

УДК 537.9; 538.915  
PACS 85.30.Hi, 68.65.-k

## Адиабатический электронный транспорт в квантовом точечном cosh-контакте

**Н. Г. Березкин**

Национальный исследовательский технологический университет МИСиС, Москва, Россия  
Российский квантовый центр, Сколково, Москва, Россия  
Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия  
berezkin.ng@phystech.edu

Квантовые точечные контакты (КТК) — квантово-размерные сужения между двумя электропроводящими областями. Их ширина сопоставима с длиной волны де Бройля электрона. Квантовые точечные контакты представляют интерес для исследования фундаментальных мезоскопических явлений, в частности, явления квантования баллистической проводимости, а также имеют потенциальное применение в качестве чувствительных сенсоров заряда и элементов квантовых вычислительных устройств. В настоящей работе исследован электронный транспорт в двумерном квантовом точечном контакте, имеющем форму, описываемую гиперболическим косинусом (cosh-контакт). Для анализа поведения электронов в узком канале используется техника адиабатического приближения — метод решения сложных квантово-механических задач, который предусматривает двухэтапный подход: на первом этапе исследуется поведение быстрой подсистемы при фиксированном состоянии медленной подсистемы, а на втором этапе учитывается влияние параметров медленной подсистемы на квантовую систему в целом. Методом адиабатического разделения переменных получен эффективный гамильтониан медленной подсистемы, описывающий продольное движение электронов в квантовом cosh-контакте. Вычислен энергетический коэффициент прохождения электронов при их рассеянии в сужении квантового cosh-контакта путём точного аналитического решения стационарного уравнения Шредингера для эффективного гамильтониана медленной подсистемы. Получено аналитическое выражение для проводимости cosh-контакта как в случае нулевой, так и конечной температур: показано, что его проводимость имеет ступенчатый характер. Дана качественная интерпретация полученного результата: каждая ступень соответствует открытию новых квантовых каналов переноса электронов. Построены графические зависимости, демонстрирующие влияние температуры на проводимость квантового точечного cosh-контакта.

**Ключевые слова:** квантовый точечный контакт; cosh-контакт; адиабатическое приближение; квантование проводимости

*Поступила в редакцию 26.01.2025; принята к опубликованию 03.02.2025*

## Adiabatic electron transport in a quantum point cosh-contact

**N. G. Berezkin**

National University of Science and Technology MISIS, Moscow, Russia  
Russian Quantum Center, Skolkovo, Moscow, Russia  
Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia  
berezkin.ng@phystech.edu

Quantum point contacts (QPCs) are quantum-dimensional constrictions between two electrically conductive regions. Their width is comparable to the de Broglie wavelength of an electron. They are of interest to those studying fundamental mesoscopic phenomena, particularly quantization of ballistic conductivity. Furthermore, QPCs have promising applications as sensitive charge sensors and elements of quantum computing devices. In this paper, the author investigates electron transport in a two-dimensional QPC whose shape is described by a hyperbolic cosine (cosh-contact). To analyze electron behavior in the narrow channel, adiabatic approximation was used. This method offers an approximate solution to complex quantum mechanical problems. It involves a two-stage approach. First, the behavior of the fast subsystem is analyzed while the slow subsystem remains in a fixed state. Then it is studied how the parameters of the slow subsystem affect the entire quantum system. Using the method of adiabatic separation of variables, an effective Hamiltonian for the slow subsystem was obtained. This Hamiltonian describes the longitudinal motion of electrons in the quantum cosh-contact. The energy transmission coefficient of electrons was calculated using an analytical solution of the stationary Schrödinger equation derived for the effective Hamiltonian of the slow subsystem. The conductivity of the cosh-contact was computed for both zero and finite temperatures. The analytical expression obtained for the conductivity demonstrates its stepwise character. The paper offers a qualitative interpretation of this result: each step corresponds to the opening of new quantum channels for electron transport. Graphical results showing how temperature affects the conductivity of the quantum point cosh-contact are presented.

**Keywords:** quantum point contact; cosh-contact; adiabatic approximation; conduction quantization

*Received 26 January 2025; accepted 03 February 2025*

doi: 10.17072/1994-3598-2025-1-21-28

## 1. Введение

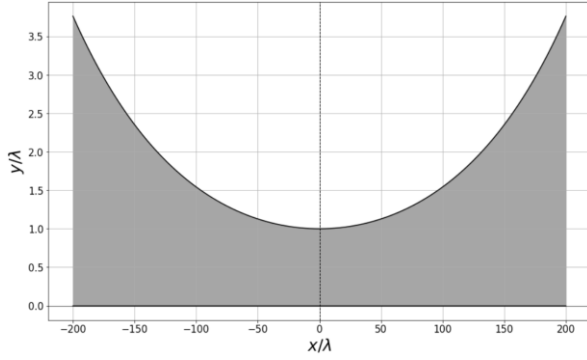
Если область соединения двух проводящих материалов, называемая контактом, мала – ее размер лежит в диапазоне от нанометров до нескольких микрометров, то она может вместить всего несколько длин волн де Бройля электронов  $\lambda$  [1]. Такие контакты получили название квантовых точечных контактов (КТК). Фундаментальное значение КТК заключается в их способности наглядно демонстрировать квантование баллистической проводимости в мезоскопических системах. В квантовых точечных контактах проводимость проявляет дискретный, квантованный характер, т.е. она может принимать только определенные, строго заданные значения, которые зависят от фундаментальных физических констант. Это один из наглядных примеров квантовых эффектов в макроскопическом мире. Впервые квантование проводимости в точечных контактах было экспериментально обнаружено в 1988 г. двумя группами ученых, работавших независимо: голландской группой из Делфтского технологического университета и Philips Research [2] и британской группой из Кавендишской лаборатории [3]. Их работа основывалась на более ранних исследованиях британской группы, которая показала, как, используя специальные электроды (вентили), можно превратить двумерный электронный газ в одномерный канал. Сначала это было продемонстрировано в кремнии [4], а затем в арсениде галлия [5] – материалах, широко используемых в современной электронике. Помимо фундаментальных

исследований мезоскопических явлений КТК обладают большим потенциалом для практического применения. Квантовые точечные контакты могут использоваться в качестве чрезвычайно чувствительных детекторов заряда [6]. Поскольку проводимость через контакт очень сильно зависит от размера и формы сужения, любые малейшие изменения потенциала (например, вызванные другими электронами) вблизи контакта будут влиять на величину тока. Это делает КТК очень чувствительными к наличию и движению даже единичных электронов. В сфере квантовых вычислений, где носителями информации являются квантовые биты (кубиты), КТК могут играть роль устройств для считывания состояния кубитов [7, 8]. Способность КТК точно измерять электрический ток делает их перспективным элементом для создания квантовых компьютеров на основе твердотельных систем.

## 2. Квантовый точечный cosh-контакт

Рассмотрим простую модель квантового точечного контакта – двумерный металлический образец, заполненный двумерным газом свободных электронов (2DEG - 2-dimensional electron gas), имеющий горизонтальную нижнюю поверхность  $y=0$  и верхнюю поверхность, которая описывается кривой:

$$y_{a,b}(x) = b \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right). \quad (2.1)$$



**Рис. 1.** Сечение квантового точечного cosh-контакта плоскостью  $z=0$ . Металл соответствует области, закрашенной серым цветом. Координаты  $x$  и  $y$  отмасштабированы к характерной длине де Бройля электрона  $\lambda$ . Отношение параметров  $a/b = 100$ .

Будем считать, что верхняя поверхность контакта искривлена слабо, т. е.  $b \ll a$ . Контакт такой формы будем называть cosh-контактом. Сечение контакта в плоскости  $z = 0$  изображено на рис. 1. В рассматриваемой модели зависимости физических величин от координаты  $z$  отсутствуют. Целью настоящей работы является исследование рассеяния электронов в квантовом контакте такой формы и вычисление проводимости данного контакта.

### 3. Адиабатическое приближение

Условие  $b \ll a$  позволяет использовать метод стационарного адиабатического приближения при исследовании рассеяния электрона в таком контакте. В этом методе предполагается наличие в системе быстрых степеней свободы  $\vec{q}_f$  и медленных степеней свободы  $\vec{q}_s$ , описываемых квантово-механически, при этом гамильтониан системы представляет собой сумму гамильтониана быстрой подсистемы  $H^{(f)}$ , зависящего от положения медленной подсистемы как от параметра, и гамильтониана медленной подсистемы  $H^{(s)}$  [9]:

$$H = H^{(s)}(\vec{q}_s) + H^{(f)}(\vec{q}_f, \vec{q}_s). \quad (3.1)$$

Такое разделение переменных допустимо при следующем условии:

$$\Delta E^{(f)} \gg \Delta E^{(s)}, \quad (3.2)$$

$$\Delta E^{(f)} \approx E_{(N+1),n} - E_{N,n},$$

$$\Delta E^{(s)} \approx E_{N,(n+1)} - E_{N,n},$$

где  $N, n$  — номера уровней энергий, а  $\Delta E^{(f,s)}$  — характерные расстояния между уровнями энергии быстрой и медленной подсистем соответственно. Прежде чем использовать адиабатическое приближение для cosh-контакта, заметим, что если бы ширина контакта была постоянной, т. е. контакт представлял собой полосу металла  $y \in (-y_0/2; y_0/2)$ ,

то переменные  $x$  и  $y$  разделялись бы, волновая функция и энергия электрона двумерного электронного газа с продольным импульсом  $p$  представлялись бы в виде:

$$\psi_{N,p}(x, y) = e^{ipx} \cdot \sqrt{\frac{2}{y_0}} \sin\left(\frac{\pi N}{y_0} \left(y - \frac{y_0}{2}\right)\right) \quad (3.3)$$

$$E_{N,p} = \frac{p^2}{2m} + \frac{\pi^2 N^2 \hbar^2}{2m y_0^2}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

В рассматриваемой задаче ширина контакта плавно зависит от координаты  $x$  в соответствии с формулой (2.1), в адиабатическом приближении быстрая подсистема соответствует поперечному движению (вдоль оси  $y$ ). Зафиксируем координату  $x$  и решим задачу для быстрой подсистемы. Решение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_N^{(f)}(y, x) &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{y_{a,b}(x)}} \sin\left[\frac{\pi N}{y_{a,b}(x)} \left(y - \frac{y_{a,b}(x)}{2}\right)\right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$E_N^{(f)}(x) = \frac{\pi^2 N^2 \hbar^2}{2m y_{a,b}^2(x)}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Тогда для одномерного продольного движения можно записать эффективный гамильтониан:

$$H_{eff}^{(s)} = \frac{p^2}{2m} + \frac{\pi^2 N^2 \hbar^2}{2m y_{a,b}^2(x)}. \quad (3.8)$$

### 4. Точное решение задачи рассеяния для эффективного гамильтониана

Для контакта, верхняя поверхность которого описывается формулой (2.1), уравнение Шредингера для одномерного продольного движения в соответствии с эффективным гамильтонианом (3.8) принимает вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{\pi^2 N^2 \hbar^2}{2mb^2 \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)} \psi = E \psi; \quad (4.1)$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Получим точное решение одномерного уравнения Шредингера с таким эффективным потенциалом. Уравнение (4.1) сводится к дифференциальному уравнению вида [10]:

$$\begin{aligned} q(1-q)f''(q) + (c - (a+b+1)q)f'(q) - \\ - abf(q) = 0, \quad f(0) = 1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Регулярным в нуле решением этого уравнения является гипергеометрическая функция  ${}_2F_1(a, b, c; q)$ . Чтобы избавиться от гиперболических функций в исходном уравнении (4.1), сделаем подстановку  $h = \tanh x/a$ :

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dx} &= \frac{1}{a \cosh^2 \frac{x}{a}} \frac{d\psi}{dh} = \frac{1}{a} (1 - h^2) \frac{d\psi}{dh}, \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \frac{1}{a^2} (1 - h^2) \frac{d}{dy} \left[ (1 - h^2) \frac{d\psi}{dh} \right], \\ &\quad \frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{d}{dh} \left[ (1 - h^2) \frac{d\psi}{dh} \right] + \\ &\quad + \left( \frac{\pi^2 N^2 \hbar^2}{2mb^2} - \frac{E}{1 - h^2} \right) \psi(h) = 0\end{aligned}\quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) имеет три особенности в точках  $h = \{\pm 1, \infty\}$ . Выполним линейное преобразование  $q = \frac{1-h}{2} \in (0, 1)$ , при котором точки  $\{\pm 1, \infty\}$  переходят в  $\{0, 1, \infty\}$ , и перейдём к безразмерным параметрам:

$$\begin{aligned}q(1-q)\psi'' + (1-2q)\psi' - \\ - \left( u - \frac{k^2 a^2}{4q(1-q)} \right) \psi = 0, \\ u = \frac{\pi^2 N^2 a^2}{b^2}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Исследуем поведение решения уравнения (4.4) вблизи особенностей. В окрестности  $q = 0$  уравнение (4.4) принимает вид уравнения Эйлера, решение которого можно найти степенной подстановкой:

$$\psi'' + \frac{1}{q}\psi' + \frac{k^2}{4q^2} = 0, \quad (4.5)$$

$$\psi(q) \approx e^{\pm i \frac{k}{2}}, \quad q \ll 1. \quad (4.6)$$

Аналогичный результат получается при исследовании сингулярного поведения решения уравнения (4.4) вблизи  $q = 1$ . Это обосновывает подстановку  $\psi(q) = (q(1-q))^{-ik/2} \chi(q)$ , которая приводит уравнение (4.4) к гипергеометрическому виду:

$$\begin{aligned}q(1-q)\chi''(q) + (1-ik)(1-2q)\chi'(q) - \\ - \left( \left( \frac{1}{2} - ik \right)^2 - u - \frac{1}{4} \right) \chi(q) = 0.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Чтобы привести уравнение (4.7) к виду уравнения (4.2), выразим  $u$  через вспомогательный параметр  $s$  согласно формуле:

$$\begin{aligned}u &= s(s+1), \\ s &= \frac{1}{2}(\sqrt{1+4u} - 1).\end{aligned}\quad (4.8)$$

Параметры получившейся гипергеометрической функции  ${}_2F_1(a, b, c; q)$ :

$$a = -ik - s; \quad b = -ik + s + 1; \quad c = -ik + 1. \quad (4.9)$$

Тогда общее решение уравнения (9) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi(q) &= (q(1-q))^{-ik/2} \times \\ &\times {}_2F_1(-ika - s, -ika + s + 1; -ika + 1; q),\end{aligned}\quad (4.10)$$

$$q = \frac{1}{2}(1 - \tanh(x/a)).$$

Исследуем асимптотику решения (4.10), чтобы проверить, что оно является решением поставленной задачи рассеяния. При  $x \rightarrow +\infty, y = \tanh x/a \approx 1 - 2e^{-2x/a}$ , следовательно,  $q \approx e^{-2x/a} \rightarrow 0$  гипергеометрическая функция  ${}_2F_1(\dots, q) \approx 1$ . Поэтому:

$$\psi(x \rightarrow +\infty) \approx e^{ikx}. \quad (4.11)$$

Действительно, асимптотика (4.11) содержит только прошедшую волну, т.е. соответствует задаче рассеяния электрона, движущегося от источника к рассеивателю в положительном направлении оси  $x$ . Найдём асимптотику при  $x \rightarrow -\infty$ , тогда  $q \approx 1 - e^{2x/a} \rightarrow 1$ . Для этого потребуется асимптотика гипергеометрической функции вблизи единицы, где у неё есть особенность. Поэтому воспользуемся тождеством, связывающим значения гипергеометрической функции в точках  $q$  и  $1-q$  [11]:

$$\begin{aligned}{}_2F_1(a, b; c; q) &= \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \times \\ &\times {}_2F_1(a, b; a+b+1-c; 1-q) + \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-q)^{c-a-b} \times \\ &\times {}_2F_1(c-a, c-b; c+1-a-b; 1-q).\end{aligned}\quad (4.12)$$

Поскольку  $q \approx 1$ , в правой части тождества гипергеометрические функции раскладываются как  ${}_2F_1(\dots, 1-q) \approx 1$ , поэтому асимптотика определяется коэффициентами с гамма-функциями и

$$(1-q)^{c-a-b} = (1-q)^{ika} \approx e^{2ikx}.$$

Пользуясь тем, что  $(q(1-q))^{-ika/2} \approx e^{-ikx}$ , мы получаем асимптотику волновой функции при  $x \rightarrow -\infty$ , которая содержит падающую и отражённую волну, что соответствует качественным соображениям о рассеянии электрона:

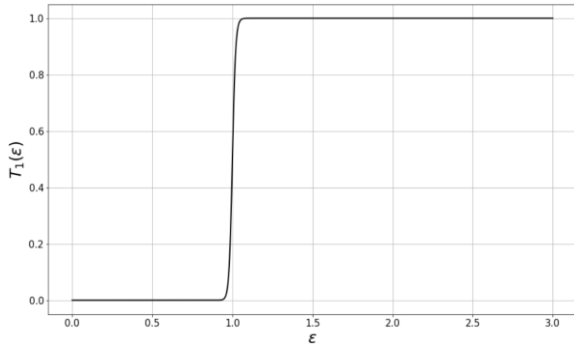
$$\begin{aligned}\psi(x \rightarrow -\infty) &= \frac{\Gamma(-ika+1)\Gamma(ika)}{\Gamma(-ika-s)\Gamma(-ika+s+1)} e^{ikx} + \\ &+ \frac{\Gamma(-ika+1)\Gamma(ika)}{\Gamma(s+1)\Gamma(-s)} e^{-ikx}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Вычислив квадрат модуля отношения коэффициентов волновой функции (4.13), воспользовавшись соотношениями на гамма-функции  $\Gamma(z^*) = \Gamma(z)^*$ ,  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ ,  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  и вернувшись к исходным параметрам, получаем энергетический коэффициент прохождения:

$$D_N(E) = \frac{\sinh^2\left(\frac{\pi a \sqrt{2mE}}{\hbar}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\pi a \sqrt{2mE}}{\hbar}\right) + \cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{4\pi^2 N^2 \frac{a^2}{b^2} - 1}\right)}. \quad (4.14)$$

График зависимости коэффициента прохождения от энергии электрона изображён на рис. 2. При  $b \ll a$  коэффициент прохождения  $D_N(E)$  через потенциальный барьер cosh-контакта изменяется от нуля до единицы в узкой области изменения энергии и практически представляет собой ступенчатую функцию со скачком в точке  $E_N = \hbar^2 \pi^2 N^2 / 2mb^2$ . Поэтому при  $b \ll a$  коэффициент прохождения может быть записан через ступенчатую функцию Хевисайда  $\theta$ :

$$D_N(E) \approx \theta(E - E_N), \quad E_N = \frac{\hbar^2 \pi^2 N^2}{2mb^2}. \quad (4.15)$$



**Рис. 2.** График зависимости коэффициента прохождения от энергии электрона. Энергия выражена через безразмерную величину  $\varepsilon = E/E_1$ , где  $E_1 = \hbar^2 \pi^2 / 2mb^2$ . График построен для отношения параметров  $a/b = 10$ , квантового числа  $N=1$

Следует отметить, что коэффициент прохождения для рассмотренного потенциала относительно просто вычисляется в квазиклассическом приближении [12]. При достаточно больших энергиях электрона квазиклассическое соотношение великолепно воспроизводит точный результат (4.14).

## 5. Проводимость cosh-контакта

Перейдём к вычислению проводимости квантового cosh-контакта. Сначала рассмотрим случай нулевой температуры  $T=0$ . Запишем плотность тока электронов  $j_N^{(\rightarrow)}$  через контакт слева направо при нулевой температуре с учётом двукратного вырождения по спину:

$$j_N^{(\rightarrow)} = \frac{e}{V} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2dp L}{2\pi\hbar} v_x f(E - E_F) D_N(E). \quad (5.1)$$

Здесь  $e$  — заряд электрона,  $v_x$  — его скорость,  $f$  — функция распределения Ферми,  $E_F$  — энергия Ферми,  $L$  — длина участка сужения контакта вдоль оси  $x$ ,  $S$  — площадь его поперечного сечения в окрестности сужения при  $x=0$ ,  $V=LS$  — объём. При расчёте проводимости коэффициент прохождения  $T_N(E)$  аппроксимируем функцией Хевисайда согласно (4.15). Тогда, с учётом равенства  $dE = v_x dp$ , выражение для тока  $J_N = j_N S$  можно записать в виде:

$$J_N^{(\rightarrow)} = \frac{e}{\pi\hbar} \int_{E_N}^{\infty} dE f(E - E_F). \quad (5.2)$$

Если справа сужения приложен слабый потенциал  $\varphi$ , то ток через контакт справа налево запишется в виде

$$J_N^{(\leftarrow)} = \frac{e}{\pi\hbar} \int_{E_N}^{\infty} dE f(E - E_F - e\varphi). \quad (5.3)$$

Из выражений (5.2) и (5.3) находим проводимость контакта, учитывая при этом, что функция Ферми при нулевой температуре представляет собой просто ступеньку при  $E = E_F$ :

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \frac{e^2}{\pi\hbar} \int_{E_N}^{\infty} dE \frac{df(E - E_F - e\varphi)}{dE} = \\ &= \frac{e^2}{\pi\hbar} \int_{E_N}^{\infty} dE \delta(E - E_F - e\varphi). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Если  $E_N < E_F + e\varphi < E_{N+1}$ , то в аргументе дельта-функции срабатывают  $N$  квантовых чисел и квантовая проводимость равна:

$$\sigma_N = N \frac{e^2}{\pi\hbar} = \frac{p_F b}{\pi\hbar} G_q, \quad p_F = \sqrt{2mE_F} \quad (5.5)$$

$$G_q = \frac{e^2}{\pi\hbar}. \quad (5.6)$$

Значит, при повышении напряжения проводимость в соответствии с (5.5) растёт скачкообразно, каждый раз повышаясь на величину кванта проводимости  $G_q \approx 7.75 \cdot 10^{-5} \text{ S}$ . При этом на каждой ступеньке проводимость постоянная, т. е. выполняется закон Ома.

Теперь рассмотрим случай конечной температуры  $T$ , малой по сравнению с энергией Ферми  $E_F$ . Аналогично (5.4) вычисляем проводимость в этом случае:

$$\begin{aligned} \sigma_N &= G_q \int_{E_N}^{\infty} dE \frac{\partial f(E - E_F - e\varphi)}{\partial E} = \\ &= \frac{G_q}{\exp\left(\frac{E_N - E_F - e\varphi}{T}\right) + 1}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Полная квантовая проводимость  $\sigma$  контакта при конечной температуре выражается через сумму сходящегося числового ряда:

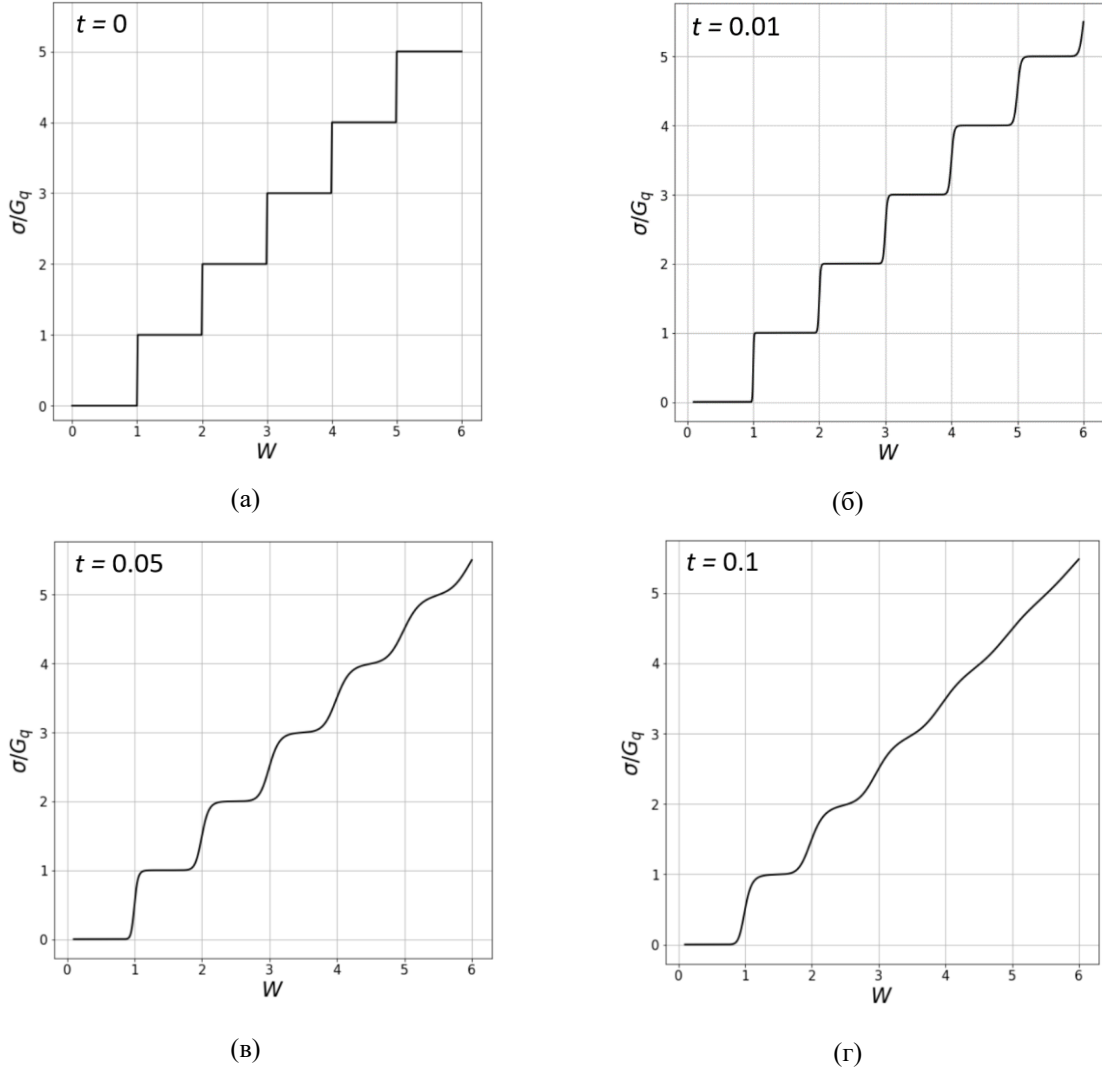
$$\sigma = G_q \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\exp \left[ \frac{1}{t} \left( \frac{N^2}{W^2} - 1 \right) \right] + 1}, \quad (5.8)$$

$$t = \frac{T}{E_F},$$

$$W = b \frac{\sqrt{2m(E_F + e\phi)}}{\pi \hbar}.$$

Здесь введён безразмерный температурный параметр  $t$  ( $t \ll 1$ ). Также введён безразмерный параметр  $W$ , характеризующий ширину сужения  $b$  и приложенный к контакту потенциал  $\phi$ . На рис. 3 изображены графики зависимости проводимости  $\sigma$  от параметра  $W$  при различных температурах. Ступенчатый характер проводимости можно качественным образом объяснить в терминах открытых

и закрытых каналов переноса заряда при достижении пороговых значений параметра  $W$  (например, путём повышения напряжения на контакте), соответствующих различным  $N$  и, соответственно, энергиям  $E_N = \hbar^2 \pi^2 N^2 / 2mb^2$  [13]. Если  $W \rightarrow 0$ , то  $E_F + e\phi < E_1$ , поэтому  $N = 0$  и электроны не могут пройти через сужение контакта. Если  $E_1 < E_F + e\phi < E_2$ , то открыт один канал и  $\sigma = G_q$ . При  $E_2 < E_F + e\phi < E_3$  открыто два канала, поэтому  $\sigma = 2G_q$ , и т.д. Таким образом, проводимость сужения квантуется в единицах  $G_q$ . Полученное для cosh-контакта квантование проводимости является общей особенностью квантовых точечных контактов различных форм и представляет собой известное квантовое мезоскопическое явление. Графические зависимости, построенные из соотношения (5.8) и приведённые на рис. 3, демонстрируют, что с увеличением температуры происходит сглаживание ступенчатого поведения проводимости и переход к линейному режиму при больших значениях параметра  $W$ .



**Рис. 3.** Квантование проводимости  $\sigma$  при изменении параметра  $W$  для различных температурных параметров  $t$ : (а)  $t=0$ ; (б)  $t=0.01$ ; (в)  $t=0.05$ ; (г)  $t=0.1$ . Проводимость  $\sigma$  показана в единицах квантов проводимости  $G_q$

## 6. Заключение

Проведенное исследование электронного транспорта в квантовом точечном cosh-контакте позволило получить аналитические выражения для коэффициента прохождения через сужение и для проводимости, которая имеет ступенчатый, квантованный характер. Было показано, что адиабатическое приближение, а также точное решение стационарного уравнения Шредингера для эффективного гамильтониана медленной подсистемы являются эффективными методами для описания поведения электронов в квантовых точечных контактах. Выявлено влияние температуры на проводимость, заключающееся в сглаживании ступенек и переходе к линейному режиму при приложении достаточно большого напряжения. Полученные результаты подтверждают значение КТК в изучении квантовых явлений в мезоскопических системах. Однако КТК представляют интерес не только как объекты для фундаментальных исследований: уникальные свойства этих наноструктур открывают перспективы для различных применений в современной электронике.

Помимо рассмотренных в данной работе двумерных проводящих сужений, которые на практике изготавливаются литографическим методом, известны альтернативные варианты реализации квантовых точечных контактов. Например, в работе [2] описана техника расщепленного затвора (split-gate technique). В этом методе два массивных электрода соединяют слоем двумерного электронного газа, сформированного в области полупроводникового гетероперехода. Затем сверху к двумерному электронному газу подводят электроды, выполненные в виде пластин, играющие роль затворов. При приложении напряжения на затворы электроны выталкиваются из областей вблизи затворов, таким образом, эти области становятся недоступными для электронов, и формируется сужение в двумерном электронном газе. Изменяя величину напряжения на затворах, можно регулировать недоступную для электронов область. Такие точечные контакты с перестраиваемой геометрией представляют интерес для дальнейших теоретических исследований.

## Список литературы

1. van Houten H., Beenakker C. Quantum point contacts // *Physics Today*. 1996. Vol. 49. N. 7. P. 22–27. DOI: 10.1063/1.881503
2. Wees B. J. V., van Houten H., Beenakker C. W. J. et al. Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas // *Physical Review Letters*. 1988. Vol. 60. P. 848–850. DOI: 10.1103/PhysRevLett.60.848
3. Wharam D. A., Thornton T. J., Newbury R. et al. One-dimensional transport and the quantisation of the ballistic resistance // *Journal of Physics C*. 1988.

Vol. 21. No. 8. P. L209–L214. DOI: 10.1088/0022-3719/21/8/002

4. Dean C. C., Pepper M. The transition from two- to one-dimensional electronic transport in narrow silicon accumulation layers // *Journal of Physics C*. 1982. Vol. 15. P. L1287–L1297. DOI: 10.1088/0022-3719/15/36/005
5. Thornton T. J., Pepper M., Ahmed H. et al. One-dimensional conduction in the 2D electron gas of a GaAs-AlGaAs heterojunction // *Physical Review Letters*. 1986. Vol. 56. N. 11. P. 1198–1201. DOI: 10.1103/physrevlett.56.1198
6. Gustavsson S., Leturcq R., Stude M. et al. Electron counting in quantum dots // *Surface Science Reports*. 2009. Vol. 64. N. 6. P. 191–232. DOI: 10.1016/j.surfrep.2009.02.001
7. Elzerman J., Hanson R., van Beveren W. L. et al. Single-shot read-out of an individual electron spin in a quantum dot // *Nature*. 2004. Vol. 430. P. 431–435. DOI: 10.1038/nature02693
8. Vandersypen L. M. K., Elzerman J. M., Schouten R. N. et al. Real-time detection of single-electron tunneling using a quantum point contact // *Appl. Phys. Lett.* 2004. Vol. 85. P. 4394–4396. DOI: 10.1063/1.1815041
9. Мигдал А. Б. Качественные методы в квантовой теории. М.: Наука, 1972. 335 с.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. 752 с.
11. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
12. Галицкий В. М., Карнаков Б. М., Коган В. И. Задачи по квантовой механике. М.: Наука, 1981. 881 с.
13. Щелкачёв Н. М., Фоминов Я. В. Электрический ток в наноструктурах: кулоновская блокада и квантовые точечные контакты. М.: Изд-во МФТИ, 2010. 38 с.

## References

1. van Houten H., Beenakker C. Quantum point contact. *Physics Today*, 1996, vol. 49, no. 7, pp. 22–27. DOI: 10.1063/1.881503
2. Wees B. J. V., Houten H. V., Beenakker C. W. J. et al. Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas. *Physical Review Letters*, 1988, vol. 60, pp. 848–850. DOI: 10.1103/PhysRevLett.60.848
3. Wharam D. A., Thornton T. J., Newbury R. et al. One-dimensional transport and the quantisation of the ballistic resistance. *Journal of Physics C*, 1988, vol. 21, no. 8, pp. L209–L214. DOI: 10.1088/0022-3719/21/8/002
4. Dean C. C., Pepper M. The transition from two- to one-dimensional electronic transport in narrow silicon accumulation layers. *Journal of Physics C*,

- 1982, vol. 15, L1287–L1297. DOI: 10.1088/0022-3719/15/36/005
5. Thornton T. J., Pepper M., Ahmed H. et al. One-dimensional conduction in the 2D electron gas of a GaAs-AlGaAs heterojunction. *Physical Review Letters*, 1986, vol. 56, no. 11, pp. 1198–1201. DOI: 10.1103/physrevlett.56.1198
  6. Gustavsson S., Leturcq R., Stude M. et al. Electron counting in quantum dots. *Surface Science Reports*, 2009, vol. 64, no. 6, pp. 191–232. DOI: 10.1016/j.surfrep.2009.02.001
  7. Elzerman J., Hanson R., van Beveren W. L. et al. Single-shot read-out of an individual electron spin in a quantum dot. *Nature*, 2004, 430, p. 431–435, DOI: 10.1038/nature02693
  8. Vandersypen L. M. K., Elzerman J. M., Schouten R. N. et al. Real-time detection of single-electron tunneling using a quantum point contact. *Appl. Phys. Lett.*, 2004, vol. 85, pp. 4394–4396 DOI: 10.1063/1.1815041
  9. Migdal A. B. *Qualitative Methods in Quantum Theory*. Boulder: Westview Press, 1977. 464 p.
  10. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1981. 689 p.
  11. Abramowitz M., Stegun I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. Washington D.C.: National Bureau of Standards, 1972. 1060 p.
  12. Galitskii V. M., Karnakov B. M., Kogan V. I. *Zadachi po kvantovoi mekhanike* [Problems in Quantum Mechanics]. Moscow: Nauka, 1981. 881 p. (In Russian)
  13. Shchelkachev N. M., Fominov Ia. V. *Elektricheskii tok v nanostrukturakh: kulonovskaya blokada i kvantovye tochechnye kontakty* [Electric Current in Nanostructures: Coulomb Blockade and Quantum Point Contacts] Moscow: MIPT, 2010. 38 p. (In Russian)

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Березкин Н. Г. Адиабатический электронный транспорт в квантовом точечном cosh-контакте // Вестник Пермского университета. Физика. 2025. № 1. С. 21–28. doi: 10.17072/1994-3598-2025-1-21-28

**Please cite this article in English as:**

Berezkin N. G. Adiabatic electron transport in a quantum point cosh-contact. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2025, no. 1, pp. 21–28. doi: 10.17072/1994-3598-2025-1-21-28

**Сведения об авторах**

Николай Геннадиевич Березкин, лаборант-исследователь дизайн-центра квантового проектирования Национального исследовательского технологического университета МИСиС, стажёр-исследователь группы квантовых вычислений на сверхпроводниках Российского квантового центра, магистрант Московского физико-технического института; Институтский пер., 9, Долгопрудный, 141700

**Author information**

Nikolay G. Berezkin, Laboratory Researcher at the Design Center for Quantum Engineering at the National University of Science and Technology MISIS; Intern Researcher in the Group of Quantum Computing on Superconductors at the Russian Quantum Center; Master's Student at the Moscow Institute of Physics and Technology; 9, Institutsky pereulok, Dolgoprudny, 141700, Russia