

Интенсивность потока тепловой энергии из водного объекта через ледовое покрытие в атмосферу определяется как толщиной льда, мощностью на нем снега, так и разницей температуры воды и воздуха

$$j_{AT} \sim \frac{\lambda_{эф}}{h_{эф}} (T_{AT} - T_{вод}) \left[\frac{Вт}{м^2} \right], \quad (1)$$

где $\lambda_{эф}$ – эффективный коэффициент теплопроводности ледового и снежного покрытия; h – толщина льда; T_{AT} и $T_{вод}$ – температура воздуха и воды.

Интенсивность потока тепловой энергии в результате взаимодействия в системе <<вода> ↔ <дно>>.

$$j_{сп.в.} \sim \frac{\alpha_{сп}}{h_{эф}} (T_{сп} - T_{вод}) \left[\frac{Вт}{м^2} \right], \quad (2)$$

где $\alpha_{сп}$ – коэффициент теплоотдачи в системе <<вода>-<грунт>>, $T_{сп}$ – температура грунта.

При этом $\alpha_{сп} = \frac{\lambda_{вода} * St}{H}$, где St – число Струхаля.

Весьма полная оценка параметра St для гладких и шероховатых русел дана в [10]. Для гладких русел, т.е. русел, у которых $\frac{\nabla \cdot V_x}{v} \ll 1$,

$$St = \frac{C_f / 2}{\alpha_0 \cdot \ln(H / \nabla) + \beta_1 + \beta_2}, \quad (3)$$

где $C_f = 2 \cdot [V_* / V_{cp}]^2$, $\alpha_0 = 2.12$, $\beta = 0.3$, $\beta_2 = 0.55 \cdot h^{0.5} \cdot [Pr^{2/3} - 0.2] + 9.5$

Соответственно для шероховатых русел:

$$St = \frac{(\lambda / 8)^{0.5}}{\alpha_0 \cdot \ln(Re / \Delta) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \cdot (\lambda / 8)^{0.5}}, \quad (4)$$

где $\beta_3 = 2.1$, $\beta_4 = 5.3$, $\lambda = 8 \cdot [V_* / V_{(\Delta)}] = 2g / C^2$.

Основным внутриводоемным источником тепловой энергии, по-видимому, является диссипация турбулентной энергии потока.

Осредненный по глубине потока поток энергии за счет процессов диссипации составляет

$$j_{дисс} \sim \rho \cdot \varepsilon \cdot H, \left[\frac{Вт}{м^2} \right], \quad (5)$$

где ε – диссипация турбулентной энергии потока.

По [6] $\varepsilon = g \cdot V \cdot i$, учитывая, что

$$V_* = (H \cdot g \cdot i)^{1/2},$$

где V_* – динамическая скорость потока, и то, что

$$V_* = V \cdot \left(\frac{\sqrt{g}}{C} \right), \text{ имеем}$$

$$\varepsilon = \frac{V \cdot V^2}{H} \left(\frac{\sqrt{g}}{C} \right)^2 = (V^3 / H) \left(\frac{\sqrt{g}}{C} \right)^2. \quad (6)$$

Приток тепла с подземным стоком:

$$q_{\text{под}} \cdot T_{\text{сн}} = q_{\text{под}L} \cdot T_{\text{под}} \cdot 4.186 [Bm]$$

где T – температура воды грунтового питания;

$q_{\text{под.эф.}}$ – суммарный приток [$\text{м}^3/\text{с}$] на единицу объема водного объекта.

Приток тепла с поверхностным притоком

$$q_{\text{нов.}} = \rho \cdot q_{\text{нов.}} \cdot T_{\text{нов.}} \cdot 4.186, \quad J_{\text{под.эф.}W} = \left(\frac{q_{\text{под.}}}{W} \right) \text{ или } j_{\text{под.эл.}} = j_{\text{под.эл.}} \cdot H_B \left[\frac{Bm}{M^2} \right],$$

где $T_{\text{нов.}}$ – характерная температура воды поверхностного притока;

$$j_{\text{нов.эф.}} = \frac{q_{\text{нов.}}}{W}, \quad j_{\text{нов}W} = \frac{q_{\text{нов.}}}{W} = \frac{Bm}{M^2} \text{ или } j_{\text{нов.}} = j_W \cdot H_B \left[\frac{Bm}{M^2} \right],$$

где W – характерный расчетный объем водного объекта.

Интенсивность вертикального турбулентного потока тепла от дна к поверхности составит $j_{\text{тур}} \sim D_{zz} \cdot \partial T / \partial z \sim D_{zz} \sim 0.07 \cdot V_* \cdot H$.

В простейшем случае, если $J_{AT} \gg J_{\varepsilon} \sim j_{\text{нов.}} \sim j_{\text{под.}} \sim j_{\text{тур}}$, то интенсивность образования льда будет определяться только интенсивностью потока тепла в системе <<поверхность водного объекта> ↔ <атмосфера>>.

Рассматриваемые модели

Принимая изменения температуры во льду в виде линейной функции, исходя из баланса тепловой энергии, имеем

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\beta_{\text{эф}}}{L_{\text{лед}} \cdot \rho_{\text{лед}}} (T_A - T_{\text{вод}}), \quad (7)$$

$$\frac{1}{\beta_{\text{эф}}} = \frac{1}{\beta_{\text{лед}}} + \frac{1}{\beta_{\text{снег}}} + \frac{\lambda_{\text{снег}}}{\lambda_{\text{лед}} \cdot \alpha}, \quad (8)$$

при $\frac{1}{\beta_{\text{лед}}} = \frac{h}{\lambda_{\text{лед}}}, \quad \frac{1}{\beta_{\text{снег}}} = \frac{h_{\text{снег}}}{\lambda_{\text{снег}}}, \quad \alpha \cong \frac{\lambda_{\text{снег}}}{\Delta T_{\text{снег-лед}}} \cdot \frac{\partial T}{\partial Z}.$

Для постоянных во времени значений $h_{\text{снег}}, \lambda_{\text{лед}}, \lambda_{\text{снег}}, \alpha_{\text{снег}}$ нетрудно из (1) найти аналитическое решение для h .

Подставляя значения $\beta_{\text{эф}}$ из (7) в (6), решая соотношение относительно h , имеем

$$\frac{h^2}{2\lambda_{\text{лед}}} + h \cdot \left(\frac{h_{\text{снег}}}{\lambda_{\text{снег}}} + \left(\frac{\lambda_{\text{снег}}}{\lambda_{\text{лед}}} \right) / \alpha_{\text{снег}} \right) = \frac{-\int_0^t (T_A - T_B) dt}{L_L \cdot \rho_{\text{лед}}}. \quad (9)$$

Принимая $T_B = 0$ и заменяя интеграл соответствующей суммой, имеем

$$-\int_0^t (T_{AT} - T_B) dt = \sum_{i=1}^t (T_{Ai} \cdot \Delta t_i) = \theta(t). \quad (10)$$

где $\theta(t)$ - сумма отрицательных температур воздуха с осреднением (шагом) Δt за период t .

В простейшем случае при $h_{\text{снег}} = 0$

$$h(t) \sim \left(\frac{\lambda_{\text{лед}} \cdot 2}{\rho_{\text{лед}} \cdot L_n} \right)^{1/2} \cdot (\theta(t))^{1/2}. \quad (11)$$

Подставляя соответственно значения для коэффициентов $\lambda_{\text{лед}}, \rho_{\text{лед}} \cdot L_n$, имеем

$$\rho_{\text{лед}} = 0,91 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, [16]$$

$$\lambda_{\text{лед}} \cong 0,0054 \frac{\text{кал}}{\text{сек} \cdot \text{см} \cdot \text{град}} \text{ или } 2,2 \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}, \quad (12)$$

$$L_n = 80 \frac{\text{кал}}{\text{г}} \cong 333,5 \frac{10^3 \text{ Дж}}{\text{кг}}.$$

Принимая в качестве единицы измерения времени <сутки>, имеем

$$K_{\text{лед}} = \left(\frac{\lambda_{\text{лед}} \cdot 2}{\rho_{\text{лед}} \cdot L_n} \right)^{1/2} = 3,6 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{(\text{град} \cdot \text{сут})^{0,5}} \text{ или } 3,6 \frac{\text{см}}{(\text{град} \cdot \text{сут})^{0,5}}. \quad (13)$$

В более общем случае, решая (9) относительно h , имеем

$$h \cong -C_1 + \sqrt{C_1^2 + \frac{2\theta(t) \cdot \lambda_{\text{лед}}}{L_n \cdot \rho_{\text{лед}}}}, \quad (14)$$

$$C_1 = \left(\frac{\lambda_{\text{лед}}}{\lambda_{\text{снег}}} \right) \cdot h_{\text{снег}} + \lambda_{\text{снег}} / \alpha_{\text{снег}} = \left(\frac{h_{\text{снег}}}{\lambda_{\text{снег}}}_{\text{эф}} \right) \cdot \lambda_{\text{лед}} + \lambda_{\text{снег}} / \alpha_{\text{снег}}. \quad (15)$$

Из (13) нетрудно видеть, что в частном случае, учитывая, что $K_{\text{лед}} = \left(\frac{2 \cdot \lambda_{\text{лед}}}{\rho_{\text{лед}} \cdot L_n} \right)^{1/2}$, можем записать

$$h(t) = -C_1 + C_1 \left(1 + \frac{(K_{\text{лед}}^2 \cdot \theta(t))}{C_1^2} \right)^{1/2}. \quad (16)$$

При $\frac{(K_{\text{лед}}^2 \cdot \theta(t))}{C_1^2} \ll 1$, линеаризуя правую часть соотношения (16), имеем

$$h_{\text{л}} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{(K_{\text{лед}}^2 \cdot \theta(t))}{C_1^2}. \quad (17)$$

Соответственно, если $\frac{(K_{\text{лед}}^2 \cdot \theta(t))}{C_1^2} \gg 1$, то $h \cong K_{\text{лед}} \cdot (\theta(t))^{1/2} - C_1$.

Решение уравнения (14) для различных значений параметра C_1 представлено на рис. 2.

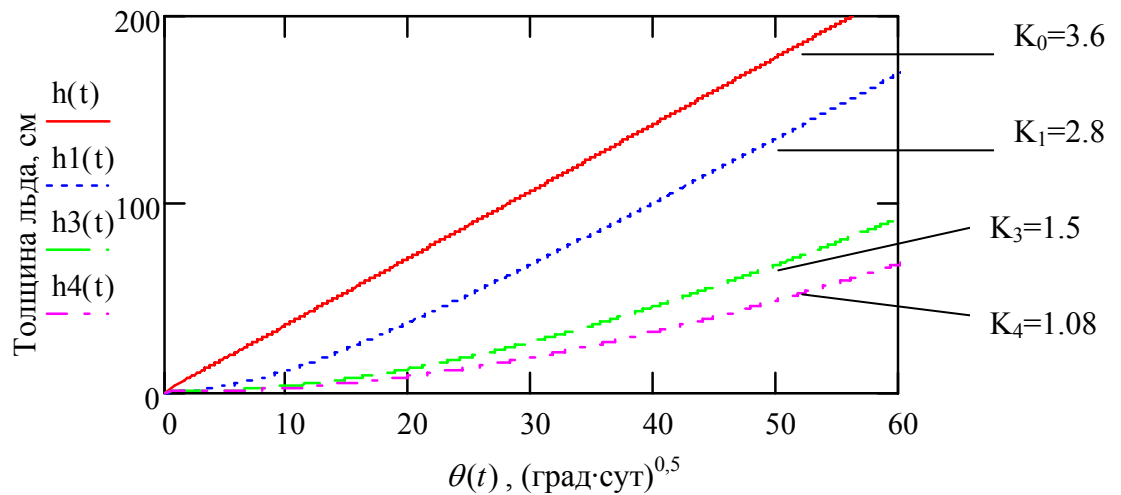


Рис. 2. Зависимость толщины льда в зависимости от параметра $\theta(N)^{1/2}$ и параметра K_i

$$h \rightarrow h_{\text{снег}} \cdot \frac{\lambda_{\text{лед}}}{\lambda_{\text{снег}}} \approx 0, \quad h1 \rightarrow h_{\text{снег}} \cdot \frac{\lambda_{\text{лед}}}{\lambda_{\text{снег}}} = 0.5, \quad h3 \rightarrow h_{\text{снег}} \cdot \frac{\lambda_{\text{лед}}}{\lambda_{\text{снег}}} = 2, \quad h4 \rightarrow h_{\text{снег}} \cdot \frac{\lambda_{\text{лед}}}{\lambda_{\text{снег}}} = 4$$

Сложность использования данной модели (13) заключается не только в том, что величина $h_{\text{снег}}$ не является постоянной для достаточно длительного промежутка времени, но и в том, что $\lambda_{\text{снег}}$ в значительной мере определяется плотностью снежного покрова $\rho_{\text{снег}}$. При этом величина $\rho_{\text{снег}}$ варьирует в очень широком диапазоне [16].

$$\frac{\lambda_{\text{снег}}}{\lambda_{\text{лед}}} = 2,5, \quad \rho = 0,6 \cdot 10^3 \frac{\text{г}}{\text{м}^3},$$

$$\rho_{\text{снег}} \geq 0,01 \text{ г/см}^3 = 10 \text{ кг/см}^3 - \text{свежевыпавший снег},$$

$\rho_{\text{снег}} \sim 0,07 \text{ г/см}^3 = 700 \text{ кг/см}^3$ - сильно промокший, а затем смерзшийся снег.

Поэтому расчет может проводиться по соотношению (16), но для весьма ограниченных временных интервалов, для которых плотность снега остается весьма стабильной.

Для оценки параметра $\lambda_{\text{снег}}$ рекомендуется использовать соотношение [15]

$$\lambda_{\text{снег}} \cong 9,165 \cdot 10^{-2} + 2,905 \cdot \rho_{\text{снег}}^2 - 0,3814 \cdot \rho_{\text{снег}} \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}} \right]. \quad (18)$$

Как следует из представленных выше соотношений, для оценки $\lambda_{\text{снег}}$ определяющим параметром является плотность снега.

Уплотнение снега зависит как от времени, так и от широкого комплекса метеорологических факторов [11].

Нетрудно видеть, что для большинства характерных случаев и роль компонента весьма мала.

$$\left(\frac{\lambda_{\text{лед}}}{\lambda_{\text{снег}}} \right) \cdot h_{\text{снег}} \gg \lambda_{\text{снег}} / \alpha_{\text{снег}} \quad (19)$$

Численные модели

Использование численных моделей позволяет не только задать изменения во времени таких определяющих параметров, как толщина снежного покрова, его плотность, но и более полно учесть другие, кроме $\dot{J}_{\text{атм}}$, потоки тепла.

Внешние потоки тепла, поступающие в водный объект через ложе, как уже отмечалось, весьма малы и практически не зависят от величины $h(t)$.

Значительно больший интерес представляет тепловой поток, обусловленный диссипацией турбулентной энергии потока.

При этом необходимо отметить, что рост $h(t)$ вызывает уменьшение площади поперечного сечения водотока, что, естественно, приводит к изменению скорости потока.

$$V_{cp} \sim \frac{Q(t)}{(H - \alpha)^\gamma \cdot B_0}, \quad (20)$$

$\gamma > 1$, для русла прямоугольного сечения $\gamma = 1$, а треугольной формы $\gamma = 2$.

Поток тепловой энергии за счет процессов диссипации можно оценить следующим образом:

$$\dot{J}_{\text{дисс}} \sim \rho \cdot \left(\frac{Q}{(H - h)^\gamma \cdot B} \right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{g}}{C_p} \right)^2. \quad (21)$$

Ледовый покров не только уменьшает поперечное сечение русла, но и увеличивает общее сопротивление русла, тем самым уменьшая C_p . Однако шероховатость нижней кромки льда не зависит от h , а зависит от продолжительности стояния ледового покрова [9].

В первом приближении C можно рассматривать как постоянную величину. Включение компонента $\dot{J}_{\text{дисс}}$ существенно качественно изменяет характер роста $h(t)$. Если толщина и плотность снежного покрова значительно снижает интенсивность «охлаждения» водного объекта, то диссипация является дополнительным источником энергии. Рост ледового покрова прекращается при $\dot{J}_A \sim \dot{J}_{\text{дисс}}$, а если $\dot{J}_{\text{дисс}} > \dot{J}_A$, то должно наблюдаться уменьшение $h(t)$.

Рассмотрим на основе численного моделирования, как принятая модель отражает данные особенности процессов ледообразования. Листинг программ по реализации модели приведен в приложении. Численное решение уравнений проводится с использованием программного средства Matcad13 (прил.).

Как следует из представленных материалов, скоростной режим водотоков может оказывать существенное влияние через генерируемые потоки тепловой энергии или динамику льдообразования. Поэтому данный фактор наряду с температурой воздуха, толщиной и плотностью снегового покрова необходимо учитывать при расчете толщины льда на водотоках. Учет данного фактора важен в предпаводковый период, когда увеличение расхода может служить важным ослаблением толщины ледяного покрытия.

Проведенные численные расчеты показали, что в характерном диапазоне изменение параметра α , величина коэффициента теплообмена практически не влияет на интенсивность льдообразования, поэтому его учет часто может быть не существен.

Основное применение данной модели: не решение прогностических задач, а отработка и анализ влияния отдельных компонентов на интенсивность процессов льдообразования.

Анализ полученных результатов

Простейшее соотношение (9) неплохо в первом приближении согласуется с данными, полученными на основе статистической обработки большого объема фактического материала.

Так, в классическом соотношении Ф.И. Быдина [4] $K = 2$.

Достаточно значимое различие коэффициента $K=2$ от соответствующего коэффициента в соотношении (9) объясняется в первую очередь тем, что в явном виде в соотношении Ф.И. Быдина (1933) не учитывается толщина снежного покрова. Соответственно значение $K=2$ получено для некоторых осредненных условий по толщине и плотности снега, и поэтому оно должно быть меньше коэффициента K , рассчитанного в (13) для условий открытого льда.

Значительно большей близостью к (14) характеризуется известная формула Б.А. Апполова [1]:

$$h(t) \cong 1.8(1 + 1/h_{\text{снег}})(\theta(t))^{1/2}, \quad (22)$$

где $h_{\text{снег}}$ - толщина снега, см.

Нетрудно видеть, при $h=1$ см, что является практически минимальной толщиной снега, зависимости (22) и (9) практически совпадают.

При $h_{\text{снег}} \sim 1$ см соотношение (22) перестает зависеть от $h_{\text{снег}}$ и при $(1/h_{\text{снег}}) \rightarrow 1$, $h(t) \rightarrow 3.6(\theta(t))^{1/2}$.

Как следует из рис. 2, хотя величина $h_{\text{снег}} \left(\frac{\lambda_{\text{лед}}}{\lambda_{\text{снег}}} \right)$ существенно влияет на значения $h(t)$, однако зависимость $h(t) \cong (\theta(t))^{1/2}$ остается близкой к линейной. Поэтому эмпирические зависимости толщины льда $h(f)$ от суммы отрицательных температур $\theta(H)$, как правило [9], строятся в виде зависимости

$$h(t) = K_{\text{лед}}(\theta(t))^\beta \text{ при } \beta = 1/2. \quad (23)$$

Параметр K_i зависит в первую очередь от характеристик снежного покрова. При этом в эмпирических соотношениях в качестве определяющего параметра рассматривается только толщина снега, что обуславливает значительный разброс эмпирических значений.

Использование зависимости (23) с априорно заданным коэффициентом $\beta=1/2$ позволяет оценивать только один статистический параметр K , а не два, что очень существенно при весьма ограниченном объеме исходной выборки. При этом параметр K , как показывает анализ натуральных данных, обратно пропорционален толщине слоя снега и прямо пропорционален плотности снега. Согласно данным, полученным за период 1964-95 г.г. по ледообразованию на Воткинском водохранилище [14], коэффициент $K_{лед}$ варьирует в диапазоне $1,16 \leq K_{лед} \leq 3,31$ (для h , см).

Значительные статистически значимые различия коэффициента $K_{лед}$ даже в масштабах одного водохранилища обусловлены в первую очередь различием условий формирования снежного покрова на отдельных участках водохранилища (рис. 3).

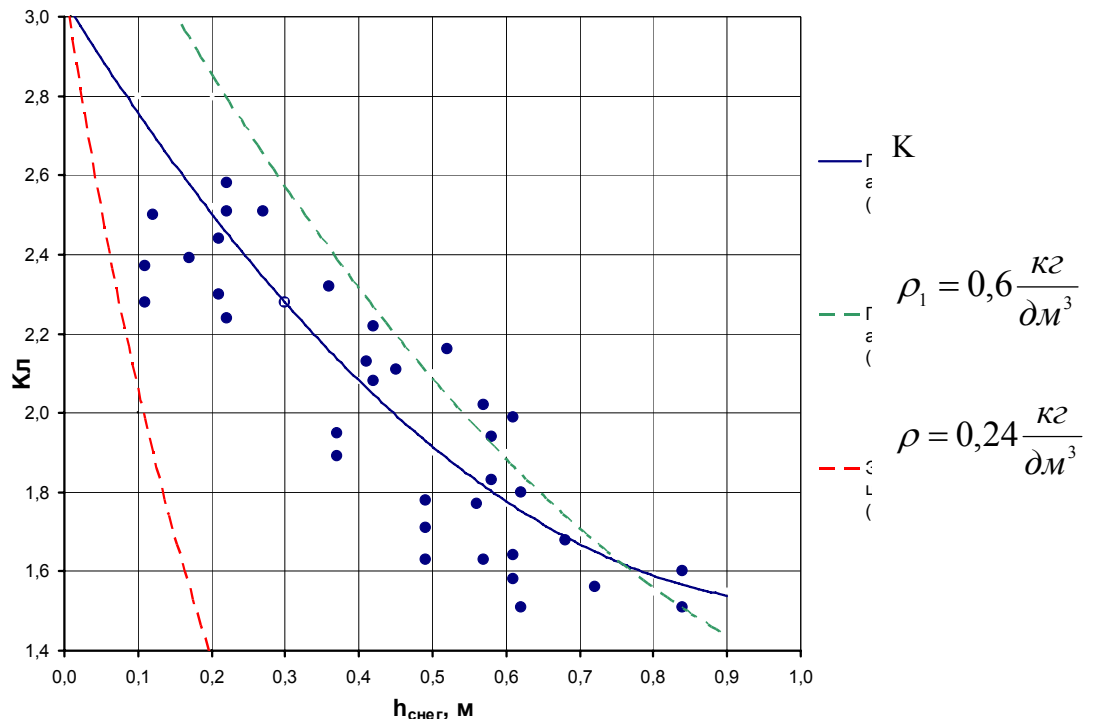


Рис. 3. Связь коэффициента K_L с толщиной слоя снега $h_{сн}$, по [9] и расчетные характеристики

K по линеаризованной модели (16) (рис. 2) при различных значениях плотности снега:

$$K_0=3,6, K_1=2,8, K_2=2,25, K_3=1,5, K_4=1,08, \frac{\lambda_{снег}}{\lambda_{лед}} = 0,4, h_{снег} = h_{эф} \cdot \frac{\lambda_{снег}}{\lambda_{лед}}$$

В работе [9] на основе данных натуральных наблюдений сделана попытка построить зависимости $K_{лед}$ от толщины снежного покрова, т.е. $K_{лед}(h)$. Так как при этом не учитывалась плотность снежного покрова, она характеризуется значительным разбросом наблюдаемых значений. В то же

время, если в расчет ввести плотность снежного покрова, то все точки укладываются в диапазон $0,25 \leq \rho_{\text{снег}} \leq 0,60$ (рис. 3).

Численные модели позволяют, как уже отмечалось, достаточно детально проанализировать роль отдельных факторов в интенсивности нарастания ледового покрова. Результаты модельных расчетов с указанными выше значениями определяющих параметров представлены на рис. 4. Параметры представлены в Приложении. Поток тепловой энергии, обусловленный диссипационными процессами, исключен ($A_3=0$). Нарастание снежного покрова рассчитывается по зависимости $h_{\text{снег}} \sim 0,001 \cdot t$. При отсутствии снежного покрова и в пренебрежении тепловыми потоками, обусловленными диссипационными процессами, толщина льда является максимальной при заданной температуре воздуха и описывается соотношением (11).

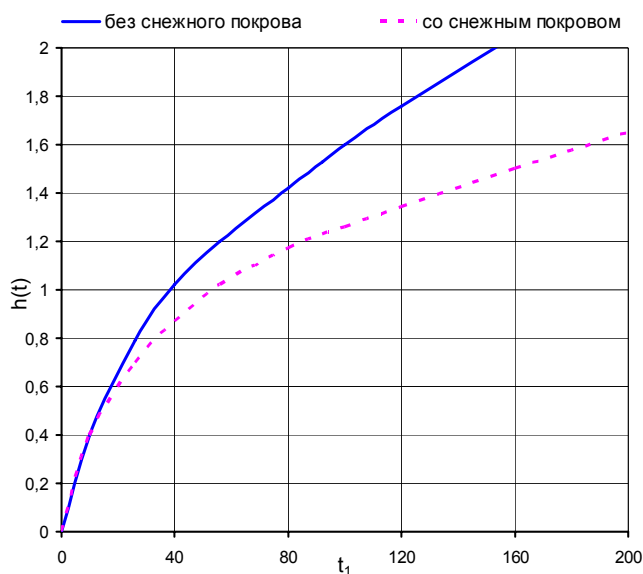


Рис. 4. Динамика нарастания толщины льда, $T \sim 20$ и $h_{\text{снег}} \sim 0$

Как уже отмечалось, даже весьма малая толщина снежного покрова очень существенно влияет на динамику роста толщины льда.

В водотоках с заметными скоростями течений $V > 0,2$ м/с поток тепловой энергии, связанный с диссипационными процессами, может оказывать очень заметное влияние на динамику ледового покрова.

При этом данное влияние очень усиливается при предпаводочном нарастании расхода воды (рис. 5, 6).

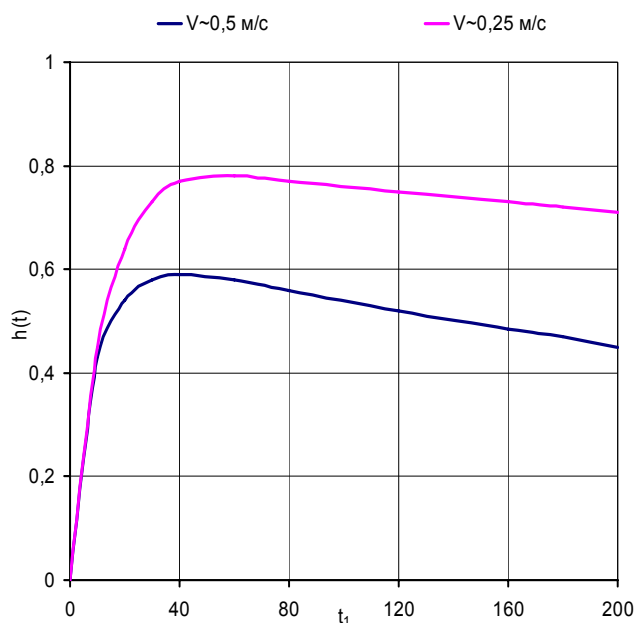


Рис. 5. Динамика нарастания толщины льда при значениях исходных параметров (приложении) и при нарастании снежного покрова по зависимости $h_{\text{снег}} \sim 0.005 \cdot t$ и учете энергии диссипации при $V \sim 0.5 \text{ м/с}$ и $0,25 \text{ м/с}$, $H \sim 1 \text{ м}$

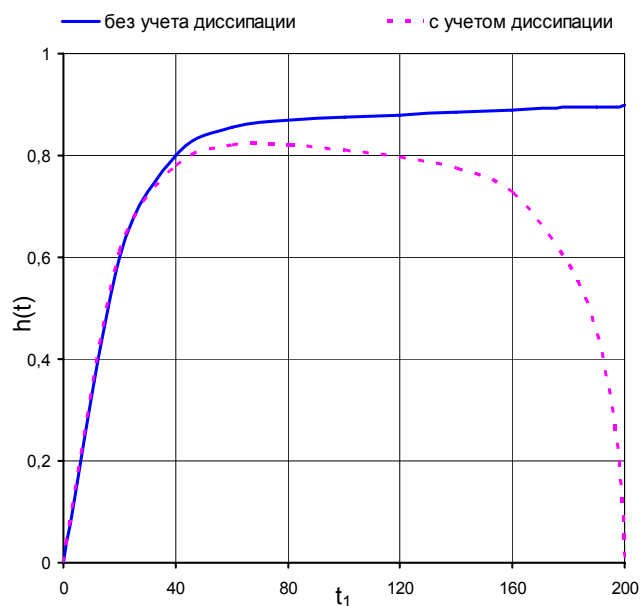


Рис. 6. Динамика нарастания толщины льда при значениях исходных параметров (приложении) и при нарастании снежного покрова по зависимости $h_{\text{снег}} \sim 0.005 \cdot t$ с учетом и без учета диссипации энергии и изменении расхода воды с параметрами $Q_0 \sim 25$, $a_1 \sim 0,01$, $a_2 \sim 0.75 \cdot 10^{-4}$

Как видно из рис. 5, 6, представленная в приложении модель достаточно эффективно может отражать возможное периодическое изменение температуры воздуха на протяжении холодного периода.

В целом следует отметить, что модель (11) дает более гибкие зависимости для оценки толщины ледового покрова. Однако данные модели не рассматривают и не включают такой очень важный показатель, как прочностные характеристики льда. Поэтому в рамках данной модели нельзя объяснить отмечаемое в ряде учебников по гидрологии, в частности в [16], наличие устойчивого отношения $\frac{h_{\text{снег}}}{h} \approx \text{const}$. Данное утверждение основано на высказывании [12] «...толщина снега в общих чертах следует за толщиной льда».

В то же время данное утверждение противоречит многочисленным эмпирическим данным по динамике ледового режима, представленных в [1, 3, 4, 8, 9, 14, 16, 17]. Данная парадоксальная ситуация объясняется тем, что рассматриваемые модели формирования ледового режима, как правило, не учитывают прочностные свойства льда и снежного покрова, что является, без сомнения, значительно более сложной задачей, требующей значительно большего объема исходной информации.

При современном состоянии гидрометеорологической наблюдательной сети без постановки специальных наблюдений исходные данные, необходимые для верификации моделей, включающие прочностные свойства, к сожалению, практически недоступны.

Выводы

Анализ аналитических и численных моделей формирования ледового покрова показал:

1. При ограниченности исходных данных наиболее оптимальной представляется их аппроксимация в виде соотношения $h(t) \cong K \cdot (\theta(t))^{1/2}$, при этом максимальный из коэффициентов $K_i < 3.6 \cdot 10$ [см/(град·сут.)^{0.5}] зависит от толщины и плотности снежного покрова.

2. Величина коэффициента теплоотдачи и, соответственно, определяющие его метеорологические факторы (скорость ветра, облачность, разность температур в приземном слое воздуха и снежном покрове), как правило, в минимальной степени влияют на интенсивность изменения толщины льда.

3. Численные модели позволяют оперативно проанализировать очень большое количество различных комбинаций значений факторов, способных влиять на динамику процессов изменения толщины льда в водных объектах, вычленив наиболее значимые, определяющие для условий конкретного водного объекта.

4. Тепловые потоки, обуславливающие диссипацию энергии осредненного движения, оказывают существенное влияние на динамику процессов льдообразования. Роль этих процессов значительно усиливается, когда толщина льда становится сопоставима с глубиной водотока или при увеличении расходов воды в предпаводочный период.

Библиографический список

1. *Аполлов Б.А.* Учение о реках / Аполлов Б.А. М.: Изд-во МГУ, 1963.
2. *Богородский В.В.* Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии / В.В. Богородский, В.П. Гаврило, О.А. Недошивин. Л.: Гидрометеиздат, 1973.
3. *Бутягин И.П.* Прочность льда и ледяного покрова / И.П. Бутягин. Новосибирск: Наука, 1966. 154 с.
4. *Быдин Ф.И.* Зимний режим рек и методы его изучения / Ф.И. Быдин. М., 1933. 237с.
5. *Винников С.Д.* Гидрофизика / С.Д. Винников, В.В. Проскуряков. Л.: Гидрометеиздат, 1988. 248 с.
6. *Гринвальд Д.И.* Речная турбулентность / Д.И. Гринвальд, В.И. Никора. Л.: Гидрометеиздат, 1988. 150 с.
7. *Давыдов Л.К.* Общая гидрология / Л.К. Давыдов, А.А. Дмитриев, Н.К. Конкина. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 384 с.
8. *Дмитриева Н.Г.* Расчет плотности снежного покрова по метеорологическим данным / Н.Г. Дмитриева // Метеорология и гидрология. 1950. № 2.
9. *Донченко Р.В.* Ледовый режим рек СССР / Р.В. Донченко. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 242 с.

10. *Кадер Б.А.* Влияние шероховатости и продольного градиента давления на турбулентный пограничный слой / Б.А. Кадер, А.М. Яглом // Итоги науки и техники; ВИНТИ. М., 1984.
11. *Козлов Д.В.* Лед пресноводных водоемов и водотоков / Д.В. Козлов. М.: Изд-во МГУП, 2000. 263 с.
12. *Крицкий С.Н.* Зимний режим водохранилищ, рек и каналов / С.Н. Крицкий, М.Ф. Менкель, К.И. Россинский. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1947. 120 с.
13. *Кузьмин П.П.* Физические свойства снега / П.П. Кузьмин. Л.: Гидрометеиздат, 1957. 178 с.
14. *Микова К.Д.* Ледовый режим Воткинского водохранилища и методики его прогноза: автореф. дис. ... канд. геогр. наук / К.Д. Микова. Пермь, 2007.
15. *Осокин Н.И.* Роль снежного покрова в промерзании грунта./ Н.И. Осокин, Р.С. Самойлов, А.В. Сосновский А.В. и др. // Изв. РАН. Сер. География. 2001. № 4. С. 52-57.
16. *Шуляковский Л.Г.* Появление льда и начало ледостава на реках, озерах и водохранилищах. Расчеты для целей прогноза / Л.Г. Шуляковский. Л.: Гидрометеиздат, 1960. 216 с.
17. *Шуляковский Л.Г.* К методике расчета толщины ледяного покрова на водохранилище / Л.Г Шуляковский // Тр. Гидрометцентра СССР. М., 1972. Вып. 49. С. 50-63.

Приложение

Листинг программы моделирования нарастания толщины льда

Given

$$\Delta t := 8640 \text{ (количество} \cdot \text{с} \cdot \text{сут)}$$

$$b := 20 \text{ (принимаемый период цикличности)}$$

$$\rho_{\text{снег}} := 500 \left(\text{плотность снега, } \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right) \quad \chi := 0.41 \text{ (постоянная Кармана)}$$

$$\rho := 1000 \left(\text{плотность воды, } \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right)$$

$$t := 0, 0.1.. 400 \text{ (время, сут)} \quad \rho_{\text{лед}} := 910 \left(\text{плотность льда, } \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right)$$

$$T_{\text{w}}(t) := 30 \text{ (разница температуры воды и воздуха)}$$

$$L := 0.33205 \cdot 10^6 \text{ (удельная теплота ледообразования)}$$

$$C_{\text{w}} := 20 \text{ (коэффициент Шези)}$$

$$\beta := 1.0 \text{ (морфометрический коэффициент)}$$

$$A3 := 1 \quad a2 := 0 \cdot 10 \text{ (2коэффициент расхода)}$$

$$\lambda_{\text{лед}} := 2.2 \left(\text{коэффициент теплопроводности льда, } \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}} \right)$$

$$a1 := 0.005 \text{ (1коэффициент расхода)}$$

$$B := 50 \text{ (начальная ширина реки, м)}$$

$$Q(t) := \frac{25}{1 + a1 \cdot t - a2 \cdot t^2} \text{ (расход водотока)}$$

$$h_{\text{снег}}(t) := 0.00075 \cdot (t + 1) \text{ (толщина снежного покрова, м)}$$

$$H_{\text{w}} := 1 \text{ (начальная глубина реки, м)}$$

$$\lambda_{\text{снег}}(\rho_{\text{снег}}) := 0.091 - 0.38 \cdot \left(\frac{\rho_{\text{снег}}}{1000} \right) + 2.905 \cdot \left(\frac{\rho_{\text{снег}}}{1000} \right)^2 \text{ (коэффициент теплопроводности снега, } \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}})$$

$$G_{\text{w}} := 0 \left(\text{интенсивность дополнительных потоков, } \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right)$$

$$W := 5 \text{ (скорость ветра)} \quad \alpha := 23.2 \cdot \sqrt{W + 0.3} \left(\text{коэффициент теплоотдачи снега, } \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}} \right)$$

$$\frac{d}{dt} h(t) = \frac{(\lambda_{\text{лед}} \cdot T(t) \cdot \Delta t) \cdot (1 + \sin(b \cdot \pi \cdot t))}{L \cdot \rho \cdot \left(h(t) + \frac{\lambda_{\text{снег}}(\rho_{\text{снег}})}{\alpha} + h_{\text{снег}}(t) \cdot \frac{\lambda_{\text{лед}}}{\lambda_{\text{снег}}(\rho_{\text{снег}})} \right)} - \frac{-1 \Delta t \cdot \rho}{\chi \cdot \rho_{\text{лед}} \cdot L} A3 \cdot \left[\frac{Q(t) \cdot \left(\frac{\sqrt{9.81}}{C} \right)^{\frac{2}{3}}}{(H - h(t))^{\beta} \cdot B} \right]^3 = \frac{G \cdot \Delta t}{L \cdot \rho}$$