

УДК 532.5.032
PACS 47.55.Dz, 47.50.Gj

Влияние неоднородности поверхности подложки на продольные колебания капли в ограниченном объеме жидкости

А. А. Алабужев^{1†}

¹ Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

[†] alabuzhev@icmm.ru

В данной работе рассматривается влияние свойств подложек на динамику капли в вибрационном поле. Исследуются собственные и вынужденные колебания капли жидкости, окруженной другой жидкостью в цилиндрическом сосуде конечного объема. В равновесном состоянии капля имеет форму цилиндра и ограничена в осевом направлении двумя параллельными твердыми поверхностями. Учитывается динамика линии контакта трех сред (капля–жидкость–твердая поверхность): скорость движения контактной линии пропорциональна отклонению краевого угла от его равновесного значения. Коэффициент пропорциональности (параметр смачивания) является функцией координат поверхности подложки, что позволяет рассматривать эту поверхность как неоднородную. На сосуд действует вибрационная сила, которая направлена вдоль оси симметрии сосуда. Такие вибрации возбуждают только осесимметричные колебания капли, но из-за неоднородности будут возбуждаться азимутальные моды, спектр которых определяется видом неоднородности. Исследована зависимость частот и декрементов затухания собственных колебаний от параметров задачи. Показано, что неоднородность качественно меняет эти зависимости по сравнению с случаем однородной поверхности. При исследовании вынужденных колебаний обнаружены хорошо заметные резонансные эффекты. Показано, что присутствуют резонансные частоты азимутальных мод.

Ключевые слова: цилиндрическая капля; идеальная жидкость; неоднородная поверхность; движение линии контакта; осевые колебания; собственные колебания; вынужденные колебания

Поступила в редакцию 02.07.2025; после рецензии 19.08.2025; принята к опубликованию 19.08.2025

The influence of the substrate surface heterogeneity on axisymmetric oscillations of a drop in a finite volume of liquid

A. A. Alabuzhev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia
alabuzhev@icmm.ru

The article deals with the influence of substrate properties on drop dynamics in a vibration field. Natural and forced oscillations of a liquid drop surrounded by another liquid in a cylindrical vessel of a finite volume are investigated. In the equilibrium state, the drop has the shape of a cylinder and is limited in the axial direction by two parallel solid surfaces. The dynamics of the contact line of three media (drop–liquid–solid surface) is taken into account: the velocity of the contact line is proportional to the deviation of the contact angle from its equilibrium value. The proportionality coefficient (wetting parameter) is a function of the substrate surface coordinates, which allows us to consider this surface as inhomogeneous. The vessel is exposed to a vibration force directed

along the symmetry axis of the vessel. Such vibrations excite only axisymmetric oscillations of the drop, but, due to the inhomogeneity, azimuthal modes will be excited, the spectrum of which is determined by the type of inhomogeneity. The dependence of frequencies and damping decrements of natural oscillations on the parameters of the problem is investigated. It is shown that heterogeneity qualitatively changes these dependences in comparison with the case of a homogeneous surface. The study of forced oscillations has revealed clearly noticeable resonance effects. It is shown that resonance frequencies of azimuthal modes are present.

Keywords: cylindrical drop; ideal liquid; heterogeneous surface; contact line dynamics; axisymmetric oscillations; free oscillations; forced oscillations

Received 02 July 2025; revised 19 August 2025; accepted 19 August 2025

doi: 10.17072/1994-3598-2025-3-43-52

1. Введение

Множество экспериментов показывают, что неоднородность поверхности подложки оказывает существенное влияние как на течение жидкости, так и на движение линии контакта трех сред [1–16]. Неоднородность может быть как естественно-го, так и искусственного происхождения, и представлять собой либо рельеф поверхности – шероховатость (бугорки, бороздки, каверны и пр.), либо разные материалы, различающиеся, например, по свойствам смачивания. В работе [1] упоминалось, что шероховатость поверхности подложки приводит к явлению гистерезиса краевого угла и дальнейшая шлифовка поверхности приводит к исчезновению этого явления. Кроме того, шлифовка поверхности способствует уменьшению взаимодействия линии контакта с подложкой и постоянству краевого угла при ее движении [1, 17]. Искусственный рельеф на подложке используется для эффективного перемешивания жидкостей в микроустройствах [18].

Периодическое воздействие является одним из наиболее распространенных способов воздействия на включения в жидкости (капли, пузырьки, частицы). Это могут быть не только механические вибрации [6, 13], но и переменные электрические и магнитные поля [19, 20], осциллирующее температурное поле или поле давления [21–24], и т.д. При высокочастотных колебаниях (толщина вязкого пограничного слоя мала) линии контакта удобно использовать линейное условие Хокинга [17]: скорость движения линии контакта пропорциональна отклонению краевого угла. Коэффициент пропорциональности (параметр смачивания, параметр Хокинга) действительный неотрицательный, имеет размерность скорости и описывает взаимодействие линии контакта с подложкой. Такая связь приводит к диссипации энергии в системе, что позволяет рассматривать жидкость как невязкую, что хорошо согласуется с приближением высоких частот. Кроме того, это условие описывает два важных предельных случая движения линии контакта: 1) неподвижная линии контакта (краевой угол меняется) [25–27], 2) свободно скользящая линия

контакта (постоянный краевой угол) [28–30]. Эффективное граничное условие Хокинга использовалось в большом количестве работ для различных геометрий (см., например, [10, 13, 16]). В работе [31] было предложено рассматривать параметр Хокинга как комплексное число, что приводит к сдвигу фазы капиллярных волн, распространяющихся по поверхности раздела сред. В работах [6, 10, 16] этот параметр рассматривался как функция координат поверхности, что позволило рассмотреть неоднородную подложку. Было показано, что из-за неоднородности подложки возбуждаются азимутальные моды, которые отсутствовали в случае однородной поверхности. Условие Хокинга использовалось для описания процесса электро-смачивания [10, 19]. В работах [22, 32, 33] использовалось более сложное условие, допускающее прерывистое движение линии контакта и гистерезис краевого угла.

Важным является вопрос о значениях параметра Хокинга, методов его измерения и получения феноменологической или теоретической формулы. В экспериментах [34, 35] при исследовании движения линии контакта поверхности жидкости вдоль вертикальной твердой стенки была сделана попытка получения феноменологической формулы для параметра Хокинга, т.е. он был переменным. Было показано, что при малоамплитудных колебаниях (малых числах Рейнольдса) поведение линии контакта хорошо описывается условием закрепленной контактной линией. С увеличением амплитуды появляется режим проскальзывания линии контакта, т.е. контактная линия движется. При высокоамплитудных колебаниях (больших числах Рейнольдса) авторы работы [35] предполагают, что в этом случае комплексный параметр Хокинга надо рассматривать как функцию, зависящую от времени. Экспериментальный метод измерения коэффициента подвижности (обратного параметра Хокинга) для полусферической капли на подложке был предложен в [36]. Исследования были продолжены рядом авторов [37–39], включая сравнение с теоретическими результатами [22, 33], учитывающих гистерезис краевого угла [32]. Был предложен новый метод построения диаграммы для определения линейной зависимости между

скоростью контактной линии и контактным углом. Это может быть использовано для исследования того, может ли независимо измеряемый параметр подвижности контактной линии для инерционно-капиллярных движений. Представленный экспериментальный подход вводит циклически динамический гониометр контактного угла в сочетании с циклическими измерениями, что позволяет измерять коэффициент подвижности. Похожий метод был использован для изучения диссипативного движения контактной линии [37]. Слияние двух капель воды на подложке было исследовано экспериментально и численно в [38, 39]. Было показано, что условие Хокинга с учетом гистерезиса краевого угла [37] является наиболее подходящим подходом для нескольких поверхностей с различными свойствами смачивания. Авторы [36, 37] подчеркивают, что коэффициент подвижности действительно является параметром, подобным материалу, и экспериментально измерили несколько значений параметра подвижности для различных материалов подложки. Кроме того, теоретически возможно определить различные значения параметра подвижности для наступательных и отступающих движений с помощью циклически динамического гониометра угла контакта [40], что может поставить под сомнение обоснованность этого значения, используемого для прогнозирования динамических углов контакта [36]. Таким образом, несмотря на значительный прогресс в использовании условия Хокинга, тем не менее, существует ряд недостатков в описании и использовании этой модели. Во-первых, до сих пор невозможно получить аналитическую формулу для описания параметра Хокинга, который является феноменологическим параметром. Во-вторых, как в теории, так и в эксперименте поверхность подложки считается однородной с точки зрения шероховатости и структуры материала. В-третьих, исследование проводится только для капли жидкости на подложке.

В данной работе исследуются собственные и вынужденные продольные (параллельные оси симметрии) колебания цилиндрической капли, находящейся в сосуде конечного объема подобно [42]. В отличие от [42], будем рассматривать неоднородные поверхности подложек, используя модель, предложенную [6, 16].

2. Постановка задачи

Постановка задачи во многом аналогична [6, 16, 42]. Рассматривается капля несжимаемой жидкости плотностью ρ_i^* , которая находится в цилиндрическом сосуде радиуса R_0^* и высотой h^* (рис. 1). В равновесном состоянии капля имеет форму цилиндра радиуса r_0^* , который ограничен в осевом направлении параллельными твердыми поверхностями (дном и крышкой сосуда). Равновес-

ный краевой угол между боковой поверхностью капли и твердой поверхностью прямой. Капля в сосуде окружена несжимаемой жидкостью плотностью ρ_e^* . Поверхность раздела деформируемая (коэффициент поверхностного натяжения σ^*) и в цилиндрической системе координат (r^*, α, z^*) описывается уравнением $F(r^*, \alpha, z^*, t^*) = r^* - r_0^* - \zeta^*(\alpha, z^*, t^*) = 0$, где $\zeta^*(\alpha, z^*, t^*)$ – отклонение поверхности от равновесного положения. На сосуд действует вибрационная сила с частотой ω^* и амплитудой A^* , которая направлена вдоль оси симметрии сосуда.

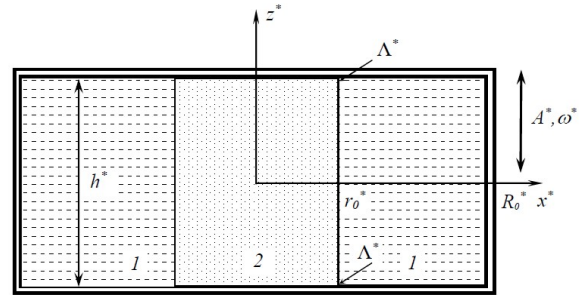


Рис. 1. Геометрия задачи: 1 – жидкость, 2 – капля

Принимая в качестве характерных величин длины – R_0^* , высоты – h^* , плотности – $\rho_e^* + \rho_i^*$, времени – $\sigma^{-1/2} \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^{*3}}$, потенциала скорости – $A^* \sqrt{\sigma} ((\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^{*3})^{-1/2}$, давления – $A^* \sigma (R_0^*)^{-2}$ и отклонения поверхности – A^* , переходим к безразмерным переменным и получаем следующую линейную задачу:

$$p_j = -\rho_j (\varphi_{jt} + \omega^2 b z \cos(\omega t)), \quad \Delta \varphi_j = 0, \quad j = i, e, \quad (1)$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$r = 1: [\varphi_r] = 0, \quad \zeta_t = \varphi_r, \quad [p] = \zeta + \zeta_{\alpha\alpha} + b^2 \zeta_{zz}, \quad (2)$$

$$z = \pm \frac{1}{2}: \varphi_z = 0, \quad (3)$$

$$r = r_0: \varphi_r = 0, \quad (4)$$

$$r = 1, z = \pm \frac{1}{2}: \zeta_t = \mp \Lambda(\alpha) \zeta_z, \quad (5)$$

где p – давление жидкости, φ – потенциал скорости, $\Lambda(\alpha)$ – безразмерный параметр Хокинга, квадратные скобки соответствуют скачку величины на границе раздела между внешней жидкостью и каплей.

Краевая задача (1)–(5) включает в себя 6 безразмерных параметров: $b = r_0^*/h^*$ – геометрический параметр, $\rho_i = \rho_i^*(\rho_e^* + \rho_i^*)^{-1}$, $\rho_e = \rho_e^*(\rho_e^* + \rho_i^*)^{-1}$ –

соотношение плотностей,
 $\lambda = \Lambda^* \sigma^{-1/2} b \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^*}$ – капиллярный параметр,
 $\omega = \omega^* \sigma^{-1/2} \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^{*3}}$ – частота колебаний.

3. Собственные колебания

Сначала рассмотрим собственные колебания капли. Решение краевой задачи (1)–(5), за исключением внешней силы, будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям оператора Лапласа (1) с учетом граничных условий (3) и (4):

$$\varphi_i(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re}(i\Omega \psi_i(r, \alpha, z) e^{i\Omega t}), \quad (6)$$

$$\psi_i(r, \alpha, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{mk}^{(0)} R_{mk}^{(0)i}(r) \cos(2k\pi z) + a_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)i}(r) \sin((2k+1)\pi z) \right) e^{im\alpha},$$

$$\varphi_e(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re}(i\Omega \psi_e(r, \alpha, z) e^{i\Omega t}) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \psi_e(r, \alpha, z) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(b_{mk}^{(0)} R_{mk}^{(0)e}(r) + \right. \\ & + b_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(0)e}(r) \cos(2k\pi z) + b_{mk}^{(2)} R_{mk}^{(1)i}(r) + \\ & \left. + b_{mk}^{(3)} R_{mk}^{(1)e}(r) \sin((2k+1)\pi z) \right) e^{im\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{mk}^{(0)i}(r) &= I_m(2k\pi br), \quad R_{mk}^{(1)i}(r) = I_m((2k+1)\pi br), \\ R_{mk}^{(0)e}(r) &= K_0(2k\pi br), \quad R_{mk}^{(1)e}(r) = K_0((2k+1)\pi br), \\ R_{m0}^{(0)i}(r) &= r^m, \quad R_{m0}^{(0)e}(r) = r^{-m}, \\ \zeta(\alpha, z, t) &= \operatorname{Re}(\xi(\alpha, z) e^{i\Omega t}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \xi(\alpha, z) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_{mk}^{(0)} \cos(2k\pi z) + \right. \\ & + c_{mk}^{(1)} \sin((2k+1)\pi z) \Big) e^{im\alpha} + d_0^{(0)} \cos\left(\frac{z}{b}\right) + \\ & + d_0^{(1)} \sin\left(\frac{z}{b}\right) + d_1^{(0)} z^2 e^{i\alpha} + d_1^{(1)} z e^{i\alpha} + \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} \left(d_m^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{2} z\right) + \right. \\ & \left. + d_m^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{2} z\right) \right) e^{im\alpha}, \end{aligned}$$

где Ω – частота собственных колебаний, I_m и K_m – модифицированные функции Бесселя m -го порядка первого и второго рода, соответственно.

Подставив решения (6)–(8) в систему уравнений (1)–(5), получим следующую систему для нахождения неизвестных амплитуд a_{mk} , b_{mk} , c_{mk} и d_m :

$$\begin{aligned} 2i\omega \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(c_{mk}^{(0)} \pm c_{mk}^{(1)} \right) + \delta_{m0} \left(d_0^{(0)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \pm d_0^{(1)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \delta_{m1} \left(\frac{1}{4} d_1^{(0)} + \frac{1}{2} d_1^{(1)} \right) + \right. \\ \left. + \delta_{mn} \left(d_n^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) + d_n^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) \right) \right) = \mp \lambda_{u,b} \left(B_{mn} \left(\frac{\delta_{n0}}{b} \left(\mp d_0^{(0)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) + d_0^{(1)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta_{n1} \left(\pm d_1^{(0)} + d_1^{(1)} \right) + \delta_{nl} \frac{\sqrt{l^2-1}}{b} \left(\pm d_l^{(0)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) + d_l^{(1)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) \right) \right) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\|e^{im\alpha}\|^2} \int_0^{2\pi} \Lambda(\alpha) e^{in\alpha} e^{im\alpha} d\alpha, \quad c_{10}^{(0)} = -f_{10}^{(0)} d_1^{(0)} - \frac{b^2}{2\omega^2} d_1^{(0)}, \quad c_{00}^{(0)} = -g_{00}^{(0)} d_0^{(0)}, \quad c_{m0}^{(0)} = \frac{\omega^2 g_{m0}^{(0)} d_m^{(0)}}{\Omega_{m0}^{(0)2} - \Omega^2},$$

$$c_{mk}^{(0)} = \frac{\omega^2 g_{mk}^{(0)} d_m^{(0)}}{\Omega_{mk}^{(0)2} - \Omega^2}, \quad c_{mk}^{(1)} = \frac{\omega^2 g_{mk}^{(1)} d_m^{(1)}}{\Omega_{mk}^{(1)2} - \Omega^2}, \quad \Omega_{m0}^{(0)2} = m(m^2 - 1), \quad F_{mk}^{(l)} = \frac{R_{mk}^{(l)i}(1)}{R_{mkr}^{(l)i}(1)},$$

$$G_{mk}^{(l)} = \frac{R_{mkr}^{(l)i}(R_0) R_{mk}^{(l)e}(1) - R_{mk}^{(l)i}(1) R_{mkr}^{(l)e}(R_0)}{R_{mkr}^{(l)i}(1) R_{mkr}^{(l)e}(R_0) - R_{mkr}^{(l)i}(R_0) R_{mkr}^{(l)e}(1)}, \quad \Omega_{mk}^{(0)2} = \frac{4\pi^2 k^2 b^2 - 1}{\rho_i F_{mk}^{(0)} + \rho_e G_{mk}^{(0)}}, \quad \Omega_{mk}^{(1)2} = \frac{(2k+1)^2 \pi^2 b^2 - 1}{\rho_i F_{mk}^{(1)} + \rho_e G_{mk}^{(1)}},$$

$$R_{mkr}^{(l)i}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(l)i}(r), \quad R_{mkr}^{(l)e}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(l)e}(r), \quad l = 0, 1.$$

Здесь $\Omega_{mk}^{(l)}$ – частоты собственных колебаний капли со свободной контактной линией (т.е. при $\lambda \rightarrow \infty$), $g_{mk}^{(l)}$ – коэффициенты разложения в ряд Фурье частных решений (8).

Полученная система (9) представляется собой задачу на собственные значения, собственными числами которой являются комплексные решения Ω , причем $\operatorname{Im}(\Omega) > 0$, что означает затухание

свободных колебаний. Оно вызвано лишь условием на линии контакта и не связано с вязкостью. Заметим также, что времена затухания имеют порядок величины, сравнимый с периодом колебаний, т.е. при конечных значениях параметра смачивания капля успевает совершить лишь несколько колебаний. Данная система решалась численно методом двумерных секущих при $m = 10$, $n = 100$ (относительная ошибка с $n = 10$ составляет $\sim 10\%$, с $n = 200$ — $\sim 1\%$).

Полученные уравнения (9) в пределе $R_0 \rightarrow \infty$ переходят в аналогичные уравнения для частот собственных колебаний цилиндрической капли в бесконечном объеме несжимаемой жидкости и в уравнения для однородной подложки в случае $\Lambda(\alpha) = \text{const}$.

Рассмотрим частный случай неоднородности поверхности пластин: $\Lambda(\alpha) \sim |x| \sim |\cos(\alpha)|$, т.е. коэффициент Хокинга λ растёт линейно по x . Отметим, что неоднородность важна только вблизи линии контакта. Таким образом, в дальнейшем будем предполагать, что $\Lambda(\alpha) = \lambda_0 |\cos(\alpha)|$.

На рис. 2 приведена зависимость частоты и инкремента затухания колебаний первой (нечетной) гармоники осесимметричной моды для двух значений радиуса сосуда R_0 . Используемая неоднородность не меняет существенно поведение кривых. Отметим, что в предельных случаях λ_0 неоднородность не важна: при малых значениях λ_0 линия контакта неподвижна, при больших — не взаимодействует с поверхностью.

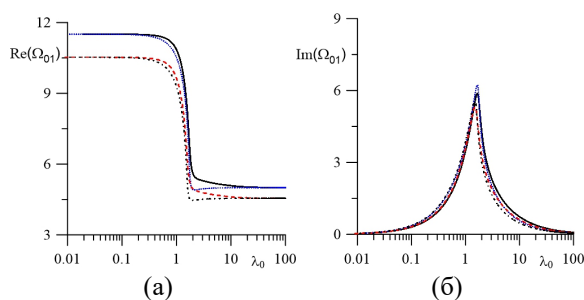


Рис. 2. Зависимость частоты $\text{Re}(\Omega_{01})$ (а) и коэффициента затухания $\text{Im}(\Omega_{01})$ (б) первой гармоники осесимметричной моды собственных колебаний от параметра Хокинга ($b = 1$), $R_0 = 5$, неоднородная поверхность — сплошная линия, $R_0 = 1.2$, неоднородная поверхность — штриховая линия, $R_0 = 5$, однородная поверхность — пунктирная линия, $R_0 = 1.2$, неоднородная поверхность — сплошная линия

Взаимодействие контактной линии с подложкой может приводить к монотонному затуханию колебаний, т.е. занулению частоты собственных

колебаний. Этот эффект определяется двумя параметрами: размерами капли b и параметра Хокинга λ_0 . Например, при малом значении b , т.е. для вытянутых капель, такой эффект возникает при конечных значениях λ_0 (т.е. при максимальном затухании, см. рис. 2) из-за затухания поверхностных капиллярных волн на поверхности раздела (рис. 3). Другими словами, уменьшение b приводит к увеличению боковой поверхности при неизменном радиусе капли и к увеличению диссипации энергии поверхностных волн. Частота зануляется на некотором промежутке значений λ_0 (рис. 3, а). Границы этого интервала соответствуют точкам ветвления для декремента затухания (рис. 3, б). Из графиков на рис. 3 видно, что граница этого интервала смещаются из-за неоднородности (рис. 3, а) и присутствует локальный максимум для декремента затухания (рис. 3, б). Следовательно, неоднородность может качественно менять такие зависимости. Кроме того, при малых значениях b возможно развитие неустойчивости Рэлея-Плато монотонным образом. Критическое значение $b = 1/\pi$, что соответствует половине длины волны Рэлея-Плато неустойчивости.

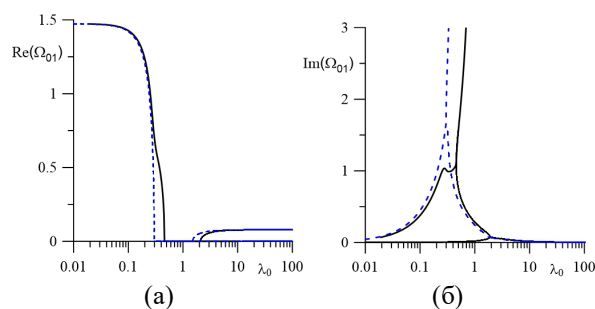


Рис. 3. Зависимость частоты $\text{Re}(\Omega_{01})$ (а) и коэффициента затухания $\text{Im}(\Omega_{01})$ (б) первой гармоники осесимметричной моды собственных колебаний от параметра Хокинга ($b = 0.32$, $R_0 = 5$), неоднородная поверхность — сплошная линия, однородная поверхность — штриховая линия

Подобный эффект наблюдается и для основных частот азимутальных мод $m \geq 2$ для сплюснутых капель. В этом случае увеличивается длина линии контакта при неизменной высоте капли, что приводит к увеличению диссипации на контактной линии.

4. Вынужденные колебания

Рассмотрим теперь вынужденные колебания пузырька в пульсационном поле давления. Решение краевой задачи (1)–(5), аналогично случаю свободных колебаний (6)–(8). Полученная система решалась численно методом Гаусса.

Введем обозначение $\zeta_q = \max \left(\left| \zeta \right|_{\substack{z=0.25 \\ \alpha=0}} \right)$ – максимальное отклонение боковой поверхности пупырька от равновесного положения в середине слоя (при $z = 0.25$, $\alpha = 0$). Отметим, что амплитуда колебаний боковой поверхности и линии контакта зависит от угла α в отличие от однородных пластин. Аналогично, для максимального отклонения линии контакта на твердой поверхности – $\zeta_{s0} = \max \left(\left| \zeta \right|_{\substack{z=1/2 \\ \alpha=0}} \right)$.

На рис. 4 показаны амплитуды колебаний линии контакта ζ_{s0} (рис. 4, а, в) и отклонения поверхности ζ_q (рис. 4, б, г) для двух значений параметра b для однородных и неоднородных пластин.

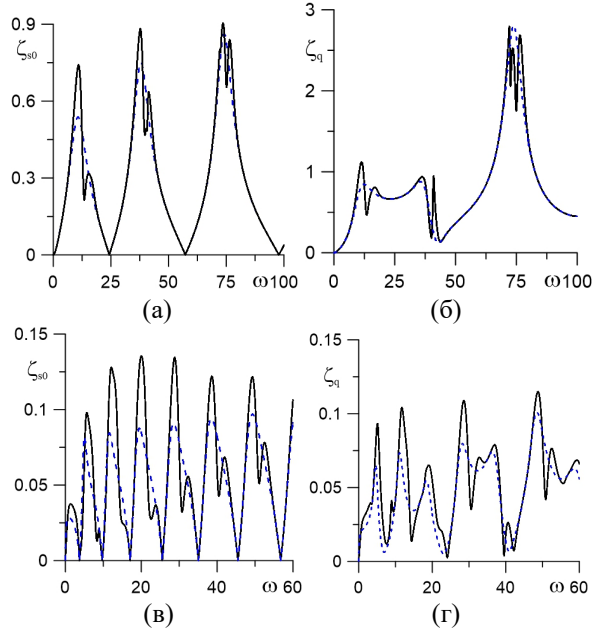


Рис. 4. Зависимость амплитуды ζ_{s0} колебаний линии контакта (а, в) и амплитуды ζ_q колебаний поверхности (б, г) от частоты внешнего воздействия ω ($R_0 = 5$). (а, б) – $b = 1$, (в, г) – $b = 0.32$. Неоднородная поверхность – сплошная линия, однородная – штриховая

Для неоднородной поверхности пластины хорошо заметны дополнительные резонансные пики, которые соответствуют гармоникам азимутальной моды $m = 2$. Тем не менее, пики на частотах осесимметричной моды более заметны, так как именно они возбуждаются внешней силой и, только благодаря движению линии контакта по неоднородной поверхности, возбуждают другие моды. Отметим, что для отклонения боковой поверхности эти резонансные пики более заметны (рис. 4, б, г). Спектр возбуждаемых дополнительных мод определяется формой неоднородности. Резонансный пик первой гармоники отсутствует для

$b = 0.32$ (рис. 4, в, г), так как в этом случае частота собственных колебаний равна нулю (рис. 3, а).

На рис. 5 показаны амплитудно-частотные характеристики для трех значений λ_0 . При малых значениях λ_0 , амплитуда линии контакта хорошо заметна только вблизи резонансных частот (рис. 5, а) из-за ее малой подвижности, но для боковой поверхности резонансные пики велики из-за малой диссипации (рис. 5, б). При больших λ_0 , дополнительные резонансные пики более заметны по причине возросшей подвижности линии контакта. Отметим, что с увеличением λ_0 , резонансные частоты уменьшаются.

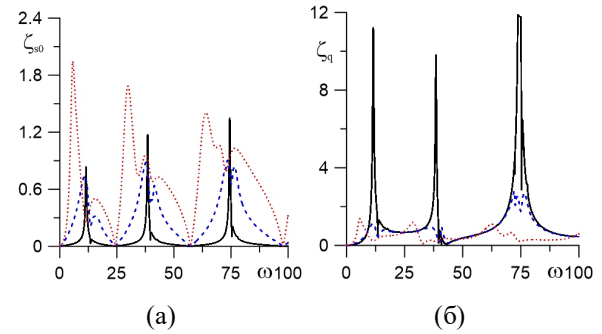


Рис. 5. Зависимость амплитуды ζ_{s0} колебаний линии контакта (а, в) и амплитуды ζ_q колебаний поверхности (б, г) от частоты внешнего воздействия ω ($b = 1$, $R_0 = 5$). $\lambda_0 = 0.1$ – сплошная линия, $\lambda_0 = 1$ – штриховая, $\lambda_0 = 10$ – пунктирная

На рис. 6 построена форма линии контакта и боковой поверхности в разные моменты периода колебаний. Видно, что форма линии контакта (рис. 6, а) отличается от окружности, которая была бы в случае однородной поверхности. Кроме того, линия контакта неподвижна при $\alpha = 90^\circ$ и $\alpha = 270^\circ$, т.е. при $\Lambda(\alpha) = 0$.

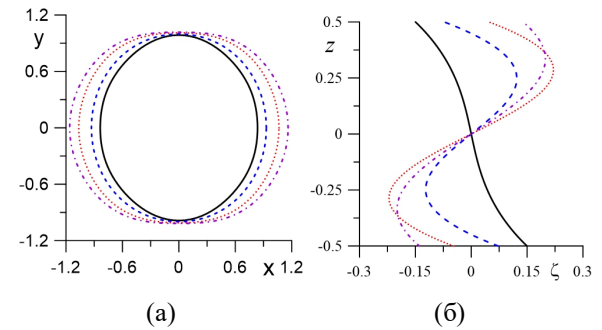


Рис. 6. Форма линии контакта (а) и сечение боковой поверхности (б) при $\alpha = 0$ в разные моменты периода колебаний $T = 2\pi\omega^{-1}$ ($b = 1$, $R_0 = 5$, $\omega = 10$, $\varepsilon = 1$). $t = 0$ – сплошная линия, $t = 0.125T$ – штриховая, $t = 0.25T$ – пунктирная, $t = 0.375T$ – штрихпунктирная

5. Заключение

Исследованы собственные и вынужденные колебания капли жидкости в сосуде конечного объема цилиндрической формы. Капля зажата торцами с неоднородной поверхностью и окружена другой жидкостью. Движение контактной линии моделируется модифицированным уравнением Хокинга. На сосуд действуют осевые вибрации.

Показано, что неоднородность поверхности может качественно изменить зависимость частот собственных колебаний от параметра Хокинга. Возникают дополнительные локальные экстремумы, происходит сдвиг интервала значений, на котором монотонно затухает первая гармоника осесимметричной моды. Аналогичный эффект может наблюдаться для следующих гармоник, однако он лежит за границей устойчивости Релея–Плато для цилиндрического столба. Выявлено, что частоты собственных колебаний понижаются с уменьшением радиуса сосуда.

Внешние вибрации возбуждают колебания гармоник осесимметричной моды в случае однородной поверхности подложки. При движении линии контакта по неоднородной подложке возбуждаются другие азимутальные моды, спектр которых определяется формой неоднородности поверхности, т.е. энергия из колебаний осесимметричной моды переходит в другие колебания. Это приводит к появлению на амплитудно-частотных характеристиках дополнительных резонансных пиков по сравнению со случаем однородной поверхности. Показано, что форма линии контакта на неоднородной поверхности отличается от окружности в случае однородной. Возможно определение формы неоднородности подложки, исходя из формы линии контакта.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (бюджетная тема No 121031700169-1)

Список литературы

1. Dussan V. E. B. On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamic contact lines // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1979. Vol. 11. P. 371–400. DOI: 10.1146/annurev.fl.11.010179.002103
2. де Жен П.Ж. Смачивание: статика и динамика // УФН. 1987. Т. 151, вып. 4. С. 619–681. DOI: 0.3367/UFNr.0151.198704c.0619
3. Bonn D., Eggers J., Indekeu J., et al. Wetting and spreading // *Rev. Mod. Phys.* 2009. Vol. 81. P. 739–805. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.739
4. Bormashenko E. Wetting of flat and rough curved surfaces // *J. Phys. Chem. C.* 2009. Vol. 113. P. 17275–17277. DOI: 10.1021/jp905237v
5. Erbil H.Y. The debate on the dependence of apparent contact angles on drop contact area or three-phase contact line: A review // *Surface Science Reports.* 2014. Vol. 69. P. 325–365. DOI: 10.1016/j.surfrep.2014.09.001
6. Alabuzhev A.A. Influence of heterogeneous plates on the axisymmetrical oscillations of a cylindrical drop // *Microgravity Sci. Technol.* 2018. Vol. 30. P. 25–32. DOI: 10.1007/s12217-017-9571-8
7. Mogilevskii E. I., Shkadov V. Y. Stability analysis of a falling film flow down a plane with sinusoidal corrugations // *Fluid Dynamics.* 2018. Vol. 53 (3). P. 372–384. DOI: 10.1134/S0015462818030126
8. Snoeijer J.H., Andreotti B. Moving contact lines: scales, regimes, and dynamical transitions // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2013. Vol. 45. P. 269–292. DOI: 10.1146/annurev-fluid-011212-140734
9. Ren J., Duan F. Recent progress in experiments for sessile droplet wetting on structured surfaces // *Current Opinion in Colloid and Interface Science.* 2021. Vol. 53, 101425. DOI: 10.1016/j.cocis.2021.101425
10. Kashina M.A., Alabuzhev A. A. The forced oscillations of an oblate drop sandwiched between different inhomogeneous surfaces under AC vibrational force // *Microgravity Sci. Technol.* 2021. Vol. 33, 35. DOI: 10.1007/s12217-021-09886-4
11. Qiu J., Chen S., Di Y., Wang H., Lan L., Wang L. Prediction of droplet sliding on the continuity of the three-phase contact line // *Langmuir.* 2021. Vol. 37. P. 13038–13045. DOI: 10.1021/acs.langmuir.1c02102
12. Erbil H.Y. Dependency of contact angles on three-phase contact line: A review // *Colloids Interfaces.* V. 2021. Vol. 5, 8. DOI: 10.3390/colloids5010008
13. Pyankova M. A., Alabuzhev A. A. Influence of the properties of the plate surface on the oscillations of the cramped drop // *Phys. Fluids.* 2022. Vol. 34, 092015. DOI: 10.1063/5.0101011
14. Üçüncüoğlu R., Erbil H. Y. Water drop evaporation on slippery liquid-infused porous surfaces (SLIPS): effect of lubricant thickness, viscosity, ridge height, and pattern geometry // *Langmuir.* 2023. Vol. 39. P. 6514–6528. DOI: 10.1021/acs.langmuir.3c00471
15. Harvie D. J. E. Contact-angle hysteresis on rough surfaces: mechanical energy balance framework // *Fluid Mech.* 2024. Vol. 98, A17. DOI: 10.1017/jfm.2024.317.
16. Alabuzhev A. A. The influence of plate surface inhomogeneity on the oscillations of the confined gas bubble // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer.* 2024. Vol. 12. P. 45–57. DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2024049904
17. Hocking L. M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // *J. Fluid Mech.* 1987. Vol. 179. P. 253–266. DOI: 10.1017/S0022112087001514
18. Vinogradova O. I., Dubov A. L. Superhydrophobic textures for microfluidics // *Mendelev Commun.* 2012. Vol. 22. P. 229–236. DOI: 10.1016/j.mencom.2012.09.001

19. Alabuzhev A. A., Kashina M. A. Influence of surface properties on axisymmetric oscillations of an oblate drop in an AC electric field // Radiophysics and Quantum Electronics. 2019. Vol. 61. P. 589–602. DOI: 10.1007/s11141-019-09919-4
20. Guba S., Horváth B., Szalai I. Examination of contact angles of magnetic fluid droplets on different surfaces in uniform magnetic field // J. Magn. Magn. Mat. 2020. Vol. 498, 166181. DOI: 10.1016/j.jmmm.2019.166181
21. Shklyaev S., Straube A. V. Linear oscillations of a hemispherical bubble on a solid substrate // Phys. Fluids. 2008. Vol. 20, 052102. DOI: 10.1063/1.2918728
22. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V., Shklyaev S. Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis // Phys. Fluids. 2011. Vol. 23, 102105. DOI: 10.1063/1.3650280
23. Алабужев А. А. Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций // Вычисл. мех. сплош. сред. 2014. Т. 7, № 2. С. 151–161. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.16
24. Алабужев А. А. О влиянии внутреннего давления на колебания цилиндрического газового пузырька // Вестник Пермского университета. Физика. 2020. № 4. С. 51–62. DOI: 10.17072/1994-3598-2020-4-51-62
25. Картавых Н. Н., Шкляев С. В. О параметрическом резонансе полуцилиндрической капли на осциллирующей твердой подложке // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2007. Вып. 1 (6). С. 23–28.
26. Демин В. А. К вопросу о свободных колебаниях капиллярного моста // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2008. № 4. С. 28–37. DOI: 10.1134/S0015462808040042
27. Alabuzhev A. A. Oscillations and parametric instability of a cylindrical drop of a low-viscous liquid // Inter. J. Fluid Mech. Res. 2019. Vol. 46. P. 441–457. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.2019025743
28. Алабужев А. А., Любимов Д. В. Поведение цилиндрической капли при многочастотных вибрациях // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2005. №2. С. 18–28. DOI: 10.1007/s10697-005-0058-8
29. Иванцов А. О. Акустические колебания полу-сферической капли // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2012. Вып. 3 (21). С. 16–23.
30. Алабужев А. А. Устойчивость трансляционных колебаний зажатой капли маловязкой жидкости // Вестник Пермского университета. Физика. 2024. № 3. С. 50–59. DOI: 10.17072/1994-3598-2024-3-50-59
31. Miles J. W. The capillary boundary layer for standing waves // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 222. P. 197–205. DOI: 10.1017/S0022112091001052
32. Hocking L. M. Waves produced by a vertically oscillating plate // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 179. P. 267–281. DOI: 10.1017/S0022112087001526
33. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V. Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop // Phys. Fluids. 2009. Vol. 21, 072104. DOI: 10.1063/1.3174446
34. Ting C.-L., Perlin M. Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: an experimental investigation // J. Fluid Mech. 1995. Vol. 295. P. 263–300. DOI: 10.1017/S0022112095001960
35. Perlin M., Schultz W. W., Liu Z. High Reynolds number oscillating contact lines // Wave Motion. 2004. Vol. 40. P. 41–56. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2003.12.011
36. Xia Y., Steen P. H. Moving contact-line mobility measured // J. Fluid Mech. 2018. Vol. 841. P. 767–783. DOI: 10.1017/jfm.2018.105
37. Xia Y., Steen P. H. Dissipation of oscillatory contact lines using resonant mode scanning // npj Microgravity. 2020. Vol. 6, 3. DOI: 10.1038/s41526-019-0093-0
38. Ludwicki J. M., Kern V. R., McCraney J., etc. Is contact-line mobility a material parameter? // npj Microgravity. 2022. Vol. 8, 6. DOI: 10.1038/s41526-022-00190-y
39. McCraney J., Ludwicki J., Bostwick J., Daniel S., Steen P. Coalescence-induced droplet spreading: Experiments aboard the International Space Station // Phys. Fluids. 2022. Vol. 34, 122110. DOI: 10.1063/5.0125279
40. Sui Y., Ding H., Spelt P. D. M. Numerical simulations of flows with moving contact lines // Ann. Rev. Fluid Mech. 2014. Vol. 46. P. 97–119. DOI: 10.1146/annurev-fluid-010313-141338
41. Алабужев А. А. Продольные колебания цилиндрической капли в ограниченном объеме жидкости // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9, № 3. С. 316–330. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.3.26

References

1. Dussan V. E. B. On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamic contact lines. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1979, vol. 11, pp. 371–400. DOI: 10.1146/annurev.fl.11.010179.002103
2. Bonn D., Eggers J., Indekeu J., Meunier J. Wetting and spreading. *Rev. Mod. Phys.*, 2009, vol. 81, pp.739–805. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.739
3. Snoeijer J.H., Andreotti B. Moving contact lines: scales, regimes, and dynamical transitions. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2013, vol. 4, pp. 269–292. DOI: 10.1146/annurev-fluid-011212-140734
4. Ren J., Duan F. Recent progress in experiments for sessile droplet wetting on structured surfaces. *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, 2021, vol. 53, 101425. DOI: 10.1016/j.cocis.2021.101425

5. Erbil H. Y. The debate on the dependence of apparent contact angles on drop contact area or three-phase contact line: A review. *Surface Science Reports*, 2014, vol. 69, pp. 325–365. DOI: 10.1016/j.surfrep.2014.09.001
6. Alabuzhev A. A. Influence of heterogeneous plates on the axisymmetrical oscillations of a cylindrical drop. *Microgravity Sci. Technol.*, 2018, vol. 30, pp. 25–32. DOI: 10.1007/s12217-017-9571-8
7. Mogilevskii E. I., Shkadov V. Ya. Stability analysis of a falling film flow down a plane with sinusoidal corrugations. *Fluid Dynamics*, 2018, vol. 53, pp. 372–384. DOI: 10.1134/S0015462818030126
8. Snoeijer J.H., Andreotti B. Moving contact lines: scales, regimes, and dynamical transitions. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2013. Vol. 45. P. 269–292. DOI: 10.1146/annurev-fluid-011212-140734
9. Ren J., Duan F. Recent progress in experiments for sessile droplet wetting on structured surfaces. *Current Opinion in Colloid and Interface Science*. 2021, vol. 53, 101425. DOI: 10.1016/j.cocis.2021.101425
10. Kashina M. A., Alabuzhev A. A. The forced oscillations of an oblate drop sandwiched between different inhomogeneous surfaces under AC vibrational force. *Microgravity Sci. Technol.*, 2021, vol. 33, 35. DOI: 10.1007/s12217-021-09886-4
11. Qiu J., Chen S., Di Y., Wang H., Lan L., Wang L. Prediction of droplet sliding on the continuity of the three-phase contact line. *Langmuir*, 2021, vol. 37, pp. 13038–13045. DOI: 10.1021/acs.langmuir.1c02102
12. Erbil H.Y. Dependency of Contact angles on three-phase contact line: A review. *Colloids and Interfaces*, 2021, vol. 5, 8. DOI: 10.3390/colloids5010008
13. Pyankova M. A., Alabuzhev A. A. Influence of the properties of the plate surface on the oscillations of the cramped drop. *Phys. Fluids*, 2022, vol. 34, 092015. DOI: 10.1063/5.0101011
14. Üçüncüoğlu R., Erbil H. Y. Water drop evaporation on slippery liquid-infused porous surfaces (SLIPS): effect of lubricant thickness, viscosity, ridge height, and pattern geometry. *Langmuir*, 2023, vol. 39, pp. 6514–6528. DOI: 10.1021/acs.langmuir.3c00471
15. Harvie D. J. E. Contact-angle hysteresis on rough surfaces: mechanical energy balance framework. *J. Fluid Mech.*, 2024, vol. 98, A17. DOI: 10.1017/jfm.2024.317.
16. Alabuzhev A. A. The influence of plate surface inhomogeneity on the oscillations of the confined gas bubble. *Interfac. Phenom. Heat Transfer*, 2024, vol. 12, pp. 45–57. DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2024049904
17. Hocking L. M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 179, pp. 253–66. DOI: 10.1017/S0022112087001514
18. Vinogradova O. I., Dubov A. L. Superhydrophobic textures for microfluidics. *Mendeleev Commun.*, 2012, vol. 22, pp. 229–236. DOI: 10.1016/j.mencom.2012.09.001
19. Alabuzhev A. A., Kashina M. A. Influence of surface properties on axisymmetric oscillations of an oblate drop in an AC electric field. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2019, vol. 61, pp. 589–602. DOI: 10.1007/s11141-019-09919-4
20. Guba S., Horváth B., Szalai I. Examination of contact angles of magnetic fluid droplets on different surfaces in uniform magnetic field. *J. Magn. Magn. Mat.*, 2020, vol. 498, 166181. DOI: 10.1016/j.jmmm.2019.166181
21. Shklyayev S., Straube A. V. Linear oscillations of a hemispherical bubble on a solid substrate. *Phys. Fluids*, 2008, vol. 20, 052102. DOI: 10.1063/1.2918728
22. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V., Shklyayev S. Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis. *Phys. Fluids*, 2011, vol. 23, 102105. DOI: 10.1063/1.3650280
23. Alabuzhev A. A. Behavior of a cylindrical bubble under vibrations. *Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 151–161. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.16
24. Alabuzhev A.A. Effect of the internal pressure on oscillations of a cylindrical gas bubble. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2020, no. 4, pp. 51–62. DOI: 10.17072/1994-3598-2020-4-51-62
25. Kartaviih N. N., Shklyayev S. V. On the parametric resonance of a semicylindrical drop on an oscillating solid substrate. *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2007, no. 1(6), pp. 23–28. (In Russian).
26. Demin V. A. Problem of the free oscillations of a capillary bridge. *Fluid Dynamics*, 2008, vol. 43, no. 4, pp. 524–532. DOI: 10.1134/S0015462808040042
27. Alabuzhev A. A. Oscillations and parametric instability of a cylindrical drop of a low-viscous liquid. *Inter. J. Fluid Mech. Res.*, 2019, vol. 46, pp. 441–457. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.2019025743
28. Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V. Behavior of a cylindrical drop under multi-frequency vibration. *Fluid Dynamics*, 2005, vol. 40, pp. 183–192. DOI: 10.1007/s10697-005-0058-8
29. Ivantsov A. O. Acoustic oscillations of semispherical drop. *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2012, no. 3 (21), pp. 16–23.
30. Alabuzhev A. A. The stability of translational oscillations of a clamped drop of a low-viscosity liquid. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2024, no. 3, pp. 50–59. DOI: 10.17072/1994-3598-2024-3-50-59

31. Miles J. W. The capillary boundary layer for standing waves. *J. Fluid Mech.*, 1991, vol. 222, pp. 197–205. DOI: 10.1017/S0022112091001052
32. Hocking L. M. Waves produced by a vertically oscillating plate. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 179, pp. 267–281. DOI: 10.1017/S0022112087001526
33. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V. Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop. *Phys. Fluids*, 2009, vol. 21, 072104. DOI: 10.1063/1.3174446
34. Ting C.-L., Perlin M. Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: an experimental investigation. *J. Fluid Mech.*, 1995, vol. 295, pp. 263–300. DOI: 10.1017/S0022112095001960
35. Perlin M., Schultz W.W., Liu Z. High Reynolds number oscillating contact lines. *Wave Motion*, 2004, vol. 40, pp. 41–56. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2003.12.011
36. Xia Y., Steen P. H. Moving contact-line mobility measured. *J. Fluid Mech.*, 2018, vol. 841, pp. 767–783. DOI: 10.1017/jfm.2018.105
37. Xia Y., Steen P. H. Dissipation of oscillatory contact lines using resonant mode scanning. *npj Microgravity*, 2020, vol. 6, 3. DOI: 10.1038/s41526-019-0093-0
38. Ludwicki J. M., Kern V. R., McCraney J., etc. Is contact-line mobility a material parameter? *npj Microgravity*, 2022, vol. 8, 6. DOI: 10.1038/s41526-022-00190-y
39. McCraney J., Ludwicki J., Bostwick J., Daniel S., Steen P. Coalescence-induced droplet spreading: Experiments aboard the International Space Station. *Phys Fluids*, 2022, vol. 34, 122110. DOI: 10.1063/5.0125279
40. Sui Y., Ding H., Spelt P. D. M. Numerical simulations of flows with moving contact lines. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2014, vol. 46, pp. 97–119. DOI: 10.1146/annurev-fluid-010313-141338
41. Alabuzhev A. A. Axisymmetric oscillations of a cylindrical drop in the final volume of fluid. *Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 316–330. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.3.26

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Алабужев А. А. Влияние неоднородности поверхности подложки на продольные колебания капли в ограниченном объеме жидкости // Вестник Пермского университета. Физика. 2025. № 3. С. 43–52. doi: 10.17072/1994-3598-2025-3-43-52

Please cite this article in English as:

Alabuzhev A. A. The influence of the substrate surface heterogeneity on axisymmetric oscillations of a drop in a finite volume of liquid. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2025 no. 3 pp. 43–52. doi: 10.17072/1994-3598-2025-3-43-52

Сведения об авторах

Алексей Анатольевич Алабужев, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории вычислительной гидродинамики, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Ак. Королева, 1, Пермь, 614013, профессор кафедры теоретической физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614068

Author information

Aleksey A. Alabuzhev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Computational Hydrodynamics, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st. Perm, 614013, Russia; Professor, Department of Theoretical Physics, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia