

УДК 167/168+51:101.8

## К ОБЪЯСНЕНИЮ СВЯЗАННОСТИ ТРЕБОВАНИЙ КОЛМОГороВА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Резников Владимир Моисеевич**

кандидат философских наук

старший научный сотрудник

Институт философии и права СО РАН

630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8

e-mail: mathphil1976@gmail.com

Показана методологическая значимость требований Колмогорова для вероятностей, изучаемых в приложениях. Так, на основе первого требования близости теоретической вероятности и частот при большом числе испытаний применяются многие результаты, относящиеся к теории вероятностей и математической статистике. На основе второго требования — принципа Курно проверяются статистические гипотезы. Показано, что этот же принцип лежит в основе концепции фальсификационизма в философии Поппера. Обоснованность попперовского фальсификационизма по формальным основаниям напрямую связана с корректностью и универсальностью принципа Курно. Особое внимание уделено исследованию факта связанности этих требований. Показано, что объяснение связанности французских математиков не вписывается в эмпирическую традицию. Анализируются подходы Шейфера и Вовка к объяснениям связанности требований Колмогорова. Проведена классификация этих объяснений по степени их обоснованности. Обсуждаются наиболее обоснованные объяснения, предлагаются и исследуются новые подходы к объяснению связанности этих требований. Основная идея нового объяснения заключается в том, что формальная зависимость первого требования от второго является взаимной и в свою очередь предполагает семантическую зависимость второго условия от формально зависимого требования.

*Ключевые слова:* принцип фальсификации; вероятность; независимость; принцип Курно; теорема Бернулли; частотная интерпретация.

Считается, что теория вероятностей имеет существенный философско-онтологический аспект в связи с диалектической необходимостью случайного. Данная же статья посвящена изучению методологического значения данной теории — значительная методологическая роль философии в отношении науки после работ К. Поппера и его последователей также редко подвергается сомнению.

В 1933 г. в Германии вышла книга А.Н. Колмогорова: «Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung» [14], а в 1936 г. под названием «Основные вопросы теории вероятностей» [2] она была издана в Советском Союзе. В ней Колмогоров впервые предложил аксиоматику теории вероятностей, принятую впоследствии математическим сообществом. Предложенная им аксиоматика означала, что четвертая проблема Д. Гильберта получила частичное решение. Гильберт о поставленной им четвертой проблеме писал так: «...с исследованиями по основаниям геометрии связана задача об аксиоматическом по-

строении по этому же образцу тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь теория вероятностей и механика» [5, с. 34]. В книге Колмогорова кроме описания собственно теории вероятностей с учетом последних достижений в области теории меры и теории интегрирования кратко изложены вопросы методологического характера о связи математического формализма с реальным миром. Исследование методологических вопросов в монографии Колмогорова не является случайным. Колмогоров, несмотря на то, что основные его достижения относились к чистой математике, также интересовался приложениями математики. Его интерес к приложениям находит частичное объяснение в письме к М. Фреше. Колмогоров отмечал: «Формальная аксиоматизация должна быть дополнена анализом ее реального смысла» [18, р. 71]. И далее он продолжает: «Мы можем исследовать любой математический формализм, который нам нравится, но

мы имеем право назвать его вероятностью, только если мы можем объяснить как связать классически рассматриваемый феномен с помощью теории вероятностей» [18, р. 71].

В работе А.Н. Колмогорова рассматривается несколько вопросов методологического характера. Во-первых, вопрос о введении в модель свойства независимости. Колмогоров полагал, что в рамках математики получение полного множества предпосылок, предполагающих введение в модель свойства независимости, невозможно. Эта проблема относится к области философии естественных наук [2, с. 19]. Во-вторых, анализ концептуальных оснований связи математики с областью ее приложений. Колмогоров отмечает, что в вопросах применения математики в целом следует Р. Мизесу [2, с. 12]. В наших предыдущих работах показано, что требования Колмогорова к вероятностям, одно из которых предполагает близость вероятности к частотным характеристикам при большом числе испытаний, а другое запрещает появление события с низкой вероятностью в единственном испытании, представляют не только исторический интерес, но и практическую, методологическую значимость. В частности, в связи с этими требованиями применяются многие результаты в математической статистике и теории вероятностей [8–10].

Отметим, что, в отличие от аксиоматики Колмогорова, которую хорошо знают математики и конкретные специалисты, применяющие математику, а также методологи, требования Колмогорова к приложениям менее известны, так как они не популярны и в известной литературе не анализировались, поэтому их исследование представляется актуальным. Особый интерес связан с тем фактом, что требования Колмогорова оказываются зависимыми. Возникает вопрос: «Почему А.Н. Колмогоров остановился на зависимых условиях, не логичнее ли было использовать только независимое условие и необходимые для вывода зависимого, теоремы?». В настоящей статье на основе анализа условий А.Н. Колмогорова и объяснений их связанности в работах Г. Шейфера и В. Вовка предлагается новое объяснение факта связанности в контексте эмпирической интерпретации теории вероятностей.

В статьях Г. Шейфера и В. Вовка [17, 18] и их монографии (частично) [16] рассматриваются результаты, полученные Колмогоровым [2]. Как отмечают Шейфер и Вовк, их интересовали два аспекта. Во-первых, анализ достижений, на основе которых Колмогоровым была получена аксиома-

тическая теория вероятностей. Как считает большинство математиков, работа А.Н. Колмогорова заключалась не в улучшении этих достижений, а в синтезе его теории на основе этих результатов [18, р. 70]. Во-вторых, описание известных концепций, определяющих условия развития теории вероятностей и ее связи с миром данных. Согласно Шейферу и Вовку, на предложенные Колмогоровым условия применения теории вероятностей в существенной степени влияли взгляды французской математической школы. Так, представители французской школы теории вероятностей полагали, что развитие теории основано на предположении о равновероятности всех изучаемых событий. Применение теории, по их мнению, основано на принципе А. Курно, запрещающем появление маловероятного события в единственном эксперименте. Курно писал: «Следовательно, физически невозможное событие — это такое событие, математическая вероятность которого бесконечно мала» [4, с. 89]. Так как на основе теоремы Бернулли и сильного принципа Курно выводится утверждение о близости теоретической вероятности и частот, то тем самым, по мнению П. Леви, достигается объективность изучаемых вероятностных характеристик изучаемых событий [18, р. 73]. Предположение о влиянии французских математиков на предложенные Колмогоровым условия применения теории вероятностей имеет большие основания. Во-первых, А.Н. Колмогоров в своих публикациях ссылается на П. Леви [18, р. 74], во-вторых, математические проблемы обсуждались во время визита Колмогорова во Францию. Сам А.Н. Колмогоров отмечал, что в контексте проблемы применения теории вероятностей его подход близок к Р. Мизесу, основателю частотной концепции теории вероятностей. Согласно Мизесу, частотная интерпретация предполагает сходимость частотных характеристик к вероятности. Требования Колмогорова к применению теории вероятностей таковы:

«А. Можно практически быть уверенным, что если комплекс условий  $S$  будет повторен большое число раз  $n$  и если при этом через  $m$  обозначено число случаев, при которых событие  $A$  наступило, то отношение  $m/n$  будет мало отличаться от  $P(A)$ .

В. Если  $P(A)$  очень мало, то можно практически быть уверенным, что при однократной реализации условий  $S$  событие  $A$  не будет иметь места» [2, с. 13].

Требования А.Н. Колмогорова представляют собой комбинацию подходов П. Леви и Р. Мизеса. Условие А — это финитный вариант требования

Мизеса о сходимости частот к вероятности, а условие В является сильным принципом Курно. В работе [10] показано, что требования Колмогорова значимы в практическом и методологическом плане. Их значимость обусловлена тем, что они широко используются. Так, на основе условия А применяются объективистские концепции теории вероятностей, к которым относят: частотные интерпретации теории вероятностей и в некотором смысле стандартную работающую теорию вероятностей Колмогорова. На основе условия В достигается наилучшая аппроксимация теоретической вероятности с помощью частот в теореме Бернулли, кроме того, второе требование о невозможности реализации маловероятного события в единственном эксперименте является базовым принципом проверки статистических гипотез. Основания всех методов проверки статистических гипотез предполагают фальсификацию проверяемой гипотезы. В случае опровержения гипотезы она отбрасывается, если гипотеза устояла, то она временно принимается. Поэтому принцип Курно имеет методологическую значимость для фальсификационизма, исследуемого в философии К. Поппера. Как известно, философия Поппера основана на принципе фальсификации, поэтому формальная обоснованность концепции Поппера напрямую зависит от обоснованности и универсальности принципа Курно [7, 15].

В настоящее время факт связанности условий Колмогорова не является объясненным в полной мере и представляет интерес для исследования, хотя, как пишут Г. Шейфер и В. Вовк, уже современники А.Н. Колмогорова, в частности Э. Борель и П. Леви, отмечали, что условие А выводится на основе теоремы Бернулли и условия В [18, р. 91]. Борель, Фреше, Леви и др. не занимались исследованием проблемы связанности условий Колмогорова, но на основе их высказываний о роли субъективных вероятностей для развития теоретического аппарата теории вероятностей и значимости принципа Курно как моста, соединяющего теорию вероятностей с миром данных, содержится неявное объяснение факта связанности условий Колмогорова. С философско-методологических оснований представляет интерес неявное объяснение смысла связанности в работах французских математиков. Согласно Борелю, Леви, Фреше и др., связанность условий в контексте теоремы Бернулли имеет значение, так как обеспечивает на основе теоремы Бернулли и субъективных вероятностных оценок как для вероятности, определяемой принципом Курно, так и

для вероятностей, используемых в теореме Бернулли, получение объективистских оценок о близости частот и теоретической вероятности. Однако объяснение французских математиков не является удовлетворительным в рамках эмпиризма. Можно привести несколько контраргументов к идее французских математиков. Во-первых, классики эмпирической традиции, в частности Конт полагали, что корректному применению аналитического аппарата предшествует скрупулезное измерение значений некоторых переменных путем тщательных экспериментов. Затем на основе уравнений, которые связывают измеренные переменные с переменными, недостижимыми экспериментально, и решением этих уравнений получают искомые значения переменных. Во-вторых, в данном случае, уместна аналогия с жерновом и пшеницей. Для того чтобы получить муку хорошего качества, необходимо, чтобы техника помола жернова была высокого качества и исходные данные (пшеница) также должны быть должного качества. В случае исходных данных, полученных на основе единичных экспериментов, а не тщательно спланированных многократно проведенных испытаний, на основе применения теоремы Бернулли сложно рассчитывать на получение надежных частотных оценок.

Отметим, что в настоящее время ни в научной, ни в учебной литературе условия Колмогорова не являются популярными. Если условие А иногда приводится в учебной литературе, то условие В полностью игнорируется. Только в известном учебнике по математической статистике Г. Крамера эти условия представлены полностью [3]. Какие-либо объяснения связанности нигде не были предложены, за исключением выше упомянутых работ Шейфера и Вовка, где даны различные объяснения зависимости условия. Однако, прежде чем исследовать объяснения Шейфера и Вовка, сделаем ряд замечаний. На первый взгляд возникает несколько вопросов к факту выводимости условия А на основе условия В и теоремы Бернулли.

Во-первых, вопрос об адекватности этих условий для использования в теории вероятностей и, в частности, как применить теорему Бернулли к условию В, чтобы получить А. Проблема возникает, так как условия А и В заданы неформально. Условие А свидетельствует о близости частоты события и его вероятности, однако остается неясным, насколько близки частота и вероятность этого события. Условие В утверждает, что в единственном эксперименте запрещено появле-

ние маловероятного события. Однако оно не говорит о том, насколько ничтожной должна быть вероятность события для того, чтобы это событие не произошло. Тем не менее, данные обстоятельства не являются препятствием для применения теоремы Бернулли, так как при ее использовании исследователь задает, какова близость частоты и вероятности и насколько малой должна быть вероятность события для того, чтобы его считать невозможным. Отметим, что если условия Колмогорова рассматривать как неформальные, которые и не предполагалось формализовывать, тогда вполне объяснимо, почему практически все математики, читавшие книгу Колмогорова, не заметили, что эти условия оказываются связанными посредством теоремы Бернулли.

Во-вторых, возникает вопрос о необходимости условия В вообще, так как условие А является заключением теоремы Бернулли и при этом оно выводится без использования В. Однако условие В имеет значение, потому что когда оно учитывается, то условие А оказывается верным на любой конечной типичной выборке, т.е. условие В приводит к получению А на выборках меньшего объема по сравнению с непосредственным выводом А на основе теоремы Бернулли. Перейдем к объяснениям, которые были предложены Шейфером и Вовком, мы их классифицировали по степени обоснованности и приводим в порядке ее возрастания.

1. Зависимость не является существенным недостатком, так как в книге Колмогорова условия применения теории вероятностей представлены после его аксиоматики, следовательно, теорема Бернулли еще не была получена и поэтому вывод требования А на основе требования В и теоремы Бернулли не мог быть сделан. По нашему мнению, это объяснение является формальным и не вполне серьезным.

2. Колмогоров мог просто не обращать внимания на то, что его требования к вероятностям оказались зависимыми. Это предположение основано на том, что Колмогоров нигде не дал каких-либо объяснений факта зависимости его требований к вероятностям. Однако трудно предположить, что Колмогоров и многочисленные читатели его книги не замечали формальной связанности этих требований, скорее всего условия Колмогорова воспринимались неформально. Однако если требования к применению математики являются неформализуемыми, то они оказываются вне математики и не могут быть строго проанализированы и использованы в приложениях.

К вполне серьезным и обоснованным относятся следующие объяснения:

3. Условие А, хотя и выводимо на основе условия В, имеет самостоятельное значение, так как является частотным, а Колмогоров отмечал, что его требования к применению теории вероятностей близки к Мизесу, одному из основателей частотной интерпретации теории вероятностей. А.Н. Колмогоров писал: «В изложении необходимых предпосылок для приложимости теории вероятностей к миру действительных событий автор в значительной мере следует выводам Мизеса» [2, с. 12].

4. Существуют трудности верификации свойства независимости в исследуемых данных, когда они представлены выборкой большого объема. Проверка независимости имеет значение для корректного применения теоремы Бернулли, так как первоначально теорема была доказана в предположении независимости данных.

В нашей статье объяснения Шейфера и Вовка усилены путем привлечения дополнительных аргументов в пользу значимости условия А в контексте третьего и четвертого объяснений. Вначале приведем новые аргументы, обосновывающие самостоятельную значимость условия А и тем самым усиливающие третье объяснение Шейфера и Вовка путем сравнительного анализа условий А и В. В эпистемологическом плане условие А является естественным, однако требование В, совпадающее с сильным принципом Курно, является не вполне корректным, как фактически, так и концептуально. Во-первых, маловероятные события в действительности реализуются, но редко. Во-вторых, требование запрета маловероятных событий имеет не вероятностный, а в лучшем случае вероятностно-детерминистский характер. В онтологическом плане А существенно отличается от В: во-первых, вероятность А, как правило, является высокой, а вероятность В — низкой. Во-вторых, А относится к математике, а В — это в существенной мере философский «мост», связывающий теорию вероятностей с миром опыта. Сравнительный анализ условий А и В дополним критическим анализом принципа Курно с логических и операциональных оснований. В операциональном плане принцип Курно заслуживает критики, так как не учитывает объем необходимых экспериментов для получения устойчивой оценки малой вероятности. Так, для того чтобы определить вероятность порядка  $10^{-n}$ , необходимо проведение, по скромной оценке Ю.И. Алимова, порядка  $10^{n+1}$  экспериментов [1, с. 20]. В методоло-

гическом отношении принцип Курно также заслуживает критики. В последние годы представителями различных наук по различным основаниям критикуется методология проверки статистических гипотез [11, 12].

Для данной работы представляют интерес основания критики принципа Курно. Он критикуется, так как существуют структуры данных, для которых появление маловероятного события полностью подтверждает гипотезу, вопреки стандартной логике проверки гипотез. Приведем известный из литературы пример. Предположим, что Джон — американец. Следовательно, маловероятно, что он член конгресса США. Однако он член конгресса США. Тогда по логике проверки статистических гипотез гипотеза, что он американец, опровергается, хотя очевидно, что это верная гипотеза [11]. Данный пример не является единственным, приведем собственный пример. Майк — профессиональный хирург и специалист в области лечения определенной болезни. Один из его пациентов практически безнадежно болен. Однако если операцию делает Майк, то вероятность благополучного исхода с учетом всех известных негативных (состояние здоровья пациента) и позитивных (квалификация и опыт Майка) факторов мала, но больше нуля. Он сделал операцию и пациент остался жив. Произошло маловероятное событие. По логике проверки гипотез предположение, что Майк — профессиональный хирург, должно быть отвергнуто [9, с. 107].

Хотя условие А формально выводимо на основе условия В и теоремы Бернулли, однако в рамках частотной традиции имеет смысл выводимость на основе вероятностей, которые были получены на основе устойчивых частот. Поэтому вероятность, определенная в соответствии с принципом Курно, должна быть согласована с условием А или в определенном эмпирическом смысле от него зависима.

Теперь приведем аргументы в пользу значимости условия А в контексте четвертого объяснения Шейфера и Вовка путем анализа теоремы Бернулли. В начале приведем формулировку теоремы Бернулли. В простейшем случае теорема Бернулли формулируется так.

Теорема. Проводится  $n$  независимых испытаний события А, и в  $m$  экспериментах произошло событие А. Известно, что теоретическая вероятность появления события А в каждом эксперименте равняется  $p(A)$ ,  $m/n$  — это частота события А,  $\varepsilon$  — это точность вычислений. Тогда, при бес-

конечном числе экспериментов выполняется следующее равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|m/n - p(A)| < \varepsilon) = 1 \quad (1)$$

Иногда утверждают, что теорема имеет операциональное и эпистемологическое значение по следующим основаниям. Во-первых, теорема устанавливает близость теоретической вероятности и эмпирических частот. Во-вторых, еще более важно то, что она определяет вероятность для этой близости. В-третьих, она обеспечивает получение объективных вероятностей на основе субъективных вероятностей. Мы полагаем, что ее значимость переоценивается. Во-первых, в теореме предполагается известной заранее теоретическая вероятность, хотя теоретические величины априори неизвестны. Во-вторых, утверждение, что математика обеспечивает получение объективных оценок на основе вычислений над субъективными оценками, представляется сомнительным. Математические науки обладают свойством консервативности истины, обеспечивая получение истинных утверждений путем правильных рассуждений, применительно к ранее полученным истинным утверждениям. В-третьих, при естественной эмпирической интерпретации требуется намного больше вычислений, чтобы определить внешнюю вероятность  $P$  в выражении (1) по сравнению с внутренней вероятностью  $p(A)$  [6]. В-четвертых, в контексте эмпиризма применение прикладной статистики является обоснованным для многократно экспериментально полученных устойчивых оценок. Поэтому применение теоремы Бернулли предполагает, что вероятность успеха испытаний в этой теореме — это теоретическая вероятность, которая была определена на основе устойчивых частотных оценок, а также вероятность, соответствующая принципу Курно, получена на основе статистических испытаний. Получается, что формальная зависимость условия о близости теоретической вероятности к частотам от принципа Курно и теоремы Бернулли предполагает, что вероятность, определенная принципом Курно, и вероятность успеха испытаний, входящие в теорему Бернулли, согласованы с условием о близости частот к вероятности и в некотором смысле от него зависимы. Отметим, что сложности применения теоремы Бернулли связаны не только с проверкой независимости для выборок большого объема данных, но и с проверкой на малую свя-

занность, так как теорема верна и для малозависимых экспериментов.

Итак, при эмпирической интерпретации зависимости условия А от условия В и теоремы Бернулли предполагает, что вероятность, соответствующая принципу Курно, и вероятности, входящие в теорему Бернулли, являются статистически устойчивыми, т.е. согласованными с условием А или в некотором семантическом смысле от него зависимыми. Возможно, что семантическая зависимость условия В от А, трудности проверки условий применимости теоремы Бернулли и недостатки принципа Курно объясняют, почему Колмогоров не считал, что формальная зависимость условия А является недостатком. Наше объяснение связанности условий Колмогорова, так же как и объяснения Шейфера и Вовка, являются реконструкциями этих условий и не могут быть окончательными, так как Колмогоров не оставил развернутых комментариев к предложенным им условиям применимости теории вероятностей.

Проведенное исследование относится к области «точной философии», которая на наш взгляд, может выступать в качестве раздела философии науки. Выделение «точной», или «формальной», философии в отдельное направление, с одной стороны, связано с популярностью формальных методов в различных областях знания, включая философию науки, аналитическую философию и др. С другой стороны, хотя математические и логические результаты являются формально корректными, это не исключает семантическое, практическое и методологическое несовершенство этих методов, препятствующее их обоснованному использованию в практике научных исследований. Кроме того, некоторые предпосылки формальных методов являются не точными, а лишь правдоподобными, например рассмотренный нами принцип Курно. Эти особенности формальных методов приводят к двум значимым задачам: 1) необходим всесторонний анализ (методологический, философский, практический и т.д.) формальных методов, особенно популярных в приложениях; 2) возможно и необходимо искать решение ряда научных и философских проблем с помощью формальных методов. Данное направление представляется перспективным. Во-первых, в «формальной философии» для ряда проблем находятся решения. Во-вторых, эти решения оказываются не самого общего характера. Однако решение некоторых частных проблем в ряде случаев имеет эвристическую значимость и может привести к нахождению общего решения. Неплохое, на наш взгляд, введение в основные

принципы и методы «формальной философии» предложено в интересной работе Хендрикса и Симона (2006) [13].

### Список литературы

1. *Алимов Ю.И.* Альтернатива методу математической статистики. М.: Знание, 1980. 84 с.
2. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974. 120 с.
3. *Краммер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.
4. *Курно А.* Основы теории шансов и вероятностей. М.: Наука, 1970. 384 с.
5. *Проблемы Гильберта.* М.: Наука, 1969. 240 с.
6. *Резников В.М.* Анализ условий применения теории вероятностей по Колмогорову // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. Краснодар: КубГАУ. 2014. № 04(098). URL: <http://ej.kubagro.ru/2014/04/pdf/108.pdf> (дата обращения: 07.05.2014).
7. *Резников В.М.* Вероятностные идеи в философии К. Поппера // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Философия. Новосибирск, 2013. Т. 11, вып. 2. С. 143–148.
8. *Резников В.М.* Критический анализ условий применения теории вероятностей по Колмогорову // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Философия. 2012. Т. 10, вып. 1. С. 19–24.
9. *Резников В.М.* Об адекватности математической статистики // Знания-Онтологии-Теории: материалы Всеросс. конференции с международным участием, 8–10 октября 2013 г. Новосибирск: Прайс-Курьер, 2013. Т. 2. С. 106–111.
10. *Резников В.М.* Об адекватности принципа Курно в математике // Философия математики: актуальные проблемы. Математика и реальность: тез. Третьей Всеросс. науч. конференции. 27–28 сентября 2013 г. М.: Центр стратегической конъюнктуры, 2013. С. 91–95.
11. *Cohen J.* The Earth is Round ( $p < 0,05$ ) // *American Psychologist*. 1994. Vol. 49, № 12. P. 997–1003.
12. *Fidler F.* From statistical significance to effect estimation: Statistical reform in psychology, medicine and ecology. Department of History and Philosophy of Science. The University of Melbourne, 2005. URL: [http://www.botany.unimelb.edu.au/envisci/docs/fidler/fidlerphd\\_aug06.pdf](http://www.botany.unimelb.edu.au/envisci/docs/fidler/fidlerphd_aug06.pdf) (date of access: 22.05.2014).
13. *Hendricks V., Symons J.* Masses of Formal Philosophy. London: Automatic Press, 2006. 264 p. URL: <http://www.formalphilosophy.com> (date of access: 22.05.2014).

12.08.2014).

14. Kolmogoroff A. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Springer, 1933. 62 s.
15. Popper K. The propensity interpretation of the calculus of probability, and quantum theory // Observation and interpretation: A symposium of philosophers and physicists / ed. by S. Körner. M.H.L. Pryce. L., 1957. P. 65–70.
16. Shafer G., Vovk V. Probability and Finance It's Only a Game! N.Y.: A Wiley-Interscience Publication, 2001. 414 p.
17. Shafer G., Vovk V. The origins and legacy of Kolmogorov's Grundbegriffe. URL: <http://www.probabilityandfinance.com/articles/04.pdf> (date of access: 22.05.2014).
18. Shafer G., Vovk V. The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe // Statistical Science. 2006. Vol. 21, № 1. P. 70–98.

Получено: 14.08.2014.

## References

1. Alimov Yu.I. *Al'ternativa metodu matematicheskoy statistiki* [An alternative to the method of mathematical statistics]. Moscow, Znanie Publ., 1980, 84 p. (In Russian).
2. Kolmogorov A.N. *Osnovnye ponyatiya teorii veroyatnostej* [Basic terms of theory of probability]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 120 p. (In Russian).
3. Cramer G. *Matematicheskie metody statistiki* [Mathematical methods of statistics]. Moscow, Mir Publ., 1975, 648 p. (In Russian).
4. Cournot A. *Osnovy teorii shnsov i veroyatnostej* [Exposition of the theory of chance and probability]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 384 p. (In Russian).
5. *Problemy Gil'berta* [Problems of Hilbert]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 240 p. (In Russian).
6. Reznikov V.M. [Analysis of application conditions of the theory of probability sensu Kolmogorov]. *Politematicheskij setevoy elektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta* [Polythematic net online scientific journal of Kuban State Agrarian University]. Krasnodar, Kuban State Agrarian University Publ., 2014, no 4(098). Available at: <http://ej.kubagro.ru/2014/04/pdf/108.pdf> (accessed: 07.05.2014). (In Russian).
7. Reznikov V.M. [Probability ideas in K. Popper's philosophy]. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Filosofiya* [Novosibirsk State University Bulletin. Series "Philosophy"]. 2013, vol. 11, no 2, pp. 143–148. (In Russian).
8. Reznikov V.M. [Critical analysis of application conditions of the theory of probability sensu Kolmogorov]. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Filosofiya* [Novosibirsk State University Bulletin. Series "Philosophy"]. 2012, vol. 10, no 1, pp. 19–24. (In Russian).
9. Reznikov V.M. [Concerning adequacy of mathematical statistics]. *Znaniya-Ontologii-Teorii: Materialy vsrossijskoj konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [Knowledge-Ontologies-Theories: Proceedings of All-Russian Scientific Conference with international participation]. 8-10<sup>th</sup> October. Novosibirsk, Prais-Kur'er Publ., 2013, vol. 2, pp. 106–111. (In Russian).
10. Reznikov V.M. [Concerning adequacy of Cournot's principle]. *Filosofiya matematiki: aktual'nye problemy. Matematika i real'nost': Tezisy tret'ej vsrossijskoj nauchnoj konferentsii*. [Philosophy of mathematics: current issues. Mathematics and reality: Proceedings of the 3<sup>rd</sup> All-Russian scientific conference]. 27-28<sup>th</sup> of September 2013. Moscow, Centre of Strategic Conjecture Publ., 2013, pp. 91–95. (In Russian).
11. Cohen J. The Earth is Round ( $p < 0,05$ ) // *American Psychologist*. 1994. Vol. 49, № 12. P. 997–1003.
12. Fidler F. From statistical significance to effect estimation: Statistical reform in psychology, medicine and ecology. Department of History and Philosophy of Science. The University of Melbourne, 2005. Available at: [http://www.botany.unimelb.edu.au/envisci/docs/fidler/fidlerphd\\_aug06.pdf](http://www.botany.unimelb.edu.au/envisci/docs/fidler/fidlerphd_aug06.pdf) (accessed 22.05.2014).
13. Hendricks V, Symons J. *Masses of Formal Philosophy*. London: Automatic Press, 2006. 264 p. Available at: <http://www.formalphilosophy.com> (accessed 12.08.2014).
14. Kolmogoroff A. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Springer, 1933. 62 p.
15. Popper K. The propensity interpretation of the calculus of probability, and quantum theory // Observation and interpretation: A symposium of philosophers and physicists / ed. by S. Körner M.H.L. Pryce. L. 1957. P. 65–70.
16. Shafer G., Vovk V. Probability and Finance It's Only a Game! N.Y.: A Wiley-Interscience Publication, 2001. 414 p.
17. Shafer G., Vovk V. The origins and legacy of Kolmogorov's Grundbegriffe. URL: <http://www.probabilityandfinance.com/articles/04.pdf> (accessed 22.05.2014).
18. Shafer G., Vovk V. The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe // *Statistical Science*. 2006. Vol. 21, № 1. P. 70–98.

The date of the manuscript receipt: 14.08.2014.

ON THE EXPLANATION OF CONNECTEDNESS  
OF KOLMOGOROV'S CONDITIONS FOR PROBABILITIES

*Vladimir M. Reznikov*

*Institute of philosophy and law of SB RAS; 8, Nikolaev str., Novosibirsk, 630099, Russia*

The methodological significance of Kolmogorov's conditions for probabilities studied in applications is demonstrated. For instance, on the basis of the first condition about the proximity of theoretical probability and frequencies under a large number of experiments we used many results in probability theory and mathematical statistics. On the basis of the second condition — Cournot's principle — verification of statistical hypotheses is carried out. The same principle is the foundation of the concept of falsificationism in Popper's philosophy. The validity of Popper's falsificationism for formal reasons is directly connected with the correctness and universality of Cournot's condition. A special attention is paid to studying the explanations of the fact of connectedness of the requirements. It is demonstrated that the explanation of connectedness by the French mathematicians is not empirical in character. The approaches of Shafer and Vovk to the explanation of connectedness of Kolmogorov's requirements are analyzed. A classification of these explanations according to their feasibility is presented. The best justified explanations are discussed; new approaches to the explanation of connectedness of the requirements are proposed and studied. The basic idea of the new explanation is that the formal dependence of one requirement on another presupposes, in turn, the semantic dependence of the formally independent requirement on the formally dependent one.

*Key words:* principle of falsification; probability; independence; Cournot's principle; Bernoulli's theorem; frequency interpretation.

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

*Резников В.М. К объяснению связанности требований Колмогорова для вероятностей // Вестник Пермского университета. Философия. Психология. Социология. 2014. № 3(19). С. 59–66.*

**Please cite this article in English as:**

*Reznikov V.M. On the explanation of connectedness of Kolmogorov's conditions for probabilities // Perm University Bulletin. Series «Philosophy. Psychology. Sociology». 2014. No. 3(19). P. 59–66.*