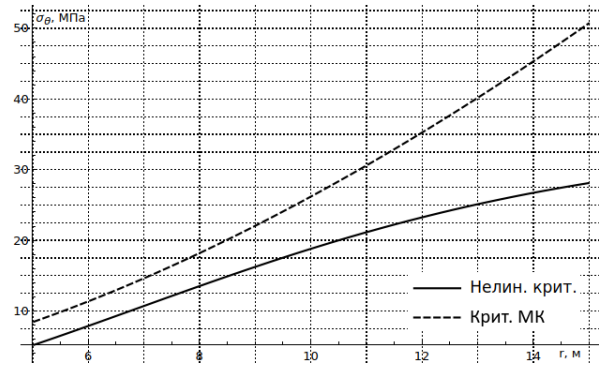


Рис. 8. Окружные напряжения в ледопородном цилиндре. $R_1 = 5$ м, $c = 1,626$ МПа, $\varphi = 27^\circ$, $n = 0,085$ (алеврит при -6°C)

Поскольку интегрирование уравнений (10), (18) с граничным условием (19) в квадратурах не представляется возможным, решение $\sigma_r(r)$ было найдено в численном виде методом конечных разностей. Численное решение было получено для случая $a = 5$ м, $c \approx 1.626$ МПа, $\varphi \approx 27^\circ$, $n = 0.085$ (алеврит при -6°C). Затем оно было сопоставлено с решением уравнения равновесия (10) с тем же граничным условием, но с условием прочности МК (1) при тех же численных параметрах задачи (рис. 7 и 8).

Зная σ_r, σ_θ , можно получить зависимость между внешней нагрузкой p и толщиной ЛПО $E = b - a$ (рис. 9), при которой весь ледопородный цилиндр окажется в предельном равновесном состоянии [1]. Сравнение численно полученной зависимости $E(p)$ (сплошная линия) с зависимостью Вязова (пунктирная линия) показало, что с погрешностью 10% оценку необходимой толщины ЛПО при давлении p менее 6 МПа для алеврита при -6°C можно производить по формуле Вязова. Для более высоких давлений p оценка толщины ЛПО E должна производиться по другим формулам.

В рамках классического метода С. С. Вязова аналитическая зависимость для $\sigma_r(r)$ определялась путем выражения σ_θ из прочностного критерия и подставления результата в уравнение равновесия (10). Однако нелинейный вид критерия (18) не позволяет получить аналитическую формулу для выражения σ_θ как функции σ_r . Однако эту проблему можно решить, если разложить экспоненциальное слагаемое в (18) в ряд Маклорена по малому безразмерному параметру n с сохранением конечного числа членов. На рис. 10 представлены зависимости σ_θ от σ_r при сохранении различного числа членов в разложении по степеням n — от 1 до 3. Случай $O(n^2)$ позволяет качественно отразить характер снижения прочности породы с ростом σ_r , в то время как случай $O(n^3)$ дает уже неплохое количественное соответствие с точным численным решением трансцендентного уравнения (отмечено сплошной линией).

Тем не менее, мы пока для простоты рассмотрим вариант, когда при разложении экспоненты по

степеням n удерживаются члены до $O(n^2)$ включительно. Это аргументировано еще и тем, что распределение напряжения σ_r , получаемого уже в результате решения уравнения (10) для варианта $O(n^2)$ различается с точным решением несущественно (в пределах 5 % для рассматриваемых параметров задачи) – см. рис. 11. Кривые на рис. 11 получены в результате подстановки зависимостей на рис. 10 в уравнение (10) и решения результирующих уравнений относительно σ_r .

После подстановки выражения для σ_θ из разложенного в ряд Маклорена уравнения (18) в уравнение (10) приходим после математических преобразований к уравнению вида:

$$\frac{A_0 + A_1 \sigma_r(r) + A_2 \sigma_r^2(r)}{r} + \sigma_r'(r) = 0. \quad (20)$$

Здесь введен ряд обозначений:

$$A_0 = \bar{\Lambda} \left(\frac{n^2}{2\sigma_0(1+\Lambda)^2} - 1 \right), \quad (21)$$

$$A_1 = 1 + \Lambda \left(\frac{2n^2 \Lambda^2}{\sigma_0(1+\Lambda)^2} - 1 \right), \quad (22)$$

$$A_2 = \frac{2n^2 \Lambda^2 \bar{\Lambda}}{\sigma_0(1+\Lambda)^2}. \quad (23)$$

Аналитическое решение уравнения (20) с учетом граничного условия (19) имеет вид:

$$\sigma_r = \frac{1}{2A_2} \left\{ \sqrt{D} \operatorname{tg} \left[\frac{\sqrt{D}}{2} \left(C_1 - \ln \frac{r}{a} \right) \right] - A_1 \right\}, \quad (24)$$

$$D = -A_1^2 + 4A_0A_2, \quad (25)$$

$$C_1 = \frac{2}{\sqrt{D}} \arccos \sqrt{\frac{D}{4A_0A_2}}. \quad (26)$$

Примечательно, что полученное решение имеет функциональный вид, отличный от классического решения уравнения (8), – вместо степенной зависимости от r теперь имеет место зависимость, выражаемая через тригонометрическую функцию и логарифм.

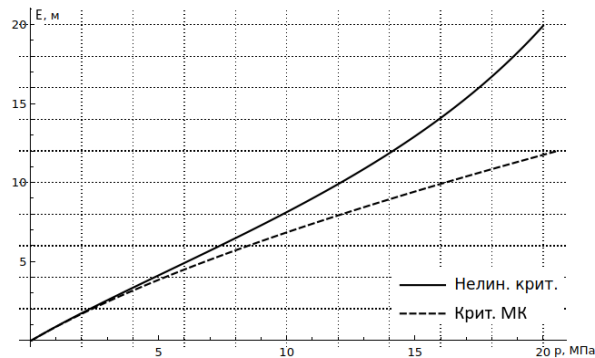


Рис. 9. Зависимость необходимой толщины ЛПО E от внешней нагрузки p при $R_1 = 5$ м, $c = 1.626$ МПа, $\varphi = 27^\circ$, $n = 0.085$ (алебрит при -6°C)

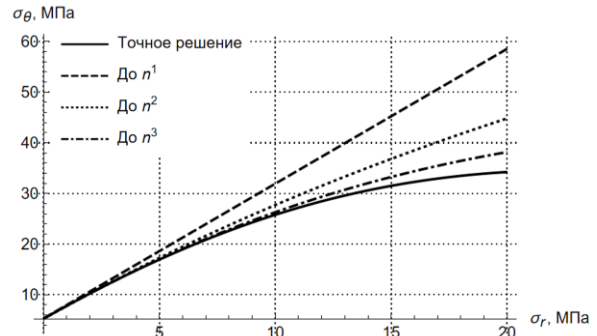


Рис. 10. Зависимости окружной компоненты тензора напряжения от радиальной компоненты в рамках выражения (18) и нескольких его упрощений

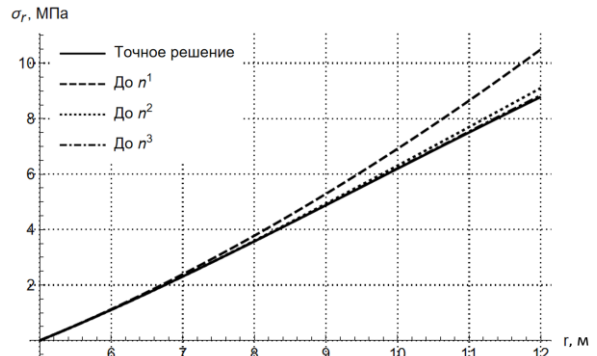


Рис. 11. Рассчитанные зависимости радиальной компоненты тензора напряжения из решения уравнения (10)

Из (24) можно определить внешнюю границу ЛПО b , а также толщину ЛПО $E = b - a$. Для этого положим, что $\sigma_r = p$ при $r = b$:

$$E = a \exp \left[\frac{2}{\sqrt{D}} \left(\arccos \sqrt{\frac{D}{4A_0A_2}} - \operatorname{arctg} \frac{A_1 + 2A_2 p}{\sqrt{D}} \right) \right] - a. \quad (27)$$

Численно рассчитанная зависимость $E(p)$ для представленных параметров задачи приведена ниже на рис. 12. На рис. 12 также для сравнения представлены точное решение (сплошная линия), и классическое решение С.С. Вялова. Из рис. 12 видно, что предложенная зависимость (27) позволяет с приемлемой точностью (в пределах относительной погрешности 10 %) рассчитать величину ЛПО при внешних нагрузках до 17 МПа. При этом классический критерий МК и основанная на нем формула С.С. Вялова дают погрешность выше 10 % уже при внешних нагрузках более 7 МПа. Кроме того, формула (27) при низких значениях p имеет очень малую погрешность относительно численного решения.

Данный вывод получен применительно к частному случаю алебрита при -6°C и величины внутреннего радиуса ЛПО 5 м. В дальнейшей планируется проведение более комплексного анализа, учитывающего другие физико-механические параметры горных пород и технологические параметры проходки стволов шахт.



Рис. 12. Зависимости толщины ЛПО от нагрузки на ее внешней границе в рамках точного численного решения нелинейного критерия (18), классического решения С.С. Вялова для линейного критерия МК, а также предложенной формулы (27)

5. Заключение

Рассмотрена задача о предельном равновесном состоянии ЛПО в условиях воздействия на него высоких внешних сжимающих нагрузок при строительстве вертикального шахтного ствола. Предельное состояние ЛПО изучалось с применением нелинейного критерия прочности, учитывающего процессы таяния и дробления льда, содержащегося в породах, при высоких давлениях всестороннего сжатия. Выбор данного критерия обосновывается его соответствием с опытно полученными огибающими предельных кругов Мора для глин, алевроитов и песков. Количество независимых параметров в выбранном критерии составило 3: сцепление c , угол внутреннего трения ϕ и показатель нелинейности n .

В исходном виде критерия прочности (9), (13) уравнение равновесия (10) не интегрируется в квадратурах. Численно полученная зависимость для толщины ЛПО E , выдерживающего внешнее сжимающее давление p , была построена для алевроита при -6°C . Сопоставление её с зависимостью $E(p)$ по классической формуле С. С. Вялова для алевроита при -6°C , показало, что при внешней нагрузке p менее 6 МПа рассогласования не превышают 10 %.

Поскольку величина параметра n получилась около нуля, нелинейные члены уравнения равновесия (10) после подстановки критерия прочности (13) были разложены по n до второй степени. Получено дифференциальное уравнение, которое имеет аналитическое решение. Его интегрированием была получена новая формула, связывающая толщину E ледопородного цилиндра с величиной внешней сжимающей нагрузки p . По новой формуле возможно адекватное отражение зависимости $E(p)$ для алевроита при -6°C при p до 17 МПа.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания (рег. номер НИОКТР 122030100425-6).

Список литературы

1. Вялов С. С. Реология мёрзлых грунтов. М.: Стройиздат, 2000. 463 с.
2. Yang Y., Gao F., Lai Y. Modified Hoek–Brown criterion for nonlinear strength of frozen soil // Cold Regions Science and Technology. 2013. Vol. 86. P. 98–103.
3. Wang P., Liu E., Zhi B., Song B., Yu Q., Wang J., Sun R. A macro-meso nonlinear strength criterion for frozen soil // Acta Geotechnica. 2024. Vol. 19. P. 4911–4928.
4. Li Z., Zhou Y., Chen J., Sugimoto M. Modified statistical damage constitutive model for frozen sand based on nonlinear strength criterion // KSCE Journal of Civil Engineering. 2022. Vol. 26, № 11. P. 4467–4477.
5. Lai Y., Yang Y., Chang X., Li S. Strength criterion and elastoplastic constitutive model of frozen silt in generalized plastic mechanics // International Journal of Plasticity. 2010. Vol. 26, № 10. P. 1461–1484.
6. Yang Y., Lai Y., Dong Y., Li S. The strength criterion and elastoplastic constitutive model of frozen soil under high confining pressures // Cold Regions Science and Technology. 2010. Vol. 60, № 2. P. 154–160.
7. Zhang D., Liu E., Liu X., Zhang G., Song B. A new strength criterion for frozen soils considering the influence of temperature and coarse-grained contents // Cold Regions Science and Technology. 2017. T. 143. P. 1–12.
8. Chen D., Wang D., Ma W., Lei L., Li G. A strength criterion for frozen clay considering the influence of stress Lode angle // Canadian Geotechnical Journal. 2018. Vol. 56, № 11. P. 1557–1572.
9. Lai Y., Liao M., Hu K. A constitutive model of frozen saline sandy soil based on energy dissipation theory // International Journal of Plasticity. 2016. Vol. 78. P. 84–113.
10. Liu X., Liu E. Application of new twin-shear unified strength criterion to frozen soil // Cold Regions Science and Technology. 2019. Vol. 167, 102857.
11. Qi J., Ma W. A new criterion for strength of frozen sand under quick triaxial compression considering effect of confining pressure // Acta Geotechnica. 2007. Vol. 2. P. 221–226.
12. Семин М. А., Бровка Г. П., Пугин А. В. и др. Исследование влияния неоднородности поля температур на прочность ледопородных ограждений стволов шахт // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2021. № 9. С. 79–93.
13. Левин Л. Ю., Семин М. А., Плехов О. А. Сравнительный анализ существующих методов расчета толщины ледопородного ограждения строящихся шахтных стволов // Вестник Пермского национального исследовательского поли-

- технического университета. Строительство и архитектура. 2018. Т. 9, № 4. С. 93–103.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
- ### References
1. Vyalov S. S. *Rheology of Frozen Soils*. Moscow: Stroyizdat, 2000. 463 p. (In Russian)
 2. Yang Y., Gao F., Lai Y. Modified Hoek–Brown criterion for nonlinear strength of frozen soil. *Cold Regions Science and Technology*, 2013, vol. 86, pp. 98–103.
 3. Wang P., Liu E., Zhi B., Song B., Yu Q., Wang J., Sun R. A macro-meso nonlinear strength criterion for frozen soil. *Acta Geotechnica*, 2024, vol. 19, pp. 4911–4928.
 4. Li Z., Zhou Y., Chen J., Sugimoto M. Modified statistical damage constitutive model for frozen sand based on nonlinear strength criterion. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 2022, vol. 26, no. 11, pp. 4467–4477.
 5. Lai Y., Yang Y., Chang X., Li S. Strength criterion and elastoplastic constitutive model of frozen silt in generalized plastic mechanics. *International Journal of Plasticity*, 2010, vol. 26, no. 10, pp. 1461–1484.
 6. Yang Y., Lai Y., Dong Y., Li S. The strength criterion and elastoplastic constitutive model of frozen soil under high confining pressures. *Cold Regions Science and Technology*, 2010, vol. 60, no. 2, pp. 154–160.
 7. Zhang D., Liu E., Liu X., Zhang G., Song B. A new strength criterion for frozen soils considering the influence of temperature and coarse-grained contents. *Cold Regions Science and Technology*, 2017, vol. 143, pp. 1–12.
 8. Chen D., Wang D., Ma W., Lei L., Li G. A strength criterion for frozen clay considering the influence of stress Lode angle. *Canadian Geotechnical Journal*, 2018, vol. 56, no. 11, pp. 1557–1572.
 9. Lai Y., Liao M., Hu K. A constitutive model of frozen saline sandy soil based on energy dissipation theory. *International Journal of Plasticity*, 2016, vol. 78, pp. 84–113.
 10. Liu X., Liu E. Application of new twin-shear unified strength criterion to frozen soil. *Cold Regions Science and Technology*, 2019, vol. 167, 102857.
 11. Qi J., Ma W. A new criterion for strength of frozen sand under quick triaxial compression considering effect of confining pressure. *Acta Geotechnica*, 2007, vol. 2, pp. 221–226.
 12. Semin M. A., Brovka G. P., Pugin A. V. et al. Effects of temperature field nonuniformity on strength of frozen walls in mine shafts. *Mining Information and Analytical Bulletin*, 2021, no. 9, pp. 79–93. (In Russian).
 13. Levin L. Yu., Semin M. A., Plekhov O. A. Comparative analysis of existing methods for calculating frozen wall thickness for mine shafts under construction. *Construction and Geotechnics*, 2018, vol. 9, no. 4, pp. 93–103. (In Russian).
 14. Landau L. D., Lifshiz E. M. *Theory of Elasticity*. New-York: Elsevier, 1986. 187 p.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Поспелов Д. Р., Сёмин М. А. Расчёт толщины ледопородного ограждения в условиях высоких внешних нагрузок // Вестник Пермского университета. Физика. 2025. № 3. С. 53–60. doi: 10.17072/1994-3598-2025-3-53-60

Please cite this article in English as:

Pospelov D. R., Semin M. A. Calculation of the freeze wall thickness under high external loads. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2025, no. 3, pp. 53–60. doi: 10.17072/1994-3598-2025-3-53-60

Сведения об авторах

1. Сёмин Михаил Александрович, д-р техн. наук, научный секретарь, Горный институт УрО РАН, ул. Сибирская 78А, Пермь, 614007; заведующий лабораторией Математического моделирования геотехнических процессов, профессор кафедры ВиЭМ, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614990
2. Поспелов Дмитрий Романович, инженер, Горный институт, ул. Сибирская 78А, Пермь, 614007, аспирант, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614990

Author information

1. Mikhail A. Semin, Doctor of Engineering Sciences, Scientific Secretary, Mining Institute UB RAS; 78a, Sibirskaya st., Perm, 614007, Russia; Head of the Laboratory of Mathematical Modeling of Geotechnical Processes, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia
2. Dmitriy R. Pospelov, Engineer, Mining Institute UB RAS; 78a, Sibirskaya st., Perm, 614007, Russia; Postgraduate Student, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia