

УДК 532.22
PACS 47.55.D-

К вопросу о левитации капли за счет испарения при тепловом взаимодействии с подложкой

Ф. В. Демин¹, В. А. Демин^{1,2}

¹ Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

² Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия
deminfv@yandex.ru

Рассматривается возможность левитации капли воды при наличии избыточного давления под ней за счет интенсивного испарения в результате теплового взаимодействия с твердой нагретой подложкой. Показано, что водяной пар, даже если он вытесняет воздух при навязывании условия постоянства плотности паровоздушной смеси, приводит к возникновению избыточного давления под каплей и, как следствие, может служить причиной ее левитации над подложкой. Численно методом конечных разностей найдены распределения давления, концентрации водяных паров и поле скорости паровоздушной смеси под каплей в режиме стационарного истечения. Определено расстояние между каплей и подложкой. Вычислена плотность потока пара, необходимая для удержания капли в равновесии.

Ключевые слова: капля; испарение; левитация

Поступила в редакцию 01.04.2025; после рецензии 13.05.2025; принята к опубликованию 19.05.2025

On a droplet levitation due to evaporation during thermal interaction with the substrate

F. V. Demin¹, V. A. Demin^{1,2}

¹ Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

² Perm State University, Perm, Russia
deminfv@yandex.ru

We study the possibility of levitation of a water droplet in the presence of excess pressure beneath it due to intensive evaporation resulting from thermal interaction with a solid heated substrate. It is shown that water vapor, even if it displaces air when the condition of constancy of the vapor-air mixture density is imposed, leads to the occurrence of excess pressure under the droplet and, as a consequence, can cause its levitation above the substrate. The distributions of pressure, water vapor concentration, and the velocity field of the vapor-air mixture under the droplet in the steady-state outflow regime were found numerically by the finite difference method. The distance between the droplet and the substrate was determined. The vapor flow density necessary to keep the droplet in equilibrium was calculated.

Keywords: droplet; evaporation; levitation

Received 01 April 2025; revised 13 May 2025; accepted 19 May 2025

doi: 10.17072/1994-3598-2025-2-27-36

1. Введение

Изучение физических процессов, связанных с поведением капельных объектов, имеет большое прикладное значение. Особенно часто приходится иметь дело с капельными системами в теплофизике [1]. Процессы горения различных видов топлива (включая многофазные) [2], работа систем охлаждения, физико-химические процессы перемешивания и, наоборот, разделение смесей на компоненты: в каждой из этих областей, так или иначе, приходится сталкиваться с капельными системами.

Ансамбли капель образуются при искусственном диспергировании жидкости и в естественных условиях в результате конденсационных процессов. Также появление капель практически всегда сопутствует процессам кипения [3]. В этом случае они могут появляться в результате гидродинамической неустойчивости больших объемов жидкости и их разрушения на многочисленные фрагменты, которые при сильном дроблении приобретают сферическую или близкую к ней форму.

При определенных условиях небольшие капли могут витать в воздухе [4] и даже находиться какое-то время в определенном положении в состоянии равновесия. В этом случае капли приобретают более сложную форму (рис. 1). Физические условия, которые задают движение капли или определяют нахождение ее в равновесии, сильно разнятся. Отрыв капли от стенки сосуда в ходе кипения или витание капли в потоке воздуха, очевидно, требуют принципиально разных подходов к описанию указанных явлений. Отдельный интерес представляют задачи, касающиеся капель соприкасающихся с подложкой, поведение которых теперь обуславливается смачиваемостью поверхностей и динамикой краевого угла [5, 6].

Из всего разнообразия задач, посвященных капельным объектам, остановимся на вопросе о возможности левитации капли за счет «одностороннего» парообразования вблизи горячей поверхности, когда под каплей создается избыточное давление паровоздушной смеси, удерживающее ее определенное время от соприкосновения с подложкой.

2. Постановка задачи

2.1. Геометрия задачи

Пусть рассматривается капля жидкости, лежащая на твердой поверхности. По мере приближения к пороговой ситуации, когда парообразование на границе раздела становится достаточно интен-

сивным, между каплей и подложкой может появиться тонкий слой пара, который будет в состоянии создавать подъемную силу, способную удерживать каплю в равновесии (рис. 1). Наличие стационарной прослойки пара между каплей и подложкой связано с тем, что нагрев капли становится настолько сильным, что этот пар не успевает покидать пространство из-под капли. В этом случае избыточное давление за счет парообразования поддерживает каплю в состоянии левитации.



Рис. 1. Экспериментальная фотография левитирующей капли; взята из обзорной работы [4]. Согласно описанию капля находится в подвешенном состоянии над металлической пластиной при температуре $T = 300^\circ\text{C}$

В результате того, что капля не соприкасается с подложкой, имеет место кризис теплопередачи, т.к. слой пара обладает значительно меньшей теплопроводностью, нежели жидкость. Очевидно, что этот эффект может оказывать значительное влияние на тепловую обстановку в микрофлюидических системах [3].

2.2. Условие равновесия капли

Выясним условия левитации капли модельной формы над гладкой поверхностью (рис. 2) вследствие интенсивного парообразования за счет теплового взаимодействия с нагретой подложкой. В своих рассуждениях будем следовать следующей логике: если по какой-то причине нижняя часть капли перегрета по отношению к окружающему воздуху, то с этой поверхности происходит интенсивное испарение вниз к подложке.

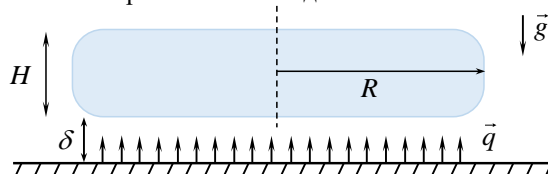


Рис. 2. Левитация капли в поле тяжести. Тепловой поток \vec{q} со стороны подложки обеспечивает более интенсивное испарение в пространство между каплей и подложкой

Парообразование может оказаться настолько сильным, что избыточное давление под ней будет способно удержать каплю во взвешенном состоянии. Пусть общее давление под каплей массой m состоит из двух частей: парциальных давлений воздуха p_0 и пара p_v . Условие равновесия, проистекающее из равенства сил тяжести и избыточного давления пара, имеет вид

$$mg = \rho_w Vg = p_v \pi R^2. \quad (1)$$

Если рассматривать каплю как двухосный эллипсоид объемом $V = 4/3 \pi abc$, то в этом случае $a = b = R$, а $2c = H$ (толщина капли), ρ_w – плотность воды, p_v – давление водяного пара. В результате получаем избыточное давление под каплей, уравновешивающее силу тяжести

$$p_v = \frac{2}{3} \rho_w g H. \quad (2)$$

Иными словами, закономерно имеем, что чем больше толщина капли, тем большее парциальное давление пара требуется, чтобы удержать каплю во взвешенном состоянии. Как видно, от поперечного размера капли это давление не зависит. В дополнение отметим, что в данном балансе сил не учитывается изменение массы капли на больших временах.

Теперь получим выражение для высоты δ , на которой находится капля. Как известно, испарение с поверхности жидкости определяется формулой для плотности потока пара J , известной как закон Герца – Кнудсена [7]. По определению плотность потока – это масса вещества, переносимая через единицу площади за единицу времени:

$$J = \frac{1}{S} \frac{dm}{dt}. \quad (3)$$

Здесь dm – это масса пара, переносимая через поверхность нижней части капли площадью S за время dt . С другой стороны, в стационарных условиях количество пара, рождающееся в процессе испарения на нижней поверхности, должно быть равно выходящему из-под капли за единицу времени. Выход пара из-под капли происходит через ободок площадью $2\pi R\delta$, где δ – высота этого ободка (рис. 2), а $2\pi R$ – его длина. Скорость представим себе как расход некоторого флюида в результате просачивания пара через воздушную среду под действием сформировавшегося градиента избыточного давления. Иными словами, будем использовать подход, обусловленный теорией слабо неравновесных процессов, в рамках которого поток пропорционален термодинамической силе. В нашем случае в роли последней выступает градиент избыточного давления пара. Эту связь можно интерпретировать как закон Дарси [8, 9], который задает скорость истечения пара пропорциональную градиенту давления:

$$\vec{v} = -\frac{\kappa}{\eta} \nabla p_v. \quad (4)$$

Здесь κ – проницаемость воздуха, η – динамическая вязкость пара. Значение динамической вязкости можно вычислить с хорошей степенью точности из законов молекулярно-кинетической теории [10]. Пусть для простоты при выходе пара из-под капли у вектора скорости имеется только одна радиальная компонента. Тогда закон Дарси (4) для радиальной компоненты скорости дает

$$v_r = -\frac{\kappa}{\eta} \frac{\partial p_v}{\partial r}. \quad (5)$$

Далее домножим это равенство слева и справа на площадь ободка с учетом того, что по определению $v_r = dr/dt$ (r – радиальная координата)

$$2\pi R\delta \frac{dr}{dt} = -2\pi R\delta \frac{\kappa}{\eta} \frac{\partial p_v}{\partial r}. \quad (6)$$

Слева имеем объем газа, проходящий через боковую границу цилиндрической области высотой δ за единицу времени. Отбросим знак минус в правой части равенства (6) и далее это соотношение будем рассматривать в контексте сравнения модулей входящих туда величин. Умножим левую и правую части на плотность пара

$$\rho_v \frac{dV}{dt} = 2\pi R\delta \rho_v \frac{\kappa}{\eta} \frac{\partial p_v}{\partial r}. \quad (7)$$

В результате получим выражение для переноса массы пара за единицу времени

$$\frac{dm}{dt} = 2\pi R\delta \rho_v \frac{\kappa}{\eta} \frac{\partial p_v}{\partial r}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в уравнение (3), получим равенство

$$J = \frac{2\pi R\delta \rho_v \kappa}{S} \frac{\partial p_v}{\partial r}. \quad (9)$$

В дополнение учтем в правой части уравнения (9) дополнительный диффузионный поток из-под капли

$$J = \frac{2\pi R\delta}{S} \left(\frac{\rho_v \kappa}{\eta} \frac{\partial p_v}{\partial r} + J_D \right). \quad (10)$$

Поток массы за счет диффузии J_D определяется законом Фика

$$\vec{J}_D = -m_0 D \nabla n,$$

где m_0 – масса одной частицы, n – концентрация частиц (число частиц в единице объема), D – коэффициент диффузии. Учитывая, что формула молекулярно-кинетической теории газов $n = p/kT$ справедлива в том числе для парциального давления, приходим к равенству:

$$\vec{J}_D = -\frac{\mu D}{R_g T} \nabla p_v.$$

Здесь R_g – универсальная газовая постоянная, которая по определению равна $R_g = N_a k$; k – константа Больцмана, N_a – постоянная Авогадро; μ – мо-

лярная масса воды. В результате с учетом вида поправочного слагаемого закон сохранения (10) принимает форму

$$J = \frac{2\pi R\delta}{S} \left(\frac{\rho_v \kappa}{\eta} + \frac{\mu D}{RT} \right) \frac{\partial p_v}{\partial r}. \quad (11)$$

Как уже было упомянуто, поток пара с поверхности жидкости зависит однозначно от ее температуры и описывается законом Герца – Кнудсена. А именно, в нашем случае J – это параметр задачи, являющийся функцией только температуры и зависящий также от характеристик сред: испаряющейся жидкости и окружающего газа. Таким образом, из уравнения (11) можно выразить высоту δ , на которой будет парить капля

$$\delta = \frac{JR}{2} \left(\frac{\mu D}{R_g T} + \frac{\kappa \rho_v}{\eta} \right)^{-1} \left(\frac{\partial p_v}{\partial r} \right)^{-1}. \quad (12)$$

Производная $\partial p_v / \partial r$ вычисляется вдоль поверхности ободка и для нее можно сделать грубую оценку снизу, заменив ее на p_v / R . Принимая во внимание, что площадь соприкосновения капли с подложкой равна $S = \pi R^2$, с учетом (2) получаем более простую формулу

$$\delta = \frac{3JR^2}{4\rho_w g H \left(\frac{\mu D}{R_g T} + \frac{\kappa \rho_v}{\eta} \right)}. \quad (13)$$

Видно, что толщина паровой прослойки δ вполне закономерно пропорциональна плотности потока пара J , а также обратно пропорциональна толщине капли H и плотности воды ρ_w .

3. Формула Герца – Кнудсена

Однако на самом деле уравнения (12) или (13) не разрешены относительно δ , т.к. плотность потока пара J с поверхности сама зависит от высоты, на которой парит капля. В результате для ответа на поставленный вопрос требуется организация некоторой итерационной процедуры.

Строгий и достаточно универсальный закон, описывающий количественно испарение жидкости, исторически первым экспериментально установил Герц, который сделал попытку рассмотреть этот процесс в чистом виде без воздействия осложняющих факторов, изучая испарение ртути в вакуум. Чуть позднее Кнудсен расширил его на случай обратного процесса конденсации. Закон Герца–Кнудсена определяет плотность потока испаряющейся жидкости (конденсирующегося газа) при заданных температурах поверхности и окружающей среды. Следуя классической обзорной работе [7], получим более точную формулу для плотности потока частиц испаряющейся жидкости с учетом диффузии паров через окружающий газ.

Пусть на поверхности жидкости имеем концентрацию насыщения n_S . Приповерхностный слой по своим свойствам сильно отличается от свойств

жидкости, поэтому концентрацию в нем обозначим n_F . Очевидно, что для этих концентраций справедливо неравенство $n_S > n_F$. За счет диффузии через посторонний газ, который окружает жидкость, концентрация пара по мере удаления от поверхности продолжает уменьшаться (рис. 3). На расстоянии R эта концентрация становится равной n_R .

Ключевым является утверждение, согласно которому кинетика переноса в приповерхностном слое отличается от диффузионной. Поэтому имеем два разных закона для плотности потока частиц в зависимости от расстояния до поверхности жидкости:

$$i = \frac{\alpha v}{4} (n_S - n_F), \quad i = D \frac{n_F - n_R}{R}. \quad (14)$$

Первая формула – это, собственно, знаменитый закон Герца–Кнудсена, вторая – закон классической диффузии Фика вне пограничного слоя. Здесь i – число молекул, испаряющееся за единицу времени с единицы площади, D – коэффициент диффузии пара через посторонний газ вдали от поверхности жидкости, α – так называемый коэффициент конденсации.

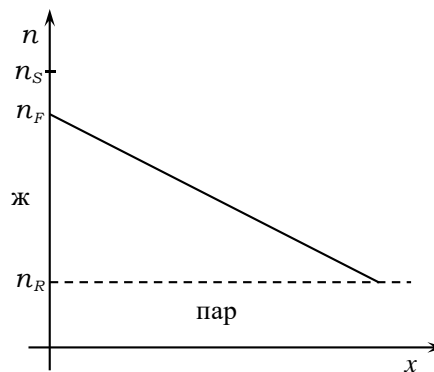


Рис. 3. Диаграмма плотности потока частиц в ходе испарения жидкости

Отметим, что для плотности потока частиц справедлива размерность

$$i \left[\frac{\text{число мол.}}{\text{м}^2 \text{сек}} \right].$$

Вопрос о значении феноменологического коэффициента α до сих пор дискутируется по причине того, что по своему смыслу он отражает наличие многочисленных осложняющих факторов в процессе испарения-конденсации [11]. В самом простейшем случае он принимается равным единице. Однако в той же работе [11] указывается, что для воды он может принимать значение $\alpha = 0.02$. Этот факт позволит существенно откорректировать дальнейшие количественные результаты. Также в закон Герца–Кнудсена входит среднеарифметическая скорость v , которая, согласно законам молекулярно-кинетической теории, определяется формулой:

$$v = \sqrt{8R_g T / \pi \mu}.$$

Приведенное выше соотношение содержит следующие параметры: T – температура поверхности испарения, μ – молярная масса испаряющейся жидкости.

Вклад диффузии в фазовый переход является существенным. На внешней границе приповерхностного слоя потоки должны быть равны. Иными словами, приходим к уравнению

$$\frac{\alpha v}{4}(n_s - n_r) = D \frac{n_r - n_F}{R}. \quad (15)$$

Выразим отсюда концентрацию на внешней границе приповерхностного слоя

$$n_F = \frac{\frac{\alpha v}{4} n_s + \frac{D}{R} n_r}{\frac{D}{R} + \frac{\alpha v}{4}}.$$

В некотором смысле эта величина представляет собой средневзвешенное значение двух концентраций n_s и n_r . Далее подставим это выражение обратно в формулу для плотности потока частиц в (14) и приведем подобные.

Таким образом, имеет место следующее выражение для искомого значения плотности потока частиц

$$i = \frac{\alpha v}{4} \frac{(n_s - n_r)}{1 + \frac{\alpha v R}{4 D}}. \quad (16)$$

Подставим в формулу (16) значение среднеарифметической скорости и выразим концентрации n_s и n_r через уравнение состояния идеального газа. Окончательно в обобщенной форме соотношение для плотности потока частиц с учетом специфики нашей задачи имеет вид:

$$i = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi m_0 k T}} \frac{p_s - p_r}{\left(1 + \frac{\alpha v R}{4 D}\right)}, \quad (17)$$

Помимо уже определенных ранее величин в формулу (17) входят m_0 – масса одной молекулы испаряющейся жидкости, p_s , p_r – соответственно, давление насыщенного пара и давление на расстоянии R от оси симметрии капли.

В ходе дальнейших расчетов нам понадобится выражение для плотности потока в терминах массы жидкости, испаряющейся за единицу времени с единицы площади поверхности. Согласно очевидному соотношению $J = m_0 i$ из формулы (17) окончательно следует

$$J = \alpha \sqrt{\frac{\mu}{2\pi R_s T}} \frac{p_s - p_r}{\left(1 + \frac{\alpha v R}{4 D}\right)} \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{сек}} \right], \quad (18)$$

Из этой формулы видно, что при равенстве давлений на поверхности капли и на выходе из-под нее $p_s = p_r$ плотность потока пара закономерно обращается в ноль. Добавка в знаменателе, связанная с влиянием диффузии через посторонний газ, становится тем больше, чем меньше значение

принимает коэффициент диффузии. Эта зависимость также очевидна, т.к. с уменьшением коэффициента диффузии молекулам пара сложнее преодолевать диффузионный барьер, в результате процесс испарения тормозится.

4. Уравнение для избыточного давления

Как уже было отмечено выше, формула (12) или ее упрощенный вариант (13) не позволяют напрямую вычислить искомую величину δ . Причина заключается в том, что плотность потока пара с поверхности жидкости зависит от плотности несущей среды (воздуха), в которой происходит испарение, и концентрации пара в приповерхностном слое. В то же время распределение паров воды под каплей зависит от высоты, на которой находится капля. А именно, закономерно ожидать, что чем выше находится капля, тем большее количество пара выходит из-под нее в окружающее пространство, и вследствие закона сохранения массы тем сильнее должно быть парообразование с нижней поверхности капли, чтобы имело место равновесие. Таким образом, фактически задача заключается в том, чтобы рассчитать поле давления пара под каплей, согласованное с источником и стоком.

При выводе уравнения для давления пара под каплей будем следовать работам [12, 13], в которых рассматривалась похожая задача о высокотемпературной фильтрации паров кремния в условиях среднего вакуума через несущую среду, в роли которой выступал инертный газ аргон. В нашем случае имеет место фильтрация водяного пара через несущий газ, роль которого играет воздух. Будем предполагать, что в рассматриваемых условиях помимо диффузионного присутствует дополнительный конвективный механизм переноса. Общее уравнение транспорта примеси и несущего газа как сплошной среды с учетом этого фактора записывается в виде [14]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) n = D \Delta n, \quad (19)$$

где \vec{V} – макроскопическая (среднемассовая) скорость физически малого элемента газа, n – концентрация молекул.

Главной проблемой при использовании уравнения (19) является вопрос о его замыкании. В рамках механики сплошных сред динамика флюида с учетом вязкости определяется уравнением Навье–Стокса. В трехмерном случае это три нелинейных дифференциальных уравнения в частных производных для трех компонент скорости $V_x(t)$, $V_y(t)$, $V_z(t)$. В эти уравнения для компонент скорости входят еще две неизвестные величины – давление и переменная плотность, которые тоже являются искомыми полями и подлежат определению в ходе решения задачи. В результате к системе уравнений

для скорости добавляются еще два: закон сохранения массы в дифференциальной форме и уравнение состояния. Таким образом, итоговая система уравнений становится чрезвычайно громоздкой и трудноразрешимой.

На сегодняшний день прямое численное моделирование рассматриваемых процессов в полной трехмерной постановке весьма затруднительно. Поэтому попытаемся сформулировать задачу в более простой постановке: с одной стороны, необходимо учесть все физические факторы, важные для адекватного описания рассматриваемого процесса, а с другой стороны – избежать использования слишком сложных моделей, чтобы задача решалась за разумное время и не требовала излишних вычислительных мощностей.

Далее рассматриваются установившиеся процессы, поэтому для описания фильтрации паров воды через несущий газ, в роли которого выступает воздух, предлагается использовать закон Дарси (4). Этот закон описывает стационарную фильтрацию флюида через пористую среду в результате компенсации наложенного извне градиента давления и силы вязкого трения. Эксперименты дают следующее значение для динамической вязкости водяного пара в ближайшей окрестности исследуемой области температур: при $t = 90^\circ\text{C}$ имеем $\eta = 1.2 \cdot 10^{-5}$ Па·с [15].

Пусть среда представляет собой систему из небольших твердых сферических центров, которые омываются гидродинамическим потоком. Среднее межмолекулярное расстояние в воздухе по порядку величины равно длине свободного пробега

$$l = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 370}{\sqrt{2}\pi (3.7 \cdot 10^{-10})^2 10^5} = 8.3 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

Давление и температура здесь равны соответственно $p = 1$ атм, $T = 370$ К. Однако длина свободного пробега оказывается все равно много больше размеров самой молекулы. Таким образом, объем всех молекул воздуха при условиях, близких к указанным, весьма мал по отношению ко всему занимаемому объему, поэтому пористость такой среды близка к единице

$$\phi = 1 - \frac{v_0 N}{V} = 1 - v_0 n = 1 - v_0 \frac{p}{kT} = 0.9995.$$

Здесь ϕ – пористость несущей среды (воздух), v_0 – объем одной молекулы, N – число молекул в объеме V . В качестве среднего значения размера частиц воздуха взят эффективный диаметр молекулы азота $d = 3.7 \cdot 10^{-10}$ м (0.37 нм).

Для оценки проницаемости воздуха как пористой среды воспользуемся формулой Козени–Кармана. Как было показано ранее, эта формула имеет в теории пористых сред широкое применение и выводится из самых общих геометрических соображений. В результате получаем

$$\kappa = \frac{\phi^3 d^2}{(1 - \phi)^2} = 5.8 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2.$$

Здесь d – характерный размер обтекаемого препятствия. В нашем случае в роли пористой среды выступает воздух, и для определенности взято числовое значение эффективного диаметра молекулы азота.

Под каплей, за счет испарения с нижней части ее поверхности и выноса пара в окружающую среду через боковые грани цилиндрического слоя воздуха, где предполагается его полное рассеяние, возникает градиент плотности водяных паров. Таким образом, под каплей возникает избыточное давление, поддерживающее ее в состоянии левитации. С другой стороны, избыточное давление газа, пропорциональное плотности водяного пара, выступает в роли дополнительной движущей силы, инициирующей конвективный массоперенос пара помимо диффузии. Парциальное давление паров воды согласно уравнению состояния идеального газа равно $p_v = n_v kT$, где $n_v = N_v/V$ – число избыточных молекул водяного пара в единице объема. Выразим концентрацию n_v через давление p_v и преобразуем уравнение (19) с учетом того, что среднемассовая скорость по определению равна

$$\vec{V} = \frac{\rho_a \vec{v}_a + \rho_v \vec{v}_v}{\rho_a + \rho_v} = \frac{\rho_v \vec{v}_v}{\rho_a + \rho_v} \approx \frac{\rho_v \vec{v}_v}{\rho}.$$

Здесь ρ – полная плотность воздуха вместе с водяными парами. В нашем приближении воздух полагается неподвижным. Подставляя это выражение в (19), исключая тем самым из обобщенного уравнения переноса скорость, получаем окончательно уравнение для избыточного давления пара

$$\frac{\partial p_v}{\partial t} - \frac{\kappa \rho_v}{\eta \rho_a} (\nabla p_v)^2 = D \Delta p_v. \quad (20)$$

Теперь это дифференциальное уравнение в частных производных с нелинейностью типа квадрата градиента избыточного давления для одной неизвестной. Отметим, что подобные уравнения параболического типа, описывающие диффузию, с нелинейностями, которые квадратичны градиенту концентрации, довольно часто встречаются в различных областях физики. Так, в работах [12, 13] показано, что нелинейное слагаемое данного вида довольно сильно меняет транспортные диффузионные свойства среды, в роли которой выступает разреженный инертный газ аргон, и позволяет объяснить аномально сильный перенос паров кремния от зеркала расплава до углеродного силицируемого изделия. Предполагается, что уравнение (20) дает возможность в некотором приближении решать нестационарные задачи о распределении избыточного давления паров воды в воздухе с неизменной плотностью.

В дальнейшем удобно ввести так называемый параметр конвективного переноса, имеющий в отличие от работ [12,13] другую размерность нежели коэффициент диффузии:

$$D_c = \frac{\kappa \rho_v}{\eta \rho_a} \left[\frac{\text{м}^2}{\text{Па} \cdot \text{с}} \right]. \quad (21)$$

Иными словами, теперь следует более осторожно сравнивать общий вклад в изменение давления за счет конвективного переноса и диффузии.

5. Граничные условия

Уравнение (19) с помощью связи (4) и уравнения состояния было переформулировано в терминах давления (20). На давление зачастую чрезвычайно сложно ставить граничные условия. В частности, именно поэтому полную систему уравнений гидродинамики не так часто решают в терминах давления и скорости. Покажем, что в нашем случае имеет смысл решать задачу путем нахождения поля избыточного давления не только по причине того, что именно давление под каплей определяет условие ее равновесия, но и вследствие возможности определения разумных краевых условий для уравнения (20).

На верхней границе нам необходимо знать величину потока пара. Как известно, именно распределение давления является центральным в законе Герца–Кнудсена и определяет значение плотности потока. Плотность потока в посторонний газ описывается формулой (18). Все величины в этой формуле определены. Таким образом, на верхней границе имеет место эффективное граничное условие в виде избыточного давления p_e , поддерживающего при данной температуре каплю в равновесии

$$z = H: \quad p_v = p_e. \quad (22)$$

На оси симметрии ставится стандартное условие равенства нулю производной по радиальной координате, что автоматически отсеивает решения с сингулярностью на оси симметрии

$$r = 0: \quad \frac{\partial p_v}{\partial r} = 0. \quad (23)$$

На нижней горизонтальной границе (ввиду того, что она твердая) ставится условие непротекания $v_z = 0$. Для описания фильтрации пара через воздух используется закон Дарси (4), который позволяет корректно определить давление на нижней границе

$$z = 0: \quad \frac{\partial p_v}{\partial z} = 0. \quad (24)$$

На правой вертикальной границе имеет место ненулевая скорость вытекания пара. Для простоты положим на выходе из-под капли условие, описывающее модельным образом ситуацию, когда избыточное давление паровоздушной смеси на бесконечности асимптотически убывает до

атмосферного по закону $\sim 1/r^2$. Тогда для избыточного давления пара p_v после «сшивания» соответствующих зависимостей и их производных на границе раздела областей получаем

$$r = R: \quad p_v = -\frac{R}{2} \frac{\partial p_v}{\partial z}. \quad (25)$$

Таким образом, имеем обоснованный и достаточно простой набор граничных условий (23)–(25) для уравнения параболического типа с нелинейностью типа квадрата градиента избыточного давления.

6. Метод расчета и итерационная процедура

Как уже отмечалось ранее, система самосогласована в том смысле, что чем сильнее парообразование, тем выше капля будет находиться, и это должно отражаться на распределении давления. Однако, в свою очередь, это обуславливает обратное влияние на процесс испарения. Иными словами, в системе имеется обратная связь. Таким образом, приходим к стандартной итерационной задаче, которая включает следующие этапы: 1) задание начальной высоты; 2) вычисление методом конечных разностей поля давления под каплей; 3) вычисление плотности потока J с поверхности капли и производной от давления на открытой границе расчетной области; 4) определение нового значения δ для имеющихся J и $\partial p_v / \partial r$. Математически это означает, что необходимо найти корни неявной функциональной зависимости

$$f(\delta) = \frac{JR}{2} \left(\frac{\mu D}{R_g T} + \frac{\kappa \rho_v}{\eta} \right)^{-1} \left(\frac{\partial p_v}{\partial r} \right)^{-1} - \delta.$$

В нашем случае нет необходимости во временной оптимизации процедуры, поэтому корни вычисляются простейшим и надежным методом половинного деления [16].

Расчет поля давления (процедура внутри основного цикла) производился в цилиндрических координатах на основе эволюционного уравнения (20) совместно с граничными условиями (22)–(25). Численное моделирование осуществлялось методом конечных разностей в соответствии с явной схемой [17, 18]. Стационарный режим испарения находился методом установления. Использовалась разностная схема первого порядка точности по времени с шагом «вперед». Диффузионное слагаемое в уравнение расписывалось в соответствии с формулами второго порядка точности. Конвективное слагаемое (квадратичное по градиенту давления) аппроксимировалось конечными разностями первого порядка точности «против потока». Шаг по времени подбирался из соображений устойчивости численной схемы в соответствии с оценочной формулой [17, 18] (критерий Куранта). Коли-

чество узлов по радиальной и аксиальной координатам выбиралось равным $N_1 = 141$, $N_2 = 35$.

7. Результаты численного моделирования и обсуждение

Численное моделирование проводилось для следующего набора параметров: коэффициент диффузии $D = 4.9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, длинная полуось капли $R = 1.06 \text{ мм}$. Избыточное давление непосредственно под каплей, необходимое для поддержания капли в состоянии равновесия $p_e = 8.5 \text{ Па}$, что соответствует массе капли $m = 5 \text{ мг}$. Используемая в расчетах масса капли согласуется с данными эксперимента [2]. Константа испарения-конденсации полагается равной $\alpha = 1$, параметр конвективного переноса – $D_c = 6 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Па} \cdot \text{с}$. Расчеты показывают, что установление давления под каплей происходит ожидаемо быстро, за время порядка 10 мкс. За это же время осуществляется выход на стационарный режим испарения, интенсивность которого характеризуется плотностью потока пара (рис. 4).

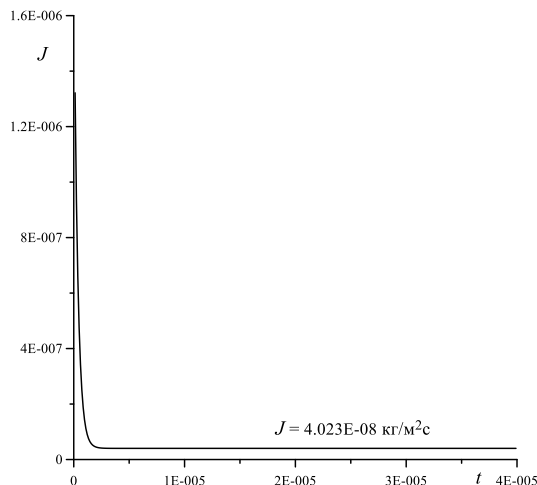


Рис. 4. Плотность потока пара в зависимости от времени. Над кривой указано асимптотическое значение плотности потока

Характерное распределение давления пара под каплей изображено на рис. 5. Видно, что оно занимает практически равномерно все пространство под каплей. Давление резко понижается примерно на 2% только на выходе из-под капли. Однако этого достаточно, чтобы удержать каплю в равновесии. С другой стороны, отметим, что, хотя визуально это незаметно, но, тем не менее имеется небольшая количественная разница в давлении строго под каплей и на подложке. Как и должно быть, на поверхности капли, где происходит испарение, устанавливается чуть большее давление, чем внизу, вблизи подложки.

Расчет дает высоту, на которой должна находиться в равновесии такая капля, $\delta = 6.6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$. Ввиду того, что избыточное давление пара практи-

чески постоянно под каплей его макроскопическое движение к периферии происходит относительно медленно. Поле скорости, направленное противоположно градиенту давления, представлено на рис. 6.

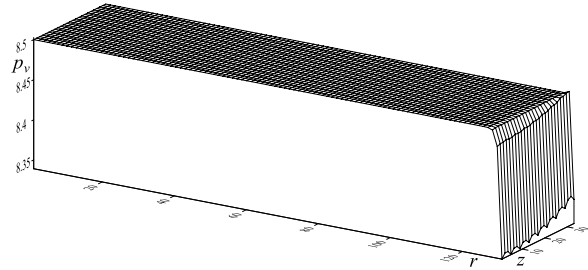


Рис. 5. Распределение избыточного давления пара под каплей. Масштабы по радиальной и аксиальной координатам не соблюдены. Соотношение размеров прослойки пара определяется числом узлов

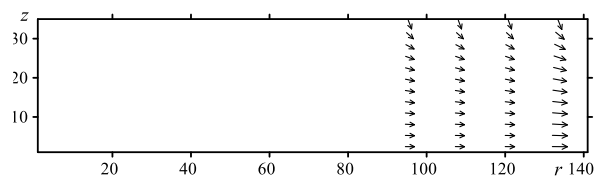


Рис. 6. Перемасштабированное двумерное поле скорости паров воды под каплей на момент установления

Наибольшее значение скорости пар имеет на выходе из-под капли.

На рис. 1 приводится экспериментальная фотография левитирующей капли с реальными размерами капли и пропорциями, т.е. поперечный диаметр капли, ее высота и расстояние до подложки находятся в легко оцениваемой на глаз пропорции. Капля эта находится над сильно перегретой подложкой. Тем не менее видно, что диаметр капли больше, чем расстояние между каплями и подложкой, примерно в 50 раз. При диаметре капли 2 мм расстояние между каплями и подложкой – 40 мкм. В нашем случае капля имеет значительно более низкую температуру (ниже точки кипения воды), в результате при диаметре 2 мм расстояние между каплями и подложкой составляет примерно 7 мкм. Этот результат вполне закономерен. При уменьшении скорости испарения в разы синхронно должно уменьшаться и расстояние между каплями и подложкой.

В дополнение заметим, что представленная физико-математическая модель справедлива для испарения капли чуть ниже точки фазового перехода [1]. Взрывное парообразование в результате фазового перехода первого рода остается за рамками рассматриваемой модели.

8. Заключение

Численное моделирование, выполненное для реалистичных параметров задачи, показывает, что при описанных выше условиях капля может парить некоторое время над подложкой без соприкосновения с ней. Равновесное положение между сплюсненной каплей радиусом 1.06 мм и подложкой отвечает расстоянию равному 6.6 мкм и, очевидно, значительно превышает предел, при котором существенны силы ван-дер-ваальсового притяжения. Адгезионные процессы в рассматриваемых условиях не существенны. Представляется, что сформулированная постановка задачи не носит экзотический характер, поэтому существование капли в подобном состоянии может наблюдаться в естественных условиях.

Список литературы

1. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979. 416 с.
2. Феоктистов Д. В., Кузнецов Г. В., Абедтазехбади А., Орлова Е. Г., Бондарчук С. П., Дорожкин А. В. Повышение энергоэффективности систем охлаждения энергонасыщенного оборудования путем смещения кризиса теплообмена второго рода в область более высоких температур // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2023. Т. 334. № 4. С. 72-88.
3. Vakarelski I. U., Patankar N. A., Marston J. O., Chan D. Y. C., Thoroddsen S. T. Stabilization of Leidenfrost vapour layer by textured superhydrophobic surfaces // Nature. 2012. Vol. 489. P. 274-277.
4. Ajaev V.S., Kabov O.A. Levitation and self-organization of droplets // Annual Review of Fluid Mechanics. 2021. Vol. 53. P. 203-225.
5. Shklyaev S. V., Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V., Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop, Phys. Fluids. 2009. Vol. 21, 072104.
6. Alabuzhev A. A., Kolupaev V. S. The effect of substrate surface on the dynamics of sessile drop under axisymmetric vibrations // Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2021. Vol. 9, N. 1, P. 75-85.
7. Кнаке О., Странский И. Н. Механизм испарения // Успехи физических наук. 1959. Т. 68. Вып. 6. С. 261-305.
8. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.: Гостехиздат. 1947. 244 с.
9. Nield D. A., Bejan A. Convection in Porous Media. New York: Springer, 2006. 654 p.
10. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1961. 929 с.
11. Bond M., Struchtrup H. Mean evaporation and condensation coefficients based on energy depend-

ent condensation probability // Physical Review E. 2004. V. 70, 061605.

12. Демин В. А., Демина Т. В., Марышев Б. С. Физико-математическая модель переноса газообразного кремния в ходе высокотемпературного силицирования углеродных композитных материалов // Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 3. С. 48-55.
13. Агеева М. В., Демин В. А., Демина Т. В. Физико-математическая модель доставки паров кремния в ходе высокотемпературного силицирования пористых углеродных материалов // Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. 2024. Т. 18 (3). С. 49-61.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики, Т. 6. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001. 736 с.
15. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей // М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры. 1963. 708 с.
16. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука. 1978. 512 с.
17. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
18. Тарунин Е. Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 228 с.

References

1. Kutateladze S. S. *Fundamentals of Heat Transfer Theory*. Moscow: Atomizdat. 1979. 416 p. (In Russian).
2. Feoktistov D. V., Kuznetsov G. V., Abedtazehabadi A., Orlova E. G., Bondarchuk S. P., Dorozhkin A. V. Increasing the energy efficiency of cooling systems for energy-saturated equipment by shifting the second kind heat transfer crisis to the higher temperature region. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2023, vol. 334, no. 4, pp. 72-88.
3. Vakarelski I. U., Patankar N. A., Marston J. O., Chan D. Y. C., Thoroddsen S. T. Stabilization of Leidenfrost vapour layer by textured superhydrophobic surfaces. *Nature*, 2012, vol. 489, pp. 274-277.
4. Ajaev V. S., Kabov O. A. Levitation and self-organization of droplets. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2021, vol. 53, pp. 203-225.
5. Shklyaev S. V., Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V., Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop, *Phys. Fluids*, 2009, vol. 21, 072104.
6. Alabuzhev A. A., Kolupaev V. S. The effect of substrate surface on the dynamics of sessile drop under axisymmetric vibrations. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, 2021, vol. 9, no. 1, pp. 75-85.

7. Knake O., Stranski I. N. The mechanism of evaporation. *Progress in Metal Physics*, 1956, vol. 6, pp. 181–235.
8. Leibenzon L. S. *Motion of Natural Liquids and Gases in a Porous Medium*. Moscow: Gostechizdat. 1947. 244 p. (In Russian).
9. Nield D.A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. New York: Springer. 2006. 654 p.
10. Hirschfelder J. O., Curtiss Ch. F., Bird R. B. *Molecular Theory of Gases and Liquids*. New York: Wiley, 1954. 1219 p.
11. Bond M., Struchtrup H. Mean evaporation and condensation coefficients based on energy dependent condensation probability. *Physical Review E*, 2004, vol. 70, 061605.
12. Demin V. A., Demina T. V., Maryshev B. S. Physical and mathematical model of gaseous silicon transfer during high-temperature siliconization of carbon composite materials. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2022, No. 3, pp. 48–55.
13. Ageeva M. V., Demin V. A., Demina T. V. Physical and mathematical model of the silicon vapor transport during high-temperature silicification of a porous carbon media. *Powder Metallurgy and Functional Coatings*, 2024, vol. 18, no. 3, pp. 49–61.
14. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Fluid Mechanics. Course of Theoretical Physics*, vol. 6. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1987. 554 p.
15. Vargaftik N. B. *Tables on the Thermophysical Properties of Liquids and Gases: in Normal and Dissociated States*. Washington: Hemisphere Pub. Corp. 1975. 758 p.
16. Kalitkin N. N. *Chislennyye Metody* [Numerical Methods]. Moscow: Nauka. 1978. 512 p. (In Russian).
17. Samarskii A. A. *The Theory of Difference Schemes*. N.Y.: Marcel Dekker, Inc., 2001. 762 p.
18. Tarunin E. L. *Vychislitel'nyy eksperiment v zadachah svobodnoy konvekcii* [Computational Experiment in Problems of Free Convection]. Irkutsk: Irkutsk State University, 1990. 228 p. (In Russian).

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Демин Ф. В., Демин В. А. К вопросу о левитации капли за счет испарения при тепловом взаимодействии с подложкой // Вестник Пермского университета. Физика. 2025. № 2. С. 27–36. doi: 10.17072/1994-3598-2025-2-27-36

Please cite this article in English as:

Demin F. V., Demin V. A. On a droplet levitation due to evaporation during thermal interaction with the substrate. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2025, no. 2, pp. 27–36. doi: 10.17072/1994-3598-2025-2-27-36

Сведения об авторах

1. Демин Виталий Анатольевич, д-р. физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614068
2. Демин Федор Витальевич, аспирант кафедры общей физики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Комсомольский проспект, 25, Пермь, 614990

Author information

1. Vitaly A. Demin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Theoretical Physics, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia
2. Fedor V. Demin, Postgraduate Student, Department of General Physics, Perm National Research Polytechnic University; 25, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia