УДК 1:51

DOI: 10.17072/2078-7898/2022-3-399-405

# ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ, ВИДОВЫЕ СТРУКТУРЫ: МЕТАФИЗИЧЕСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СТРУКТУРАЛИЗМ

***Хлебалин Александр Валерьевич***

*Институт философии и права Сибирского отделения РАН (Новосибирск)*

В рамках неэлиминативного структурализма, например в версии С. Шапиро, происходят столкновения с так называемой проблемой неполноты математических объектов, а также с проблемой перестановки. В статье анализируется разрабатываемая Л. Хорстеном концепция родового математического структурализма, претендующая при соблюдении неэлиминативистских, реалистских позиций на решение указанных проблем. Представлены ключевые характеристики концепции видового математического структурализма, основанной на понятии произвольного объекта K. Fine, и идеи родовых структур. Согласно этой концепции, с каждым произвольным объектом ассоциирована область индивидуальных объектов — его значений. Так, с каждым произвольным числом ассоциирована область индивидуальных чисел; с каждым произвольным человеком — область индивидуальных людей. Произвольный объект обладает свойствами, общими для индивидуальных объектов ассоциированной области. Родовой структурализм трактует математические структуры как родовые структуры, а математические объекты — как произвольные. Сами родовые структуры определяются отношением инстанциации, т.е. отношением нахождения в состоянии. Являясь версией неэлиминативного структурализма, концепция родового структурализма избегает трудностей, с которыми сталкиваются другие формулировки этой позиции. Наравне с этим интересной особенностью концепции является смещение внимания с онтологической проблематики к метафизической, игравшей второстепенную роль в дебатах о математическом структурализме. В силу этого одной из важных проблем мы считаем проблему независимости и определенности произвольных объектов, на которую указывал еще K. Fine. Применительно к файновской концепции произвольных объектов уже получены интересные результаты посредством применения независимо-дружественной логики, концептуальный аппарат которой, на наш взгляд, позволит получить важные для структуралистской философии математики метафизические результаты. Обозначены преимущества анализируемой концепции и охарактеризованы направления ее дальнейшего развития.
*Ключевые слова*: математический структурализм, неэлиминативный структурализм, произвольные объекты, неполнота математического объекта, математический реализм, метафизика математических объектов.

# ARBITRARY OBJECTS, SPECIES STRUCTURES: METAPHYSICAL MATHEMATICAL STRUCTURALISM

***Aleksandr V. Khlebalin***

*Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk)*

Non-eliminative structuralism, for example that in the version of S. Shapiro, faces the problem of the so-called incompleteness of mathematical objects and the problem of permutation. The article analyzes the concept of generic mathematical structuralism developed by L. Horsten, which claims to solve these problems while adhering to non-eliminativist, realist positions. The paper presents the key characteristics of the conception of specific mathematical structuralism based on the concept of an arbitrary object offered by K. Fine and the idea of generic structures. According to this conception, each arbitrary object is associated

with a domain of individual objects — its values. Thus, with each arbitrary number a domain of individual numbers is associated; with every arbitrary person — a domain of individual people. An arbitrary object has properties that are common to the individual objects of the associated domain. Generic structuralism treats mathematical structures as generic structures, while mathematical objects — as arbitrary. Generic structures themselves are defined by the relation of instantiation — the relation of being in a state. As a version of non-eliminative structuralism, the concept of generic structuralism avoids difficulties encountered by other formulations of this position. Another interesting feature of the concept is the shift of attention from ontological to metaphysical problems, which played a secondary role in the debate about mathematical structuralism. In this regard, we consider the problem of the independence and definiteness of arbitrary objects, which was already pointed out by K. Fine, to be one of the important problems. As applied to Fine's concept of arbitrary objects, interesting results have already been obtained by means of independent-friendly logic. The application of its conceptual means, in our opinion, will make it possible to obtain metaphysical results important for the structuralist philosophy of mathematics. The advantages of the analyzed concept are identified in the paper, and the directions of its further development are outlined.
*Keywords*: mathematical structuralism, non-eliminative structuralism, arbitrary objects, incompleteness of a mathematical object, mathematical realism, metaphysics of mathematical objects.

**Введение**

Структурализм в философии математики по целому ряду признаков можно определить как доминирующее направление. Например, обсуждение как отдельных проблем структуралистского подхода, так и жизнеспособность и преимущества его в целом, попросту превалируют в дискуссиях в философии математики. Начиная со ставших уже каноническими работ П. Бенацеррафа, структурализм занимает важное место в дебатах по философии математики. Как это характерно для переживающих подъем в своем развитии теоретических направлений любого рода, структурализм характеризуется тенденцией возводить свои истоки ко все более давним временам и включать в перечень своих предтеч все более внушительный список громких имен [Reck E.H., Schiemer G., 2020].

Убеждение о том, что математика занимается изучением структур, стало попросту расхожим; причем это вовсе не означает, что любой согласившийся с этим утверждением готов будет принять тезис структурализма в какой-либо из его формулировок при первых же попытках сделать ясным и точным это ставшее столь знакомым утверждение. Более того, убежденность в том, что наше познание — не только в области математики, но и в области естественных и гуманитарных наук — направлено на структуры, становится доминирующим. Многие ученые и философы науки утверждают, что конечная цель познания — раскрытие структуры реальности [Worrall J., 1989]. Например, А. Пуанкаре настаивал на том, что физика может дать нам исключительно знание о структуре реальности и ничего помимо этого [ссылка]. J. Ladyman и D. Ross радикализируют эту позицию, настаивая на том, что не только наше познание сводится к познанию структуры реальности, но сама физическая реальность сводится исключительно к структуре; онтический реализм не допускает существования никаких объектов [Ladyman J., Ross D., 2009]. Некоторые метафизики утверждают, что структура — это фундаментальная составляющая реальности; например, T. Sider отталкивается от следующего утверждения: «Центральная тема этой книги — реализм в отношении структуры. Мир характеризуется наличием фундаментальной структуры, привилегированного описания. Для того чтобы репрезентация была полностью успешной, не достаточно истины; репрезентация должна основываться на правильных понятиях, таких чтобы ее понятийная структура соответствовала структуре реальности. Есть объективно правильный способ написать “книгу мира”» [Sider T., 2011, p. vii].

Вместе с тем свобода в оперировании термином «структура» и многообразие его толкований, вплоть до взаимоисключающих, привели к весьма курьезному событию: в 1959 г. в Париже по инициативе ЮНЕСКО был проведен коллоквиум с привлечением специалистов различных областей знания, эксплуатирующих понятие структуры, с целью добиться консенсуса в его трактовке, в том числе и сторонников невероятно популярного даже в кругах далеких от математики проекта Бурбаки. Предсказуемо, коллоквиум не достиг иных, помимо приятного академического общения, результатов. Не в последнюю очередь популярность понятия структуры в самых разных областях знания можно объяснить быстро узнаваемой аналогией с платонизмом. В случае философии математики эта связь часто акцентируется и именно с нее начинается изложение структуралистской позиции. Так, S. Shapiro начинает обсуждение онтологического статуса математических структур следующим образом: «Поскольку одна и та же структура может быть представлена более чем одной системой, структура является единым-над-многим. Сущности, подобные этой, привлекали внимание философов на протяжении веков. Традиционным примером единого-над-многими являются универсалии, свойства или Форма. В более современной философии существует дихотомия тип/токен. На философском жаргоне говорят, что несколько токенов *имеют* определенный тип или *разделяют* определенный тип; и мы говорим, что объект *имеет* универсалию или, как выразился Платон, объект *разделяет* или *участвует* в Форме. Как определено выше, структура — это паттерн, форма системы. Система, в свою очередь, представляет собой совокупность связанных объектов» [Shapiro S., 1997, p. 84]. Такая апелляция к традиционной философской проблематике, безусловно, уместна; но совершаемая постоянно, она играет свою, пусть и не определяющую, роль в расширении содержания понятия структуры на все новые области исследований, представляющих себя наследниками традиционного спора о платоновых формах или универсалиях.

Вместе с тем в случае математики мы сталкиваемся, пожалуй, с единственным полем проблем, применительно к которому можно рассчитывать на максимальную точность объяснения понятия структуры. Следовательно, утверждение о том, что математика представляет собой познание структур будет не метафорой или максимой, а обоснованным объяснением математического знания и его предметной области.

**Математический структурализм**

Большая часть дискуссий в отношении структуралистского тезиса в философии математики разворачивается вокруг онтологического содержания концепции. Зачастую структурализм заявляется именно как онтологическая позиция: «Моя структуралистская программа является реализмом в онтологии и реализмом в отношении значения истинности — как только необходимые понятия объекта и объективности окажутся перед нами. Структуралист утверждает, что такие неалгебраические области, как арифметика, имеют дело с областью объектов — числами, которые существуют независимо от математика, и он считает, что математические утверждения обладают непустым, двузначным значением истинности в отношении этой области» [Shapiro S., 1997, p. 72].

Как правило, характеристика математического структурализма основывается на противопоставлении элиминативной и неэлиминативной концепций. Обе концепции едины в том, что различные системы объектов могут иметь общую структуру; но сторонники неэлиминативного структурализма настаивают на том, что такая математическая структура существует независимо от систем, которыми она инстанциируется, тогда как сторонники элиминативной концепции придерживаются мнения, что разговор о структуре может быть сведен к разговору о системах, изоморфных друг другу. Другое традиционное для дебатов о структурализме различие касается алгебраических и неалгебраических теорий. Алгебраические теории трактуются как относящиеся к различным структурам, тогда как неалгебраические теории относятся к одной определенной структуре [Shapiro S. 1997, p. 40–41]. Согласно элиминативному структурализму, любая (и алгебраическая, и неалгебраическая) теория относится ко множеству систем объектов; неэлиминативный структурализм рассматривает неалгебраические теории как теории, характеризующие индивидуальную структуру. Принципиально важным элементом позиции элиминативного структурализма является утверждение о том, что даже в отношении неалгебраических теорий мы не можем настаивать на существовании определенных математических объектов, описываемых этими теориями; неэлиминативная же концепция занимает противоположную позицию. Например, согласно, пожалуй, самой известной версии неэлиминативного структурализма, передоложенной С. Шапиро, математическая структура содержит места (позиции), которые могут занимать объекты. Сами эти позиции могут рассматриваться как объекты, которые могут образовывать систему, являющуюся инстанциацией структуры [Shapiro S., 1997. p. 100–101]. Здесь неэлиминативный структурализм сталкивается с двумя серьезными проблемами. Прежде всего, это так называемая неполнота математических объектов. Согласно Шапиро, (применительно к арифметике) числа обладают только структурными свойствами. То есть свойства числа 7 определяются всецело его местом в структуре натуральных чисел. Однако это интуитивно вполне понятное утверждение при своем уточнении сталкивается с целым рядом трудностей [Linnebo Ø., Pettigrew R., 2014]). Например, неполнота структурного объяснения свойств чисел легко иллюстрируется тем, что число 7 может быть моим счастливым числом, и это явно не выводится из позиции в структуре натуральных чисел.

Второе затруднение связано с так называемым возражением о перестановке [Hellman G. 2006, p. 546]. Если в *ante rem* структуре натуральных чисел **N** мы нетривиальным способом переставим позиции, то получим систему **N'**, изоморфную **N**. В таком случае возникает вопрос о том, может ли что-либо свидетельствовать в пользу того, что именно **N** является *sui generis* структурой арифметики?

Эти трудности являются не столько опровержением неэлиминативного структурализма, сколько своего рода вызовами конкретным формулировкам концепции. Ниже мы рассмотрим одну из возможных стратегий преодоления этих затруднений, которая еще далека до окончательной формулировки, но при этом уже привлекла внимание. Речь идет о концепции «родового» (generic) структурализма, разрабатываемой Л. Хорстеном. [Horsten L., 2019]. Эта концепция представляет собой разновидность неэлиминативного структурализма, которая не только претендует справится с указанными возражениями, но и занять место наиболее разработанной версией математического структурализма.

## Произвольные объекты и родовые структуры

Исходной идеей, положившей начало концепции родового структурализма, по признанию Л. Хорстена, является концепция произвольных (arbitrary) объектов [Fine K., 1985; Fine K., Tennant N. 1983]. Нет никакой возможности надеяться сколько-нибудь подробно охарактеризовать концепцию произвольных объектов К. Файна и ее развитие Л. Хорстеном в этой статье. Мы ограничимся перечислением основных характеристик видового структурализма, отсылая читателя за подробностями к соответствующим работам Файна и Хорстена. Согласно этой концепции, с каждым произвольным объектом ассоциирована область индивидуальных объектов — его значений. Так, с каждым произвольным числом ассоциирована область индивидуальных чисел, с каждым произвольным человеком — область индивидуальных людей. Произвольный объект обладаем свойствами, общими для индивидуальных объектов ассоциированной области. Например, произвольное число четное или нечетное, а произвольный человек смертен, т.к. каждое индивидуальное число четное или нечетное, а каждый индивидуальный человек смертен. Однако произвольное число не может быть простым, а произвольный человек не может быть математиком, потому что некоторое индивидуально число не является простым и некоторый индивидуальный человек не является математиком. Применяя подобные рассуждения к интересующей нас проблематике, возьмем определенный вид математических объектов, например натуральные числа. Есть отдельные натуральные числа, например число 7. Но, согласно концепции К. Файна, есть и произвольные натуральные числа; о таких числах идет речь всякий раз, когда мы сталкиваемся с выражением «Пусть *n* будет натуральным числом». Таких произвольных натуральных чисел много, что предполагается такими выражениями, как «Теперь пусть m будет другим натуральным числом». Произвольное натуральное число не обязательно имеет какое-либо конкретное натуральное число в качестве своего значения. Нет ничего, что могло бы нам указать, является ли значением произвольного числа *m* конкретное число 7. Вместе с тем можно определить некоторые отношения между произвольными числами. Так, в случае с утверждением о числах *n* и *m*, можно утверждать их численное тождество или различие. Но даже если произвольное натуральное число не обладает в качестве своего значения отдельным числом, существует смысл, в котором им может быть отдельное число. «Мы можем сказать, что произвольные числа могут находиться в разных конкретных состояниях. Эти возможные ситуации (состояния) могут быть поняты в льюсовском реалистском ключе, но точно также разговор о возможных состояниях можно понимать в крипкевской, дефляционной манере» [Horsten L., 2019, p. 107]. При этом нет никакого актуального специфического состояния произвольного натурального числа: «Возможно, здесь наилучшим будет сказать, что произвольное натуральное число “актуально” находится в “суперпозиции” к специфическим, конкретным состояниям» [Horsten L., 2019, p. 112]. Также постулируются степени произвольности: утверждение «Пусть *n* будет натуральным числом больше 10» постулирует число менее произвольное, чем то, которое постулируется утверждением «Пусть n будет натуральным числом больше 5». При этом минимальная степень произвольности не означает тождества произвольного числа конкретному числу: произвольные числа могут находиться в различных состояниях, тогда как конкретные числа — нет.

Идея произвольных объектов, несмотря на простоту поясняющих ее примеров, кажется несколько странной. К. Файн и Л. Хорстен считают, что эта, некогда вполне знакомая, идея фактически исчезает из философии математики благодаря критике Г. Фреге и Б. Рассела. Мы не будем здесь останавливаться на истории концепции произвольных объектов [Urquhart A., 2020], ограничившись указанием на мнение К. Файна, который считает, что он возвращает этой вполне полезной концепции должный статус, представив ее в приемлемой логико-философской формулировке. Л. Хорстен на основе этой возрожденной концепции предлагает свою теорию родового структурализма; принципиально важным для него является то, что разработка теории разворачивается в русле той наивной метафизики, как ее понимает все тот же К. Файн. Основной задачей, стоящей перед ним, является ответ на вопрос о том, чем являются математические структуры и объекты. Согласно концепции родового структурализма, родовые системы представляют собой специальный вид произвольных сущностей и могут находиться в различных состояниях. Например, ряд натуральных чисел будет являться родовой структурой натуральных чисел с состояниями, представленными как различные $\omega$-последовательности лежащих в основании упорядоченных счетно бесконечных множеств объектов, что и будет называться родовой $\omega$-последовательностью. В этом случае любое натуральное число мы можем рассматривать также в качестве произвольного объекта, а точнее как индивидуальное понятие, т.е. функцию от состояний к элементам базового множества, если мы, вслед за Л. Хорстеном и С. Сперанским [Horsten L., Speranski S., 2019], воспользуемся для рассуждения о произвольных объектах карнаповской модальной логикой с квантификацией по индивидуальным понятиям (т.е., функции от возможных миров к элементам данного множества).

Родовой структурализм трактует математические структуры как родовые структуры, а математические объекты как произвольные. Сами родовые структуры определяются отношением инстанциации (отношение нахождения в состоянии). Л. Хорстен настаивает, что в его концепции математические структуры являются не просто абстрактными паттернами и отличаются от *ante rem* структур С. Шапиро. В концепции родового структурализма, абстрагирующей движение от системы к структуре, понятие объекта трансформируется вместе с понятием системы. Общее направление этой трансформации Л. Хорстен предлагает в качестве своеобразного слогана своей концепции: «От конкретных систем — к видовым системам, от конкретных объектов — к произвольным объектам» [Horsten L., 2019, p. 135].

Ответ, который может дать концепция родового структурализма на проблему «неполноты» математических объектов, дается в терминах способности математических объектов принимать определенные значения. Аналогичным образом видовой структурализм избегает «проблемы перестановки»: «Видовая структура не является состоянием, в котором эта самая структура может находиться. Применительно к арифметике, например, видовая $\omega$-последовательность не является сама $\omega$-последовательностью. Можно спросить, относится ли это к сути дела? Не может ли конкурентное число 0 в $\omega$-последовательности “играть роль” конкретного числа 1 и *vice versa*? Ответ на этот вопрос — попросту нет. В каждом состоянии значение, принимаемое конкретным числом 0, играет 0-роль, а значение, принимаемое конкретным числом 1, играет 1-роль» [Horsten L., 2019, p. 187].

## Заключение

Мы можем утверждать, что концепция видового структурализма, разрабатываемая Л. Хорстеном, демонстрирует свою плодотворность. Являясь версией неэлиминативного структурализма, она избегает трудностей, с которыми сталкиваются другие формулировки этой позиции. Наравне с этим особенностью данной концепции является смещение внимания с онтологической проблематики на метафизическую, которая играла второстепенную роль в дебатах о математическом структурализме. Пока еще рано судить о том, какой вид приобретет окончательная формулировка концепции видового структурализма: по признанию автора, перед ним стоит множество принципиально важных вопросов или проблем, которые концепция должна разрешить. Одной из них является проблема независимости и определенности произвольных объектов, на которую указывал еще К. Файн. Применительно к файновской концепции произвольных объектов уже получены интересные результаты средствами независимо-дружественной логики [Sandu G., 2020]. L. Horsten также связывает надежды на решение проблем независимости и определенности абстрактных объектов с IF-logic [Hintikka J., Sandu G., 1989] и Dependence Logic [Grädel E., Väänänen J., 2013]. Позволим себе высказать мнение, что это направление исследования не только обеспечит дальнейшее развитие концепции математического родового структурализма, но и приведет к результатам, имеющим важное значение для философии математики за пределами структуралистских концепций.

## References


Fine, K. (1985). *Reasoning about arbitrary objects*. Oxford, UK: Basil Blackwell Publ., 220 p.

Fine, K. and Tennant, N. (1983). A defence of arbitrary objects. *Aristotelian Society, Supplementary Volumes*. Vol. 15, iss. 1, pp. 55–77. DOI: https://doi.org/10.1093/aristoteliansupp/57.1.55

Grädel, E., Väänänen, J. (2013). Dependence and independence. *Studia Logica*. Vol. 101, iss. 2, pp. 399–410. DOI: https://doi.org/10.1007/s11225-013-9479-2

Hellman, G. (2005). Structuralism. *S. Shapiro (ed.) The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*. New York: Oxford University Press, pp. 536–562. DOI: https://doi.org/10.1093/0195148770.003.0017

Hintikka, J.G. and Sandu, G. (1989). Informational dependence as a semantical phenomenon. *J.E. Fenstad, I.T. Frolov, R. Hilpinen (ed.) Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Vol. 126: Logic, Methodology, and Philosophy of Science, VIII: International Congress Proceedings (Moscow, 1987)*. pp. 571–589. DOI: https://doi.org/10.1016/s0049-237x(08)70066-1

Horsten, L. (2019). *The metaphysics and mathematics of arbitrary objects*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 246 p. DOI: https://doi.org/10.1017/9781139600293

Horsten, L. and Speranski, S. (2019). Reasoning about arbitrary natural numbers from a Carnapian perspective. *Journal of Philosophical Logic*. Vol. 48, iss. 4, pp. 685–707. DOI: https://doi.org/10.1007/s10992-018-9490-1

Ladyman, J. and Ross, D. (2009). *Every thing must go: metaphysics naturalized*. New York: Oxford University Press, 346 p. DOI: https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199276196.001.0001

Linnebo, Ø. and Pettigrew, R. (2014). Two types of abstraction for structuralism. *Philosophical Quarterly*. No. 64, iss. 255, pp. 267–283. DOI: https://doi.org/10.1093/pq/pqt044

Reck, E.H. and Schiemer, G. (eds.) (2020). *The prehistory of mathematical structuralism*. New York: Oxford University Press, 468 p. DOI: https://doi.org/10.1093/oso/9780190641221.001.0001

Sandu, G. (2020). Indefinites, Skolem functions, and arbitrary objects. *M. Dumitru (ed.) Metaphysics, meaning, and modality. Themes from Kit Fine*. New York: Oxford University Press, pp. 98–112. DOI: https://doi.org/10.1093/oso/9780199652624.003.0006

Shapiro, S. (1997). *Philosophy of mathematics: Structure and ontology*. New York: Oxford University Press, 296 p.

Sider, T. (2011). *Writing the book of the world*. New York: Oxford University Press, 318 p. DOI: https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199697908.001.0001

Urquhart, A. (2020). Fine on arbitrary object. *M. Dumitru (ed.) Metaphysics, meaning, and modality.*

*Themes from Kit Fine*. New York: Oxford University Press, pp. 87–97. DOI: https://doi.org/10.1093/oso/9780199652624.003.0005

Worrall, J. (1989). Structural realism: the best of both worlds? *Dialectica*. Vol. 43, iss. 1-2, pp. 99–124. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1746-8361.1989.tb00933.x

*Received/Получена: 01.08.2022. Accepted/Принята к публикации: 18.08.2022*

## Об авторе

**Хлебалин Александр Валерьевич**
кандидат философских наук,
заместитель директора по научной работе

Институт философии и права
Сибирского отделения РАН,
630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8;
e-mail: sasha_khl@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3536-3974
ResearcherID: AAH-2027-2020

## About the author

**Aleksandr V. Khlebalin**
Candidate of Philosophy,
Deputy Director for Research

Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090, Russia;
e-mail: sasha_khl@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3536-3974
ResearcherID: AAH-2027-2020

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**
*Хлебалин А.В.* Произвольные объекты, видовые структуры: метафизический математический структурализм // Вестник Пермского университета. Философия. Психология. Социология. 2022. Вып. 3. С. 399–405.
DOI: 10.17072/2078-7898/2022-3-399-405

**For citation:**
Khlebalin A.V. [Arbitrary objects, species structures: metaphysical mathematical structuralism]. *Vestnik Permskogo universiteta. Filosofia. Psihologia. Sociologia* [Perm University Herald. Philosophy. Psychology. Sociology], 2022, issue 3, pp. 399–405 (in Russian). DOI: 10.17072/2078-7898/2022-3-399-405