

**Учредитель:** Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Научный журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" публикует оригинальные научные статьи, краткие сообщения и обзорные статьи по направлениям журнала на русском и английском языках, ранее не публиковавшиеся и не представленные для публикации в других изданиях. Все статьи проходят рецензирование членами редакционной коллегии журнала и внешними рецензентами.

#### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**БУЗМАКОВА М. М.**, к. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**МАЛАНИН В. В.**, д. т. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**БАРУЛИНА М. А.**, д. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**НУРБАКОВА Д. М.**, PhD in Computer Science; Национальный институт прикладных наук Лиона (National Institute of Applied Sciences of Lyon), Лион, Франция.

#### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**БУЗМАКОВА М. М.**, к.ф.-м.н., доцент, **главный редактор**; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**РУСАКОВА О. Л.**, к.ф.-м.н., доцент, **ответственный секретарь**; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**АЛЕКСЕЕВ А. О.**, к.э.н., доцент; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;

**АПТУКОВ В. Н.**, д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**АПУШКИНСКАЯ Д. Е.**, д.ф.-м.н.; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия;

**БАРУЛИНА М. А.**, д.ф.-м.н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**БИРЮКОВ А. Н.**, д.э.н., доцент; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия;

**БОРИСОВ В. В.**, д.т.н., профессор; Смоленский филиал национального исследовательского университета «МЭИ», Смоленск, Россия;

**ВЕЧТОМОВ Е. М.**, д.ф.-м.н., профессор; Вятский государственный университет, Киров, Россия;

**ГУСЕВ А. Л.**, д.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**ДЕМИДОВ С. С.**, д.ф.-м.н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;

**ИВАНОВ Д. В.**, д.ф.-м.н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

**ИСАЕВ К. П.**, д.ф.-м.н.; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**ИШКИН Х. К.**, д.ф.-м.н.; доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**КРИВОШЕЕВА О. А.**, д. ф.-м. н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**КОССОВИЧ Л. Ю.**, д.ф.-м.н., профессор; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

**КУЗНЕЦОВ А. Г.**, к.т.н.; Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь, Россия;

**МАЛАНИН В. В.**, д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**МАТВЕЕНКО В. П.**, д.т.н., профессор, академик РАН; Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия;

**МАХНЕВ А. А.**, д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;

**ПАЛКОВА И. В.**, д.ф.-м.н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

**ПЕСТРЕНИН В. М.** к.ф.-м.н., доцент; Пермь, Россия;

**ПОЛОСКОВ И. Е.**, д.ф.-м.н., доцент; Пермь, Россия;

**РУСАКОВ С. В.**, д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**САВЧИН В. М.**, д.ф.-м.н., профессор; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия;

**СЕЛЕТКОВ И. П.**, к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**ТРУСОВ П. В.**, д.ф.-м.н., профессор; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;

**ХАЧАЙ М. Ю.**, д.ф.-м.н., профессор РАН, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;

**ХЕННЕР Е. К.**, д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАО; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**ФАЗУЛЛИН З.Ю.**, д.ф.-м.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**ЧЕРНЫХ В. В.**, д.ф.-м.н., доцент; Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, Сыктывкар, Россия;

**ЧЕРНИКОВ А. В.**, к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**ЧИНЕНОВА В. Н.**, к.ф.-м.н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;

**ШАХМАМЕТОВА Г. Р.**, ` д.т.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**ШВАРЦ К. Г.**, д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**ЮМАГУЛОВ М. Г.**, д.ф.-м.н., профессор; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**ЯСНИЦКИЙ Л. Н.**, д.т.н., профессор; Пермский филиал Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики", Пермь, Россия.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ No ФС 77-66787 от 08.08.2016.

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (приказ от 08.07.2024). Научные специальности: Вещественный, комплексный и функциональный анализ; Дифференциальные уравнения и математическая физика; Геометрия и топология; Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика; Вычислительная математика; Теоретическая механика, динамика машин; Механика деформируемого твердого тела; Механика жидкости, газа и плазмы; Искусственный интеллект и машинное обучение; Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; Теоретическая информатика, кибернетика; Системный анализ управление и обработка информации, статистика; Вычислительные системы и их элементы; Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования. Издание включено в национальную информационно-аналитическую систему «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ, eLIBRARY ID 28484).

**Founder:** Perm State University

The journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" publishes Full Articles, Short Communications Article and Review paper/perspectives on the journal's directions, which have not been previously published. The papers have been written in Russian and English. The papers are reviewed by the journal editorial board members and external reviewers.

**EDITORIAL COUNCIL**

**BUZMAKOVA M. M.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**MALANIN V. V.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**BARULINA M. A.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**NURBAKOVA D. M.**, PhD in Computer Science; National Institute of Applied Sciences of Lyon, France.

**EDITORIAL BOARD**

**BUZMAKOVA M. M.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Editor-in-Chief**; Perm State University, Perm, Russia;  
**RUSAKOVA O. L.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Executive Secretary**; Perm State University, Perm, Russia;  
**ALEKSEEV A. O.**, Candidate of Science in Economics, Associate Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;  
**APTUKOV V. N.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**APUSHKINSKAYA D. E.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;  
**BARULINA M. A.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**BIRUKOV A. N.**, Doctor of Science in Economics, Associate Professor; Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;  
**BORISOV V. V.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Smolensk Branch of National Research University "MEI", Smolensk, Russia;  
**VECHTOMOV E. M.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Vyatka State University, Kirov, Russia;  
**GUSEV A. L.**, Doctor of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;  
**DEMIDOV S. S.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;  
**IVANOV D. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;  
**ISAEV K. P.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**ISHKIN H. K.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**KRIVOSHEEVA O. A.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**KOSSOVICH L. Yu.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;  
**KUZNECOV A. G.**, Candidate of Science in Engineering; Perm State Humanitarian and Pedagogical University, Perm, Russia;  
**MALANIN V. V.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**MATVEENKO V. P.**, Doctor of Science in Engineering, Professor, Academician of RAS; Institute of Continuous Media Mechanics, UrD RAS, Perm, Russia;

**MAHNEV A. A.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS;  
**PAPKOVA I. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;  
**PESTRENIN V. M.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm, Russia;  
**POLOSKOV I. E.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm, Russia;  
**RUSAKOV S. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**SAVCHIN V. M.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;  
**SELETKOV I. P.**, Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;  
**TRUSOV P. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;  
**HACHAI M. Yu.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor of RAS, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS, Yekaterinburg, Russia;  
**HENNER E. K.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAO; Perm State University, Perm, Russia;  
**FAZULLIN Z. Yu.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**CHERMNYH V. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia;  
**CHERNIKOV A. V.**, Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;  
**CHINENOVA V. N.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;  
**SHAHMAMETOVA G. R.**, Doctor of Science in Engineering, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**SHVARTS K. G.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**UMAGULOV M. G.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**YASNICKIY L. N.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm Branch of the National Research University Higher School of Economics, Perm, Russia.

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Communications (Roskomnadzor). Certificate of registration of the mass media PI No. FS 77 -66787 dated 08.08.2016. The journal is included in the peer-reviewed scientific publications list for the main research results should be published (Candidate of Sciences and Doctor of Sciences, order dated 07/08/2024). Scientific specialties: Real, complex and functional analysis; Differential equations and mathematical physics; Geometry and topology; Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics; Computational Mathematics; Theoretical mechanics, dynamics of machines; Mechanics of deformable solids; Mechanics of liquid, gas and plasma; Artificial intelligence and machine learning; Mathematical modeling, numerical methods and software packages; Theoretical Computer science, cybernetics; System analysis, information management and processing, statistics; Computer systems and their elements; Computer modeling and design automation. The journal is included in the national information and analytical system "Russian Science Citation Index" (eLIBRARY ID 28484).

## Содержание

### МАТЕМАТИКА

<b>Вечтомов Е. М., Мамаев А. А.</b> Полугруппа всех бинарных отношений на множестве	5
<b>Марвин С. В.</b> Система интегро-дифференциальных уравнений электродинамики для квазистационарного электромагнитного поля в немагнитном проводящем теле под диэлектрическим слоем	15
<b>Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф.</b> Численное решение уравнений Фредгольма с двойной точностью методом вырождения интегрального ядра	31
<b>Петров А. А., Шкляев А. П.</b> О некоторых свойствах полурешеток	44

### МЕХАНИКА

<b>Аптуков В. Н., Барулина М. А.</b> Градиентные теории упругости и способы идентификации градиентных параметров моделей	54
<b>Чеснокова М. А., Нурмухаметов Д. И., Пономарев Р. С., Терехина Т. А., Аптуков В. Н.</b> Формирование оптического полимерного моста для волоконно-оптического датчика температуры	71

### КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

<b>Рахманов А. Ю., Русаков С. В.</b> Высокоточная компактная локально-одномерная консервативная сплайн-схема для двумерного уравнения диффузии в квазилинейной постановке	80
<b>Самохин А. С.</b> Моделирование отсрочки поимки цели в ADT-игре с тремя защитниками	102
<b>Правила подачи и оформления рукописей</b>	111

## C o n t e n t s

### MATHEMATICS

<b>Vechtomov E. M., Mamaev, A. A.</b> The Semigroups of All Binary Relations on Set	5
<b>Marvin S. V.</b> An Integro-Differential Equations System for a Quasi-Stationary Electromagnetic Field in a Nonmagnetic Conductive Body Under a Dielectric Layer	15
<b>Pastuhov D. F., Pastuhov Yu. F.</b> Numerical Solution of Fredholm Equations With Double Precision by the Integral Kernel Degeneracy Method	31
<b>Petrov A. A., Shklyayev A. P.</b> About Some Properties of Semilattices	44

### MECHANICS

<b>Aptukov V. N., Barulina M. A.</b> Gradient Elasticity Theories and Methods for Identifying Gradient Model Parameters	54
<b>Chesnokova M. A., Nurmukhametov D. I., Ponomarev R. S., Terekhina T. A., Aptukov V. N.</b> Formation of Optical Polymer Bridge for Fiber-Optic Temperature Sensor	71

### COMPUTER SCIENCE

<b>Rakhmanov A. Yu., Rusakov S. V.</b> A High-Precision Compact Locally One-Dimensional Conservative Spline Scheme for a Two-Dimensional Diffusion Equation in a Quasi-linear Formulation	80
<b>Samokhin A. S.</b> Modeling of the Target Interception Delay in an ADT-Game With Three Defenders	102
<b>Rules for submission and structure of manuscripts</b>	111

## МАТЕМАТИКА

Научная статья

УДК 512.558

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-5-14

<https://elibrary.ru/enaghd>

## Полугруппа всех бинарных отношений на множестве

Евгений Михайлович Вечтомов<sup>1</sup>, Арсений Андреевич Мамаев<sup>2</sup><sup>1, 2</sup>Вятский государственный университет, г. Киров, Россия<sup>1</sup>[vecht@mail.ru](mailto:vecht@mail.ru)<sup>2</sup>[arseniyxo@yandex.ru](mailto:arseniyxo@yandex.ru)

**Аннотация.** Рассматриваются свойства полугруппы  $R(X)$  всех бинарных отношений на непустом множестве  $X$  с операцией композиции бинарных отношений. Доказано, что в терминах полугруппы  $R(X)$  выражается вся информация о бинарных отношениях на  $X$ . Описаны изоморфизмы между полугруппами  $R(X)$  и  $R(Y)$  для произвольных множеств  $X$  и  $Y$ . Получена абстрактная характеристика полугрупп  $R(X)$ .

**Ключевые слова:** бинарное отношение; полугруппа бинарных отношений; полугрупповая характеристика.

**Для цитирования:** Вечтомов Е. М., Мамаев А. А. Полугруппа всех бинарных отношений на множестве // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 3(70). С. 5–14. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-5-14. <https://elibrary.ru/enaghd>.

**Благодарности:** работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00117.

Статья поступила в редакцию 15.06.2025; одобрена после рецензирования 09.08.2025; принята к публикации 24.09.2025.

## MATHEMATICS

Research article

## The Semigroups of All Binary Relations on Set

Evgeny M. Vechtomov<sup>1</sup>, Arseny A. Mamaev<sup>2</sup><sup>1, 2</sup>Vyatka State University, Kirov, Russia<sup>1</sup>[vecht@mail.ru](mailto:vecht@mail.ru)<sup>2</sup>[arseniyxo@yandex.ru](mailto:arseniyxo@yandex.ru)

**Abstract.** The article considers the properties of the semigroup  $R(X)$  of all binary relations on a non-empty set  $X$  with the operation of composition of binary relations. The authors provide a proof that all information about binary relations on  $X$  is expressed in terms of the



© 2025 Вечтомов Е. М., Мамаев А. А. Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, перейдите по ссылке <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

semigroup  $R(X)$ . They describe isomorphisms between the semigroups  $R(X)$  and  $R(Y)$  for arbitrary sets  $X$  and  $Y$ . The paper also gives an abstract characterization of the semigroups  $R(X)$ .

**Keywords:** *binary relation; semigroup of binary relations; semigroup characterization.*

**For citation:** Vechtomov, E. M. and Mamaev, A. A. (2025), "The Semigroups of All Binary Relations on Set", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(70), pp. 5–14, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-5-14, <https://elibrary.ru/enaghd>.

**Acknowledgments:** the work was supported by the Russian Science Foundation, Project № 24-21-00117.

*The article was submitted 15.06.2025; approved after reviewing 09.08.2025; accepted for publication 24.09.2025.*

## Введение

Исследуется полугруппа  $R(X)$  всех бинарных отношений на произвольном непустом множестве  $X$  относительно операции композиции бинарных отношений.

Полугруппа  $S(X)$  преобразований произвольного множества  $X$  играет важную роль в современной математике. Хорошо известен аналог теоремы Кэли о группах: любая полугруппа  $A$  изоморфна подполугруппе сдвигов полугруппы  $S(A \cup \{1\})$ . По теореме Шрейера–Мальцева любой изоморфизм полугрупп  $S(X)$  и  $S(Y)$  порождается биекцией множеств  $X$  и  $Y$  (см. [1, с. 27]). Если  $X$  – топологическое пространство, то через  $S(X)$  обозначается полугруппа всех непрерывных преобразований пространства  $X$ . Полугруппам  $S(X)$  непрерывных преобразований топологических пространств  $X$  посвящена большая обзорная статья Мейджила [2]).

Бинарное отношение – одно из центральных понятий теоретико-множественной математики. Систематизация понятий и обозначений теории бинарных отношений дана Риге [3]. История развития понятия бинарного отношения затронута во введении к монографии [4]. Полугруппы  $R(X)$  рассматривались разными математиками, в частности В. В. Вагнером [5] в рамках его теории полугрупп частичных преобразований (т. е. однозначных бинарных отношений на множестве). Изучение некоторых алгебраических свойств (делимость, регулярность, главные идеалы) полугрупп  $R(X)$  осуществлено в работе К. А. Зарецкого [6]. Полугруппы непрерывных бинарных отношений на топологических пространствах исследовались в работах [7–9].

Целью нашей статьи является доказательство теорем 1–3 о полугруппах бинарных отношений.

## 1. Методы

### 1.1. Исходные понятия

*Бинарным отношением между множествами  $A$  и  $B$  называется произвольное подмножество  $\rho$  прямого произведения  $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ ; вместо  $(a, b) \in \rho$  будем писать  $arb$ .*

Бинарное отношение между одинаковыми множествами  $A=B$  называется *бинарным отношением на множестве  $A$* .

Пусть даны бинарные отношения  $\rho \subseteq A \times B$  и  $\sigma \subseteq B \times C$ .

Важнейшим является понятие *композиции*  $\sigma \rho \subseteq A \times C$  бинарных отношений  $\rho$  и  $\sigma$ :  $\forall a \in A \forall c \in C$

$$a(\sigma\rho)c \Leftrightarrow \exists b \in B (arb \ \& \ b\sigma c).$$

Композиция бинарных отношений ассоциативна там, где определена.

Бинарное отношение  $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ ,  $b\rho^{-1}a \Leftrightarrow a\rho b$ , называется *обратным* к отношению  $\rho \subseteq A \times B$ . Отображение  $\rho \rightarrow \rho^{-1}$  является биекцией множества всех бинарных отношений между  $A$  и  $B$  на множество всех бинарных отношений между  $B$  и  $A$ .

Бинарное отношение  $\rho$  на множестве  $X$  является подмножеством прямой степени  $X^2 = X \times X$  и элементом булеана  $B(X \times X)$ . Отношение равенства на множестве  $X$  обозначается  $1_X$ . Пустое отношение будем обозначать, как и пустое множество, через  $\emptyset$ .

*Образом подмножества  $A$  множества  $X$  при бинарном отношении  $\rho$  называется множество  $A\rho = \rho(A) = \{b \in Y : \exists a \in A \ a\rho b\} \subseteq Y$ . Областью определения бинарного отношения  $\rho$  называется множество  $D(\rho) = Y\rho^{-1} = \rho^{-1}(Y)$ . Множеством значений (образом) бинарного отношения  $\rho$  будет множество  $R(\rho) = X\rho = D(\rho^{-1})$ . Отметим, что для любого бинарного отношения  $\rho$  между множествами  $X$  и  $Y$*

$$\rho = \bigcup_{a \in X} (\{a\} \times \rho(\{a\})) = \bigcup_{b \in Y} (\rho^{-1}(\{b\}) \times \{b\}).$$

Включение  $\rho \subseteq \sigma$ , объединение  $\rho \cup \sigma$  и пересечение  $\rho \cap \sigma$  бинарных отношений суть теоретико-множественные включение, объединение и пересечение  $\rho$  и  $\sigma$  на булеане  $B(X \times Y)$  множества  $X \times Y$ .

Бинарное отношение  $\rho$  между множествами  $X$  и  $Y$  называется:

*всюду определенным*, если  $D(\rho) = X$  (т. е.  $1_X \subseteq \rho\rho^{-1}$ );

*однозначным*, если  $\forall a \in X \ \forall b_1, b_2 \in Y (a\rho b_1 \ \& \ a\rho b_2 \Rightarrow b_1 = b_2)$  ( $\rho^{-1}\rho \subseteq 1_Y$ );

*инъективным*, если  $\forall a_1, a_2 \in X \ \forall b \in Y (a_1\rho b \ \& \ a_2\rho b \Rightarrow a_1 = a_2)$  ( $\rho\rho^{-1} \subseteq 1_X$ );

*сюръективным*, когда  $R(\rho) = Y$ , т. е.  $1_Y \subseteq \rho^{-1}\rho$ ;

*биективным* (биекцией или взаимно однозначным соответствием), когда оно всюду определено, однозначно, инъективно и сюръективно ( $\rho\rho^{-1} = 1_X$  и  $\rho^{-1}\rho = 1_Y$ ).

Всюду определенное однозначное бинарное отношение между множествами  $X$  и  $Y$  называется *функциональным*, *функцией* или *отображением* ( $X \rightarrow Y$ ).

Всюду определенные бинарные отношения называют также *многозначными функциями*, а однозначные бинарные отношения – *частичными функциями*. Отображения множества в себя называются еще *преобразованиями* этого множества.

Для любого бинарного отношения  $\rho$  между  $A$  и  $B$  имеем:

$\rho$  всюду определено  $\Leftrightarrow \rho^{-1}$  сюръективно;

$\rho$  однозначно  $\Leftrightarrow \rho^{-1}$  инъективно.

## 1.2. Арифметика бинарных отношений

Пусть даны произвольные бинарные отношения  $\rho, \sigma, \theta$  между множествами  $X$  и  $Y$ , бинарные отношения  $\tau, \upsilon$  между множествами  $Y$  и  $Z$ , бинарное отношение  $\omega$  между множествами  $Z$  и  $U$ .

Легко видеть, что для указанных бинарных отношений и любых множеств  $A, B \subseteq X$  верна

**Лемма 1.** *Имеют место следующие свойства бинарных отношений:*

- 1)  $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$ ,  $\rho \subseteq \rho\rho^{-1}\rho$ ;
- 2)  $(\rho\tau)^{-1} = \tau^{-1}\rho^{-1}$ ;
- 3)  $(\rho\tau)\omega = \rho(\tau\omega)$ ;
- 4)  $1_X \cdot \rho = \rho$ ,  $\rho \cdot 1_Y = \rho$ ,  $\emptyset \cdot \rho = \rho \cdot \emptyset = \emptyset$ ;
- 5)  $\rho \cup \sigma = \sigma \Leftrightarrow \rho \subseteq \sigma \Leftrightarrow \rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$ ;
- 6)  $(\rho \subseteq \sigma \ \& \ \tau \subseteq \upsilon) \Rightarrow \rho\tau \subseteq \sigma\upsilon$ ;
- 7)  $(\rho \cup \sigma) \cup \theta = \rho \cup (\sigma \cup \theta)$ ,  $\rho \cup \sigma = \sigma \cup \rho$ ;
- 8)  $\rho \cup \rho = \rho$ ,  $\rho \cup \emptyset = \rho$ ;

- 9)  $(\rho \cup \sigma)\tau = \rho\tau \cup \sigma\tau$ ,  $\rho(\tau \cup \upsilon) = \rho\tau \cup \rho\upsilon$ ;
- 10)  $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$ ,  $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$ ;
- 11)  $\rho \subseteq \sigma \Rightarrow \rho \cup \theta \subseteq \sigma \cup \theta$ ,  $\rho \subseteq \sigma \Rightarrow \rho \cap \theta \subseteq \sigma \cap \theta$ ;
- 12)  $(\rho \cap \sigma)\tau \subseteq \rho\tau \cap \sigma\tau$ ,  $\rho(\tau \cap \upsilon) \subseteq \rho\tau \cap \rho\upsilon$ ;
- 13)  $(A \cup B)\rho = A\rho \cup B\rho$ ,  $(A \cap B)\rho \subseteq A\rho \cap B\rho$ ;
- 14)  $A(\rho \cup \sigma) = A\rho \cup A\sigma$ ,  $A(\rho \cap \sigma) \subseteq A\rho \cap A\sigma$ ;
- 15)  $A(\rho\tau) = (A\rho)\tau$ .

Бинарное отношение  $\rho$  на множестве  $X$  назовем *полным отношением*, если  $\rho = D(\rho) \times R(\rho)$ . Полными отношениями на непустом множестве  $X$  служат *константные отображения*  $\pi_x: X \rightarrow \{x\}$ ,  $x \in X$ . Константные отображения  $\pi_x = X \times \{x\}$  являются минимальными элементами упорядоченного множества всех полных всюду определенных бинарных отношений на  $X$ , рассматриваемого с отношением включения  $\subseteq$  бинарных отношений.

Любое подмножество  $A$  множества  $X$  служит областью определения и множеством значений полного бинарного отношения  $A \times A \in R(X)$ .

Для любого элемента  $x$  произвольного непустого множества  $X$  положим  $\pi^x = (\pi_x)^{-1} = \{x\} \times X$  – *коконстантное отношение* на  $X$ . Коконстантные отношения на множестве  $X$  также являются полными отношениями на  $X$ .

Легко видеть, что имеет место

**Лемма 2.** Если  $a, b \in X$ , то

$$\pi_a \pi^b = \emptyset \Leftrightarrow a \neq b; \pi_a \pi^b = X \times X \neq \emptyset \Leftrightarrow a = b.$$

## 2. Результаты

### 2.1. Алгебраические свойства полугруппы $R(X)$

Напомним некоторые полугрупповые понятия.

*Полугруппой* называется непустое множество с определенной на нем одной ассоциативной бинарной операцией. Пусть  $S \equiv \langle S, \cdot \rangle$  – произвольная мультипликативно записанная полугруппа. Ассоциативность означает, что на  $S$  выполняется тождество  $(xy)z = x(yz)$ . Как обычно, часто пишем  $xu$  вместо  $x \cdot u$ . Любая полугруппа удовлетворяет обобщенному закону ассоциативности: произведение конечного числа элементов полугруппы, взятых в фиксированном порядке, не зависит от расстановки скобок.

Элемент  $1$  (элемент  $0$ ) полугруппы  $S$  называется ее *единицей* (*нулем*), если  $1 \cdot s = s \cdot 1 = s$  ( $0 \cdot s = s \cdot 0 = 0$ ) для всех  $s \in S$ .

Полугруппа  $S$  называется полугруппой *левых нулей* (*правых нулей*), если  $S$  удовлетворяет тождеству  $xu = x$  ( $xu = u$  соответственно). Элемент  $e$  полугруппы  $S$  называется *левым нулем* (*правым нулем*) в  $S$ , если  $es = e$  ( $se = e$ ) для любого элемента  $s \in S$ .

*Левым идеалом* полугруппы  $S$  называется любое ее непустое подмножество  $I$ , для которого  $SI = \{si: s \in S, i \in I\} \subseteq I$ . Симметричным образом определяется понятие *правого идеала* полугруппы. Подмножество полугруппы называется *идеалом*, если оно является ее левым и правым идеалом одновременно.

Рассмотрим полугруппу  $S$  с нулем  $0$  и ее элемент  $a$ . Множество  $\text{Ann}_l a = \{s \in S: sa = 0\}$  – *левый аннулятор* элемента  $a$ , множество  $\text{Ann}_r a = \{s \in S: as = 0\}$  – *правый аннулятор* элемента  $a$ . Получаем левый идеал  $\text{Ann}_l a$  и правый идеал  $\text{Ann}_r a$  в полугруппе  $S$ .

**Обозначение.** Пусть  $R(X)$  – полугруппа всех бинарных отношений на непустом множестве  $X$  с операцией композиции бинарных отношений. Полугруппа  $R(X)$  имеет единицу – тождественное отображение  $1 = 1_X$  множества  $X$  и нуль – пустое отношение  $\emptyset$ . Можно считать также  $R(\emptyset) = \{\emptyset\}$ .



Сформулируем некоторые важнейшие свойства полугруппы  $R(X)$ .

**Лемма 3.** Для любых ненулевых бинарных отношений  $\rho, \sigma \in R(X)$  имеют место следующие соотношения:

1.  $\rho\sigma = \emptyset \Leftrightarrow R(\rho) \cap D(\sigma) = \emptyset$ .
2.  $D(\rho) \subseteq D(\sigma) \Leftrightarrow \text{Ann}_l \sigma \subseteq \text{Ann}_l \rho$ .
3.  $D(\rho) = D(\sigma) \Leftrightarrow \text{Ann}_l \sigma = \text{Ann}_l \rho$ .
4.  $D(\rho) = X \Leftrightarrow \text{Ann}_l \rho = \{\emptyset\}$ .
5.  $R(\rho) \subseteq R(\sigma) \Leftrightarrow \text{Ann}_r \sigma \subseteq \text{Ann}_r \rho$ .
6.  $R(\rho) = R(\sigma) \Leftrightarrow \text{Ann}_r \rho = \text{Ann}_r \sigma$ .
7.  $R(\rho) = X \Leftrightarrow \text{Ann}_r \rho = \{\emptyset\}$ .

**Доказательство.** Соотношение 1 вытекает из определений, а остальные соотношения леммы 3 следуют из соотношения 1.

**Определение.** Будем говорить, что некоторое предложение о бинарных отношениях на непустом множестве  $X$  имеет *полугрупповую характеристику*, если оно выражается на языке полугруппы  $R(X)$ .

Рассмотрим на множестве  $R(X)$  два отношения эквивалентности  $D$  и  $R$ :

$$\rho D \sigma \Leftrightarrow D(\rho) = D(\sigma) \text{ и } \rho R \sigma \Leftrightarrow R(\rho) = R(\sigma) \text{ при всех } \rho, \sigma \in R(X).$$

Зададим на фактор-множестве  $R(X)/D$  отношение порядка  $\leq$ , полагая

$$[\rho]_D \leq [\sigma]_D \Leftrightarrow D(\rho) \subseteq D(\sigma) \text{ для любых } \rho, \sigma \in R(X).$$

Аналогичным образом определим порядок  $\leq$  на фактор-множестве  $R(X)/R$ . По лемме 3 порядки  $\leq$  на  $R(X)/D$  и на  $R(X)/R$  заданы корректно и упорядоченные множества  $\langle R(X)/D, \leq \rangle$  и  $\langle R(X)/R, \leq \rangle$  имеют полугрупповую характеристику.

В силу сказанного, упорядоченные множества  $\langle R(X)/D, \leq \rangle$  и  $\langle R(X)/R, \leq \rangle$  изоморфны булеану  $\langle B(X), \subseteq \rangle$ .

Поэтому, в силу соотношений 4 и 7 леммы 3, верно

**Предложение 1.** Бинарные отношения вида  $\pi_a$  и  $\pi^a$ ,  $a \in X$ , суть в точности всюду определенные бинарные отношения с минимальным множеством значений и сюръективные бинарные отношения с минимальной областью определения, соответственно, т. е. они характеризуются полугруппой  $R(X)$ .

Обозначим через  $c(X)$  и  $\text{coc}(X)$  – соответственно – полугруппу всех константных отображений множества  $X$  и полугруппу всех коконстантных отношений на множестве  $X$ . Заметим, что  $c(X)^{-1} = \text{coc}(X)$ .

Из предложения 1 следует

**Предложение 2.** Полугруппы  $c(X)$  и  $\text{coc}(X)$  допускают полугрупповую характеристику.

**Предложение 3.** Для любого ненулевого бинарного отношения  $\rho \in R(X)$  выполняются следующие соотношения:

- 1)  $\rho$  – однозначное  $\Leftrightarrow c(X)\rho \subseteq c(X)$ ;
- 2)  $\rho$  – инъективное  $\Leftrightarrow \rho \text{coc}(X) \subseteq \text{coc}(X)$ ;
- 3)  $\rho$  – биекция  $\Leftrightarrow \rho$  – обратимый элемент полугруппы  $R(X)$ .

**Доказательство** прямо следует из определений указанных понятий.

**Замечание 1.** Отметим, что предложение 1 играет ключевую роль в полугрупповой характеристике утверждений о бинарных отношениях. В силу предложения 1 можно отождествить элементы  $a$  произвольного непустого множества  $X$  с константными отображениями  $\pi_a \in R(X)$ :  $a \equiv \pi_a$  для всех  $a \in X$ ; также возможно отождествление  $a \equiv \pi^a$ . Так, вместо выражения "элементы  $\pi_a$  и  $\pi_b$  полугруппы  $R(X)$ " допустимо писать "элементы  $a$  и  $b$  множества  $X$ ", что доступнее и нагляднее.

Следующие три утверждения очевидны.

**Лемма 4.** Для любых  $\rho \in R(X)$  и  $a, b \in X$  имеем

$$a\rho b \Leftrightarrow \pi_a \rho \pi^b \neq \emptyset.$$

**Лемма 5.** Для любых  $\rho, \sigma \in R(X)$  имеем

$$\rho \subseteq \sigma \Leftrightarrow \forall a, b \in X (\pi_a \rho \pi^b \neq \emptyset \Rightarrow \pi_a \sigma \pi^b \neq \emptyset).$$

**Лемма 6.** Для любых  $a, b \in X$  верно равенство  $\pi^a \pi_b = \{(a, b)\}$ .

**Замечание 2.** Лемма 4 показывает, что принадлежность упорядоченной пары  $(a, b)$  элементов множества  $X$  отношению  $\rho \in R(X)$  имеет полугрупповую характеристику. В свою очередь, лемма 5 дает полугрупповую характеристику отношению включения  $\subseteq$  на множестве  $R(X)$ . Леммы 5 и 6 также доказывают полугрупповую характеризованность всякого бинарного отношения  $\rho$  на произвольном множестве  $X$ .

Принимая во внимание замечание 2, получаем один из основных результатов работы.

**Теорема 1.** Для любого непустого множества  $X$  все элементы, подмножества и подполугруппы полугруппы  $R(X)$  имеют полугрупповую характеристику, т. е. определяются в терминах полугруппы  $R(X)$ .

Иллюстрацией теоремы 1 служат леммы 2–6 и предложения 1–3.

## 2.2. Некоторые подполугруппы полугруппы $R(X)$

Дадим полугрупповые характеристики для следующих подполугрупп полугруппы  $R(X)$ :

$DR(X)$  – полугруппа всех всюду определенных бинарных отношений на множестве  $X$ ;

$IR(X)$  – полугруппа всех сюръективных бинарных отношений на множестве  $X$ ;

$FDR(X)$  – полугруппа всех всюду определенных полных бинарных отношений на множестве  $X$ ;

$S(X)$  – полугруппа всех отображений  $X \rightarrow X$  (преобразований множества  $X$ ).

**Предложение 8.** Для произвольного непустого множества  $X$  справедливы следующие утверждения:

(1)  $DR(X) = \{\rho \in R(X) : \text{Ann}_l \rho = \{\emptyset\}\}$ ;

(2)  $IR(X) = \{\rho \in R(X) : \text{Ann}_r \rho = \{\emptyset\}\}$ ;

(3)  $FDR(X) = \{\rho \in DR(X) : DR(X)\rho = \{\rho\}\}$ ;

(4)  $S(X) = \{\rho \in DR(X) : c(X)\rho \subseteq c(X)\}$ ;

(5)  $c(X)$  – это в точности множество всех правых нулей полугруппы  $S(X)$ ;

(6)  $\text{soc}(X)$  – это в точности множество левых нулей полугруппы всех инъективных сюръективных бинарных отношений на множестве  $X$ .

**Доказательство.** (1) Вытекает из соотношения 4 леммы 3.

(2) Вытекает из соотношения 7 леммы 3.

(3) Ясно, что элементы  $\rho \in FDR(X)$  являются правыми нулями полугруппы  $DR(X)$ . Обратно, предположим, что бинарное отношение  $\rho \in DR(X)$  не является полным. Это значит, что найдутся такие элементы  $a \in D(\rho)$  и  $b \in R(\rho)$ , что  $\neg(a\rho b)$ . Тогда  $\pi_a \rho \neq \rho$ , так как  $b \notin R(\pi_a \rho)$ .

(4) Следует из соотношения 1) предложения 3.

(5) Следует из равенства  $c(X) = S(X) \cap FDR(X)$  и утверждения (3).

(6) Двойственно утверждению (5), поскольку полугруппа  $\text{soc}(X)$  антиизоморфна полугруппе  $c(X)$ .

**Замечание 3.** Можно дать полугрупповую характеристику полугруппы  $FR(X)$  всевозможных полных бинарных отношений на множестве  $X$  как  $FR(X) = \cup \{FDR(Y): Y \subseteq X\}$ , а также двойственным полугруппам  $FDR(X)$  и  $S(X)$  полугрупп, соответственно, всех полных сюръективных и всех инъективных сюръективных бинарных отношений на множестве  $X$ .

### 2.3. Изоморфизмы полугрупп бинарных отношений

Для любой биекции  $\varphi$  множества  $X$  на множество  $Y$  зададим отображение  $\alpha_\varphi: R(X) \rightarrow R(Y)$  формулой

$$\forall f \in R(X) \alpha_\varphi(f) = \varphi^{-1} f \varphi.$$

Ясно, что  $\alpha_\varphi$  будет изоморфизмом полугруппы  $R(X)$  на полугруппу  $R(Y)$ , называемым *индуцированным изоморфизмом*, порожденным биекцией  $\varphi$ . При этом, как легко видеть, разные (неравные) биекции  $\varphi$  индуцируют разные изоморфизмы  $\alpha_\varphi$ .

**Теорема 2.** Для любых непустых множеств  $X$  и  $Y$  всякий изоморфизм полугруппы  $R(X)$  на полугруппу  $R(Y)$  является индуцированным.

**Доказательство.** Пусть  $\alpha$  – произвольный изоморфизм полугруппы  $R(X)$  на полугруппу  $R(Y)$ . По предложению 1 изоморфизм  $\alpha$  устанавливает биективное соответствие между множеством  $\{\pi_x: x \in X\}$  константных отображений полугруппы  $R(X)$  и множеством  $\{\pi_y: y \in Y\}$  константных отображений полугруппы  $R(Y)$ , а также между множествами  $\{\pi^x: x \in X\}$  и  $\{\pi^y: y \in Y\}$  коконстантных отношений полугрупп  $R(X)$  и  $R(Y)$ .

Зададим биекцию  $\varphi: X \rightarrow Y$  формулой

$$\varphi(x) = y \Leftrightarrow \alpha(\pi_x) = \pi_y \text{ для любых } x \in X \text{ и } y \in Y.$$

Покажем, что  $\alpha(\pi^a) = \pi^{\varphi(a)}$  для всех  $a \in X$ . Действительно, если  $a \in X$  и  $\alpha(\pi^a) = \pi^d$  для элемента  $d \in Y$ , то по лемме 4

$$\pi_a \pi^a \neq \emptyset \Rightarrow \pi_{\varphi(a)} \pi^d = \alpha(\pi_a) \alpha(\pi^a) \neq \emptyset \Leftrightarrow \varphi(a) = d.$$

Докажем равенство  $\alpha(\rho) = \alpha_\varphi(\rho)$  для любого  $\rho \in R(X)$ . Пусть  $c, d \in Y$  и  $\varphi(a) = c$ ,  $\varphi(b) = d$  для подходящих  $a, b \in X$ . Тогда  $\alpha(\pi_a) = \pi_c$  и  $\alpha(\pi_b) = \pi_d$ . На основании леммы 4 имеем:

$$\begin{aligned} c \alpha(\rho) d &\Leftrightarrow \pi_c \alpha(\rho) \pi^d \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha(\pi_a) \alpha(\rho) \alpha(\pi^b) = \alpha(\pi_a \rho \pi^b) \neq \emptyset \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \pi_a \rho \pi^b \neq \emptyset \Leftrightarrow a \rho b \Leftrightarrow c (\varphi^{-1} \rho \varphi) d \Leftrightarrow c \alpha_\varphi(\rho) d. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\alpha = \alpha_\varphi$ . Теорема доказана.

### 2.4. Абстрактная характеристика полугруппы $R(X)$

Мы даем следующую абстрактную характеристику полугруппы  $R(X)$  всех бинарных отношений на множестве  $X$ , имеющем не менее двух элементов.

**Теорема 3.** Произвольная полугруппа  $S$  с нулем 0 изоморфна полугруппе  $R(X)$  для некоторого множества мощности  $\geq 2$  тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям:

1) в  $S$  существуют непересекающиеся подполугруппы  $A$  правых нулей и  $B$  левых нулей;

2)  $\forall a, c \in A \forall b, d \in B (ba = dc \Rightarrow a = c \ \& \ b = d)$ ;

3) имеется взаимно однозначное отображение  $': A \rightarrow B$ , такое, что

$$\forall a \in A \forall b \in B (ab \neq 0 \Leftrightarrow b = a');$$

4)  $\forall r, s \in S \forall a, c \in A (arsc' \neq 0 \Leftrightarrow \exists e \in A are'esc' \neq 0)$ ;

$$5) \forall r, s \in S \forall a, c, e \in A (are' \neq 0 \& esc' \neq 0 \Rightarrow are'esc' \neq 0);$$

$$6) \forall r, s \in S (\forall a \in A \forall b \in B (arb \neq 0 \Leftrightarrow asb \neq 0) \Rightarrow r=s);$$

$$7) \forall T \subseteq BA \exists s \in S (\forall a \in A \forall b \in B (ba \in T \Leftrightarrow asb \neq 0)).$$

**Доказательство.** Докажем сначала, что полугруппа  $S=R(X)$  при неодноэлементном непустом множестве  $X$  удовлетворяет сформулированным условиям 1)–7). Положим  $A=\{\pi_x: x \in X\}$  и  $B=\{\pi^x: x \in X\}$ . Ясно, что  $A$  есть полугруппа правых нулей, а  $B$  – полугруппа левых нулей и  $A \cap B = \emptyset$ . Для любых  $x, y \in X$  имеем  $\pi^x \pi_y = \{(x, y)\}$  по лемме 6 и  $\pi_y \pi^x = \emptyset$  при  $x \neq y$  и  $\pi_y \pi^x = X \times X$  при  $x=y$  по лемме 2. Поэтому в полугруппе  $R(X)$  выполняются условия 1)–3).

Выполнение условий 4)–7) в  $R(X)$  проверяется непосредственно.

В самом деле, пусть даны бинарные отношения  $r=\rho, s=\sigma$  на  $X$  и  $a=\pi_x, c=\pi_y$  для элементов  $x, y \in X$ . Тогда

$$\pi_x \rho \sigma \pi^y \neq \emptyset \Leftrightarrow x(\rho \sigma)y \Leftrightarrow \exists z \in X (x \rho z \& z \sigma y) \Leftrightarrow \exists z \in X \pi_x \rho \pi^z \pi_z \sigma \pi^y \neq \emptyset,$$

что доказывает 4). Если еще  $e=\pi_z$  при  $z \in X$ , то, в силу 4), имеем

$$\pi_x \rho \pi^z \neq \emptyset \& \pi_z \sigma \pi^y \neq \emptyset \Rightarrow \pi_x \rho \sigma \pi^z \neq \emptyset \Rightarrow \pi_x \rho \pi^z \pi_z \sigma \pi^y \neq \emptyset,$$

что доказывает 5).

Условия 6) и 7) вытекают из определения бинарного отношения.

Обратно, пусть дана полугруппа  $S$  с нулем 0, обладающая свойствами 1)–7). Докажем, что полугруппа  $S$  изоморфна полугруппе  $R(A)$ , где  $A$  – полугруппа правых нулей из условия 1).

Каждому элементу  $r \in S$  сопоставим бинарное отношение  $\rho(r)$  на множестве  $A$ :

$$\forall x, y \in A (x \rho(r)y \Leftrightarrow xry' \neq 0).$$

При этом, как легко видеть,  $\rho(a)=\pi_a$  и  $\rho(b)=\pi^c$  при  $c \in A$  и  $b=c'$ . Условия 2), 3), 6) и 7) обеспечивают взаимную однозначность отображения  $\rho: S \rightarrow R(A)$ .

Остается показать, что биекция  $\rho$  будет полугрупповым гомоморфизмом, т. е.  $\rho(rs)=\rho(r)\rho(s)$  для любых  $r, s \in S$ . Возьмем произвольные элементы  $a, c \in A$ . По определению отображения  $\rho$  и условиям 4) и 5) имеем

$$\begin{aligned} a \rho(rs)c &\Leftrightarrow arsc' \neq 0 \Leftrightarrow \exists e \in A are'esc' \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists e \in A (are' \neq 0 \& esc' \neq 0) \Leftrightarrow \exists e \in A (a \rho(r)e \& e \rho(s)c) \Leftrightarrow a(\rho(r)\rho(s))c. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Приведем пример, показывающий, что условие 7) не выводится из остальных условий теоремы 3.

**Пример.** Возьмем любое неодноэлементное непустое множество  $X$  и рассмотрим следующее подмножество  $S$  полугруппы  $R(X)$ :

$$S = \{\pi_x: x \in X\} \cup \{\pi^x: x \in X\} \cup \{\pi^x \pi_y: x, y \in X\} \cup \{\emptyset, 1_X, X \times X\}.$$

Ясно, что  $S$  является подполугруппой полугруппы  $R(X)$ , имеет нуль  $\emptyset$  и единицу  $1_X$ , удовлетворяет условиям 1)–6) теоремы 3. Но в полугруппе  $S$  не выполняется условие 7), поскольку  $S$  не содержит двухэлементные бинарные отношения  $\{(x, y), (y, x)\}$  при  $x \neq y$  в  $X$ .

### 3. Обсуждение

Теорема 2 является дискретным аналогом теоремы 1 работы [7]. В свете теоремы 2 нашу теорему 1 можно уточнить, добавив в ее формулировку слова "с точностью до биективных преобразований множества  $X$ ".

Для любого отображения  $f \in S(X)$  и любых элементов  $a, b \in X$  имеем:  $\pi_a f = \pi_b \Leftrightarrow f(a) = b$ . Поэтому всякий изоморфизм полугруппы  $S(X)$  на полугруппу  $S(Y)$  индуцирован подходящей биекцией  $\varphi$  множества  $X$  на множество  $Y$ . Тем самым мы получаем указанную в начале статьи теорему Шрейера–Мальцева. Кроме того, в силу теоремы 2, все изоморфизмы полугрупп  $S(X)$  и  $S(Y)$  однозначно продолжаются до изоморфизмов полугрупп  $R(X)$  и  $R(Y)$ .

Данная нами абстрактная характеристика полугрупп  $R(X)$  может показаться несколько искусственной, но она продиктована и мотивирована конкретным устройством полугрупп бинарных отношений. По аналогии с приведенным примером можно обосновать логическую независимость каждого из условий 2), 4)–6) в формулировке теоремы 3.

#### 4. Заключение

Нами получены следующие важные результаты о полугруппе  $R(X)$  всех бинарных отношений на произвольном множестве  $X$ . Теорема 1 показывает, что на алгебраическом языке полугруппы  $R(X)$  можно выразить любой факт о бинарных отношениях на множестве  $X$ . В теореме 2 описаны все изоморфизмы полугрупп  $R(X)$  и  $R(Y)$ . В теореме 3 дана абстрактная характеристика полугрупп  $R(X)$ .

#### Список источников

1. Вечтомов Е. М. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР. Алгебра. Топология. Геометрия. 1990. Т. 28. С. 3–46.
2. Maggil K. D. A survey of semigroups of continuous selfmaps // Semigroup Forum. 1975. Vol. 11. P. 189–282. URL: <https://doi.org/10.1007/BF02195270> (дата обращения: 10.06.2025).
3. Riguet J. Relations binaires, fermetures, correspondences de Galois // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1948. Vol. 76. P. 114–155.
4. Диасамидзе Я. И., Махарадзе Ш. И. Полные полугруппы бинарных отношений: монография. М.: Изд-во "Спутник", 2010. 657 с.
5. Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения. 1965. Вып. 1. С. 3–178.
6. Зарецкий К. А. Полугруппа бинарных отношений // Математический сборник. 1963. Т. 61(103). № 3. С. 291–305.
7. Варанкина В. И., Вечтомов Е. М. Полугруппы относительно непрерывных бинарных отношений и их изоморфизмы // Математические заметки. 2023. Т. 113, вып. 6. С. 807–819. DOI: 10.4213/mzm13854 EDN: UMNZEC
8. Vechtomov E. M. Isomorphisms of semirings of continuous binary relations on topological spaces // Semigroup Forum. 2023. Vol. 106, № 1. P. 327–331. DOI: 10.1007/s00233-022-10327-w. EDN: QIOVQD.
9. Вечтомов Е. М., Волков М. В. Об определяемости топологических пространств полугруппами непрерывных бинарных отношений // Математические заметки. 2025. Т. 117, вып. 2. С. 196–203. DOI: 10.4213/mzm14345. EDN: CFLLDA.

#### References

1. Vechtomov, E. M. (1990), "Questions of definability of topological spaces by algebraic systems of continuous functions", *Itogi nauki i tekhniki. VINITI AN SSSR. Algebra. Topologiya. Geometriya*, vol. 28, pp. 3–46.

2. Maggil, K. D. (1976), "A survey of semigroups of continuous self-maps", *Semigroup Forum*, vol. 11, pp. 189–282, <https://doi.org/10.1007/BF02195270>.
3. Riguet, J. (1948), "Relations binaires, fermetures, correspondences de Galois", *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 76, pp. 114–155.
4. Diassamidze, Ya. I. and Makharadze, Sh. I. (2010), *Polnye polugruppy binarnykh otnoshenii: monografiya* [Complete semigroups of binary relations: a monograph], Sputnik, Moscow, Russia.
5. Wagner, V. V. (1965), "Theory of relations and algebra of partial mappings", *Teoriya polugrupp i ee prilozheniya* [Semigroup Theory and Its Applications], vol. 1, pp. 3–178.
6. Zaretskii, K. A. (1963), "Semigroup of binary relations", *Matematicheskii sbornik* [Mathematical Collection], vol. 61, no 3, pp. 291–305.
7. Varankina, V. I. and Vechtomov, E. M. (2023), "Semigroups of continuous binary relations and their isomorphisms", *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], vol. 113, pp. 807–819.
8. Vechtomov, E. M. (2023), "Isomorphisms of semirings of continuous binary relations on topological spaces", *Semigroup Forum*, vol. 106, no 1, pp. 327–331.
9. Vechtomov, E. M. and Volkov, M. V. (2025), "On definability of topological spaces by semigroups of continuous binary relations", *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], vol. 117, no 2, pp. 196–203.

**Информация об авторах:**

Е. М. Вечтомов – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, 36), AuthorID: 146598;

А. А. Мамаев – магистрант кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, 36).

**Information about the authors:**

E. M. Vechtomov – Doctoral of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000), AuthorID: 146598;

A. A. Mamaev – Master's of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000).

Научная статья

УДК 517.968.73:537.8

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-15-30

<https://elibrary.ru/dtmrpk>



## Система интегро-дифференциальных уравнений электродинамики для квазистационарного электромагнитного поля в немагнитном проводящем теле под диэлектрическим слоем

**Сергей Владимирович Марвин**

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина,

Екатеринбург, Россия

[s.v.marvin@yandex.ru](mailto:s.v.marvin@yandex.ru)

**Аннотация.** Рассмотрена начально-краевая задача для системы уравнений электродинамики в квазистационарном приближении применительно к немагнитному проводящему телу, находящемуся под слоем диэлектрика. Предполагается, что проводник и диэлектрик могут быть неоднородными по своим, соответственно, проводящим и диэлектрическим свойствам. Электромагнитное поле создается сторонним током, протекающим в ограниченной области, располагающейся в среде, внешней по отношению к проводнику и диэлектрическому слою; внешняя среда не обладает никакими электрическими и магнитными свойствами. На границах раздела сред предполагаются выполненными обычные условия сопряжения: тангенциальные компоненты напряженностей должны быть непрерывны; кроме того, на границах непроводящих сред должна быть непрерывна нормальная компонента электрической индукции. Начально-краевая задача рассмотрена в классической постановке: напряженности электрического и магнитного поля предполагаются гладкими функциями, удовлетворяющими уравнениям и граничным условиям в обычном (не обобщенном) смысле. При выполнении определенных условий, касающихся связности областей, занятых проводником, диэлектриком и сторонним током, а также гладкости границ этих областей, доказана единственность решения поставленной начально-краевой задачи. Также выполнен вывод системы интегро-дифференциальных уравнений, равносильной исследуемой начально-краевой задаче; ядра интегральных операторов этой системы имеют слабую особенность. Полученные результаты актуальны для задач вихревой дефектоскопии и толщинометрии.

**Ключевые слова:** *начальные условия; условия сопряжения; уравнения Максвелла; квазистационарное приближение; асимптотика; интегральный оператор; объемный потенциал; потенциал простого слоя.*

**Для цитирования:** Марвин С. В. Система интегро-дифференциальных уравнений электродинамики для квазистационарного электромагнитного поля в немагнитном проводящем теле под диэлектрическим слоем // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 3(70). С. 15–30. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-15-30. <https://elibrary.ru/dtmrpk>.



© 2025 Марвин С. В. Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы ознакомиться с условиями этой лицензии, перейдите по ссылке <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Статья поступила в редакцию 07.07.2025; одобрена после рецензирования 08.09.2025; принята к публикации 26.09.2025.

Research article

## An Integro-Differential Equations System for a Quasi-Stationary Electromagnetic Field in a Nonmagnetic Conductive Body Under a Dielectric Layer

Sergey S. Marvin

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russia  
s.v.marvin@yandex.ru

**Abstract.** An initial-boundary value problem for a system of the equations of electrodynamics in a quasi-stationary approximation is considered for the case of a nonmagnetic conductive body, which is covered with a dielectric layer. It is assumed, that the conductor and the dielectric can be inhomogeneous in their conductive and dielectric properties, respectively. An electromagnetic field is induced by an external current, flowing in a limited area, located in a media, which external to the conductor and the dielectric layer; the external media has not any electrical and magnetic properties. At the boundaries of media, the usual conditions of conjugation must be satisfied: the tangential components of the tensions must be continuous; in addition, the normal component of the electrical induction must be continuous at the boundaries between non-conductive media. The initial-boundary value problem is considered in the classical formulation: the tensions of the electric and magnetic fields must be smooth functions, that satisfy equations and boundary conditions in the usual (not generalized) sense. Under certain assumption about the connectivity of the region with conductor, dielectric and foreign current, as well as the smoothness of the boundaries of these regions, the uniqueness of solution for the considered initial-boundary value problem is proved. Also a system of integro-differential equations, which equivalent to the considered initial-boundary value problem, is derived; kernels of integral operators in this system have a weak singularity. The results are interest for the problems of eddy current flaw detection and thickness measurement.

**Keywords:** *initial condition; conjugation conditions; Maxwell's equations; quasi-stationary approximation; asymptotic; integral operator; volume potential; simple layer potential.*

**For citation:** Marvin, S. V. (2025), "An Integro-Differential Equations System for a Quasi-Stationary Electromagnetic Field in a Nonmagnetic Conductive Body Under a Dielectric Layer", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(70), pp. 15–30, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-15-30, <https://elibrary.ru/dtmrpk>.

*The article was submitted 07.07.2025; approved after reviewing 08.09.2025; accepted for publication 26.09.2025.*

### Введение

Начально-краевые задачи электродинамики применительно к проводящим телам, а также к различным пространственным комбинациям проводников и изоляторов, имеют существенное прикладное значение для описания нестационарных процессов в радиотехнике, электротехнике и неразрушающем контроле. Уравнения электродинамики в интегро-дифференциальной форме более удобны, чем обычные, дифференциальные уравнения Максвелла. На интегро-дифференциальные уравнения распространяются теоремы общего характера о существовании и единственности решения, а также о сходимости

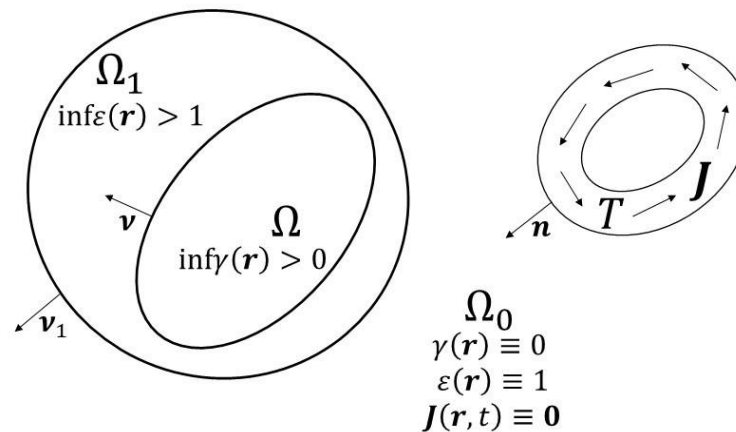


различных численных методов, доказанные для широкого класса интегральных уравнений. В интегро-дифференциальных уравнениях условия сопряжения на границе раздела сред оказываются учтенными автоматически; поэтому при решении интегро-дифференциальных уравнений исчезает необходимость отдельного согласования решений в двух пространственных областях с общей границей. Кроме того, если интегро-дифференциальные уравнения составлены для какого-либо ограниченного рассеивающего тела, расположенного в неограниченной однородной среде, то достаточно решить интегро-дифференциальные уравнения для области, занятой рассеивающим телом, и для ее границы: поле снаружи рассеивающего тела вычисляется непосредственным интегрированием по объему тела и его поверхности. Эти обстоятельства указывают на актуальность вывода и исследования интегро-дифференциальных уравнений электродинамики для различных комбинаций проводников и диэлектриков.

Ранее были получены и исследованы интегро-дифференциальные уравнения электродинамики для нестационарного электромагнитного поля в неферромагнитном проводнике [1–4]. Однако вывод этих уравнений не предполагал квазистационарность, типичную для вихретоковых методов неразрушающего контроля. Кроме того, были получены и в различных аспектах исследованы интегро-дифференциальные уравнения для квазистационарного электромагнитного поля в однородном проводнике [5], в бездефектном проводнике [6], в тонких проводящих оболочках [7–10], а также в объемном проводнике, содержащем дефект в виде полости [11]. Однако для вихретоковой толщинометрии не меньший интерес представляет собой случай неферромагнитного проводника, находящегося под диэлектрическим слоем – в представленной работе получена соответствующая система интегро-дифференциальных уравнений.

### 1. Постановка начально-краевой задачи

Предположим, что проводящее тело вместе с покрывающим его диэлектрическим слоем занимает ограниченную область  $\Omega_1$  в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$ ; само по себе проводящее тело, без диэлектрика, занимает ограниченную область  $\Omega$ ;  $\bar{\Omega} \subset \Omega_1$  (здесь и далее черта сверху над обозначением множества означает замыкание этого множества; границу точечного множества будем обозначать символом  $\partial$  перед обозначением множества). Ненулевой сторонний ток занимает область  $T$ ;  $\bar{T} \cap \bar{\Omega}_1 = \emptyset$ .  $\partial\Omega$ ,  $\partial\Omega_1$  и  $\partial T$  представляют собой поверхности Ляпунова;  $\partial\Omega$  и  $\partial\Omega_1$  гомеоморфны сфере,  $\partial T$  гомеоморфна тору. Область  $\mathbb{R}^3 \setminus (\bar{T} \cup \bar{\Omega}_1)$  коротко обозначим, как  $\Omega_0$  (рис. 1).



**Рис. 1.** Взаимное расположение проводника с диэлектрическим слоем и области стороннего тока

Также будем предполагать, что удельная электропроводность  $\gamma$  проводника и относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  диэлектрического слоя не зависят от времени  $t$ , но могут зависеть от пространственных координат  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ . Функция  $\gamma(\mathbf{r})$  непрерывно дифференцируема в  $\Omega$  и вместе со своими частными производными допускает непрерывное продолжение на  $\partial\Omega$ . Функция  $\varepsilon(\mathbf{r})$  непрерывно дифференцируема в  $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$  и вместе со своими частными производными допускает непрерывное продолжение на  $\partial\Omega$  и  $\partial\Omega_1$ . Кроме того,  $\inf \gamma(\mathbf{r}) > 0$  на  $\Omega$  и  $\inf \varepsilon(\mathbf{r}) > 1$  на  $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$  (то есть, с учетом всех возможных продолжений  $\gamma(\mathbf{r})$  и  $\varepsilon(\mathbf{r})$  на границы областей, проводник нигде не теряет своих проводящих свойств, а диэлектрик – своих поляризационных свойств). Будем считать, что среда, внешняя по отношению к проводнику с диэлектрическим слоем, не обладает проводящими и поляризационными свойствами:  $\gamma(\mathbf{r}) \equiv 0$  и  $\varepsilon(\mathbf{r}) \equiv 1$  (см. рис 1). Кроме того, тела и среды, фигурирующие в задаче, не обладают магнитными свойствами (то есть, относительная магнитная проницаемость равна 1 во всем пространстве).

Будем предполагать, что плотность стороннего тока  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  является векторной функцией, при любом  $t \in [0, +\infty)$  непрерывно дифференцируемой в  $\bar{T}$  по пространственным координатам. Также предположим, что при  $t \in [0, +\infty)$  функция  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  дифференцируема по времени относительно равномерной нормы в  $\bar{T}$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) \right\|_{\infty} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \max_{\mathbf{r} \in \bar{T}} \left| \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) \right| \right) = 0,$$

где точка над функцией обозначает производную по времени. Заметим, что такой характер дифференцируемости имеет место, если, например,  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  непрерывно дифференцируема по совокупности переменных  $(\mathbf{r}, t)$  при  $\mathbf{r} \in \bar{T}$  и  $t \in [0, +\infty)$ .

Кроме того,  $\operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$  в  $T$  и  $J_n = 0$  на  $\partial T$  ( $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к  $\partial T$ ; вектором, фигурирующим в индексе, обозначается проекция на его направление). В точках, внешних по отношению к  $T$ ,  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{0}$  ( $\mathbf{0}$  – обозначение нулевого вектора).

Неизвестными в рассматриваемой начально-краевой задаче являются напряженности электрического и магнитного поля:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ , соответственно.  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяют системе уравнений Максвелла в квазистационарном приближении. Определим функциональные классы для постановки задачи.

Так как во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$  отсутствуют какие-либо магнетики, силовые линии магнитного поля не испытывают никаких преломлений [12]. То есть,  $\mathbf{H}$  как функция пространственных координат непрерывна во всем  $\mathbb{R}^3$  – это обстоятельство, по существу, является граничным условием для  $\mathbf{H}$  на всех поверхностях раздела в рассматриваемой начально-краевой задаче. Производные  $\mathbf{H}$  по пространственным координатам могут терпеть разрывы только на границе токовых областей [6]. Помимо стороннего тока в области  $T$ , ток проводимости (вихревой ток) также индуцируется в области  $\Omega$  – его плотность равна  $\gamma(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . Следовательно, в постановке задачи будем предполагать, что  $\mathbf{H}$  является непрерывно дифференцируемой векторной функцией пространственных координат в  $\Omega$ ,  $\mathbb{R}^3 \setminus (\bar{T} \cup \bar{\Omega})$  и  $T$ . В перечисленных областях [12]:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \gamma(\mathbf{r})\mathbf{E} + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

где учтено, что  $\gamma(\mathbf{r}) \equiv 0$  в точках, внешних по отношению к  $\Omega$ , а  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{0}$  в точках, внешних по отношению к  $T$ . Также в системе уравнений (1.1) учтено, что в предположениях квазистационарного приближения магнитное поле может создаваться исключительно токами проводимости: токи смещения пренебрежимо малы [12].

Напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$ , создаваемого переменным током в области

$T$ , при отсутствии рассеивающих тел в пространстве выражается по известным формулам через объемный векторный потенциал от  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  – это напряженность первичного электрического поля [6]; она представляет собой непрерывно дифференцируемую в  $\mathbb{R}^3$  векторную функцию пространственных координат. Появление проводящего тела с диэлектрическим слоем в  $\Omega_1$  равносильно наличию объемных вторичных источников поля в  $\Omega$  и  $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$ , а также поверхностных вторичных источников на  $\partial\Omega$  и  $\partial\Omega_1$  – последние могут привести к нарушению непрерывности  $\mathbf{E}$  [6]. То есть, только на  $\partial\Omega$  и  $\partial\Omega_1$  следует допускать появление разрывов у  $\mathbf{E}$  (разрывов, которые не распространяются с течением времени на другие точки пространства, так как в квазистационарном приближении отсутствует явление распространения электромагнитного поля, отсутствуют электромагнитные волны). Таким образом,  $\mathbf{E}$  как функция пространственных координат должна быть непрерывно дифференцируемой в  $\Omega$ ,  $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_1$ , а также непрерывно продолжаемой на  $\partial\Omega$  и  $\partial\Omega_1$  изнутри и снаружи; но для каждой из указанных поверхностей результаты непрерывных продолжений изнутри и снаружи могут оказаться разными.

В областях  $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_1$  напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  удовлетворяет следующей системе уравнений [12]:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}) = 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu_0\dot{\mathbf{H}} \end{cases}, \quad (1.2)$$

где учтено, что  $\varepsilon(\mathbf{r}) \equiv 1$  в точках, внешних по отношению к  $\Omega_1$ ;  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

Для проводящей области  $\Omega$  в уравнении с дивергенцией нет необходимости: оно непосредственно вытекает из уравнения для ротора  $\mathbf{H}$  в (1.1). Поэтому из всех уравнений для  $\mathbf{E}$  применительно к области  $\Omega$  остается только то уравнение, которое содержит ротор  $\mathbf{E}$  [5]:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu_0\dot{\mathbf{H}}. \quad (1.3)$$

На  $\partial\Omega_1$ , как на границе двух непроводящих сред, должны быть выполнены следующие условия сопряжения [12]:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\text{int}} E_{\mathbf{v}_1, \text{int}} = E_{\mathbf{v}_1, \text{ext}} \\ [\mathbf{E}_{\text{int}} \times \mathbf{v}_1] = [\mathbf{E}_{\text{ext}} \times \mathbf{v}_1] \end{cases} \quad (1.4)$$

где "int" и "ext" – обозначение, соответственно, пределов изнутри и снаружи;  $\mathbf{v}_1$  – единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Omega_1$ . Первое условие в (1.4) означает непрерывность нормальных компонент индукции электрического поля, второе – непрерывность касательных компонент напряженности электрического поля при пересечении  $\partial\Omega_1$ .

На  $\partial\Omega_1$ , как на границе проводника и диэлектрика, должно быть выполнено только условие непрерывности касательной составляющей напряженности [5]:

$$[\mathbf{E}_{\text{int}} \times \mathbf{v}] = [\mathbf{E}_{\text{ext}} \times \mathbf{v}], \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{v}$  – единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ .

Кроме того, поверхность раздела проводника и диэлектрика предполагается электронеутральной, что приводит к следующему интегральному равенству для  $\mathbf{E}$  [5, 12]:

$$\oint_{\partial\Omega} \varepsilon_{\text{ext}}(\mathbf{r}) E_{\mathbf{v}, \text{ext}}(\mathbf{r}, t) dS = 0, \quad (1.6)$$

где  $dS$  – элемент площади.

На бесконечности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  должны иметь следующую асимптотику [11, 12]:

$$\begin{cases} E = O(1/r^2), r \rightarrow +\infty \\ H = O(1/r^2), r \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (1.7)$$

Наибольший интерес для практики представляет распределение в пространстве и динамика  $\mathbf{E}$ , а не  $\mathbf{H}$ : электрическое поле внутри проводника определяет глубину проникновения вихревых токов; поле снаружи проводника определяет ток, создаваемый на измерительном витке. Поэтому из начально-краевой задачи электродинамики принято различными способами  $\mathbf{H}$  исключать, и сводить задачу к нахождению  $\mathbf{E}$  [13]. Это приводит к дифференцированию  $\mathbf{E}$  по времени, но только в объеме проводника (то есть, в области  $\Omega$ ). Поэтому, несмотря на то обстоятельство, что в изначальной системе уравнений для квазистационарного приближения фигурирует  $\mathbf{H}$ , в постановке задачи потребуем дифференцируемость по времени только от  $\mathbf{E}$ , причем только в  $\Omega$ , и начальные условия поставим только для  $\mathbf{E}$  в  $\Omega$ : ниже будет показано, что это гарантирует и дифференцируемость  $\mathbf{H}$  по времени, и единственность решения рассматриваемой начально-краевой задачи.

Будем предполагать, что при  $t \in [0, +\infty)$   $\mathbf{E}$  должна быть непрерывно дифференцируема по времени относительно равномерной нормы в  $\bar{\Omega}$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} - \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \right\|_{\infty} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \sup_{\mathbf{r} \in \Omega} \left| \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} - \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \right| \right) = 0,$$

где использовано обозначение точной верхней грани, а не максимума, потому что на  $\partial\Omega$  напряженность  $\mathbf{E}$ , строго говоря, не определена: она допускает непрерывное продолжение на  $\partial\Omega$  изнутри области, но также допускает продолжение и снаружи – ни одно из этих продолжений не является определяющим для  $\mathbf{E}$  на  $\partial\Omega$ .

Кроме того, как было отмечено выше, в  $\Omega$  должны быть заданы начальные условия для  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}). \quad (1.8)$$

Из второго уравнения (1.1) получается, как следствие, условие соленоидальности плотности вихревого тока в  $\Omega$ :

$$\operatorname{div}(\gamma(\mathbf{r})\mathbf{E}) = 0. \quad (1.9)$$

Также из второго уравнения (1.1) и условия непрерывности  $\mathbf{H}$  вытекает следующее условие для  $\mathbf{E}$  на  $\partial\Omega$  [5]:

$$E_{v, \text{int}} = 0. \quad (1.10)$$

Очевидно, начальные условия (1.8) должны удовлетворять (1.9) и (1.10), чтобы постановка задачи не была внутренне противоречивой.

## 2. Единственность решения начально-краевой задачи

Докажем, что начально-краевая задача (1.1)–(1.8) в выбранном функциональном классе имеет не более одного решения. Заметим, что при условии непрерывности нормальных компонент  $\gamma\mathbf{E}$  и  $\mathbf{J}$  на  $\partial\Omega$  и  $\partial T$ , напряженность  $\mathbf{H}$ , непрерывная во всем пространстве, а также непрерывно дифференцируемая в  $\Omega$ ,  $\mathbb{R}^3 \setminus (\bar{T} \cup \bar{\Omega})$  и  $T$ , определяется системой уравнений (1.1) и предельным условием (1.7) однозначно, через ротор от объемного векторного потенциала [14]:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} \left( \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \gamma(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) dV' + \int_T G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) dV' \right), \quad (2.1)$$

где  $G(R) = 1/(4\pi R)$ ,  $dV$  – элемент объема.

Примем следующие обозначения:  $\mathbf{C}$  – пространство векторных функций, непрерывных на множестве, указанном в скобках после  $\mathbf{C}$ ;  $\mathbf{L}_2$  – пространство векторных полей, квадратично суммируемых на множестве, указанном в скобках после  $\mathbf{L}_2$ .

**Лемма 1.** Для любой ограниченной области  $\Theta$  напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ , определяемая равенством (2.1), при  $t \in [0, +\infty)$  дифференцируема по времени относительно равномерной нормы в  $\bar{\Theta}$ . Кроме того,  $\mathbf{H}$  дифференцируема относительно среднеквадратичной нормы в  $\mathbb{R}^3$ .

*Доказательство.* Производные по пространственным переменным от первого и от второго объемного потенциала в правой части (2.1) представляют собой линейные непрерывные операторы, действующие, соответственно, из  $\mathbf{C}(\bar{\Omega})$  в  $\mathbf{C}(\bar{\Theta})$  и из  $\mathbf{C}(\bar{T})$  в  $\mathbf{C}(\bar{\Theta})$  [15]. Тогда таким же свойством непрерывности обладает ротор от суммы этих объемных потенциалов. Следовательно, дифференцируемость  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{J}$  по  $t$  относительно равномерной нормы в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{T}$  влечет за собой дифференцируемость  $\mathbf{H}$  по  $t$  относительно равномерной нормы в  $\bar{\Theta}$  (а также перестановочность ротора от интегралов в (2.1) с дифференцированием по времени).

Кроме того, производные по пространственным переменным от объемных потенциалов в (2.1) представляют собой линейные непрерывные операторы, действующие из  $\mathbf{C}(\bar{\Omega})$  в  $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$  и из  $\mathbf{C}(\bar{T})$  в  $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$  [15]. Из этого следует, что  $\mathbf{H}$  дифференцируема по  $t$  относительно среднеквадратичной нормы в  $\mathbb{R}^3$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.** Любое решение  $(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{H}(\mathbf{r}, t))$  начально-краевой задачи (1.1)–(1.8) удовлетворяет следующему равенству:

$$\frac{\mu_0}{2} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) dV \right) = - \int_{\Omega} \gamma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) dV - \int_T \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) dV. \quad (2.2)$$

*Доказательство.* Из уравнений с роторами в (1.1)–(1.3) следует, что для любого решения рассматриваемой начально-краевой задачи справедливо следующее равенство:

$$\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \text{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \gamma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.3)$$

Проинтегрируем полученное равенство по  $\mathbb{R}^3$ . Прежде чем проинтегрировать левую часть (2.3), заметим, что интеграл по  $\mathbb{R}^3$  от произведения функций определяет скалярное произведение в  $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ , а  $\mathbf{H}$ , в силу леммы 1, дифференцируемо по времени относительно нормы в  $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ . Тогда, в силу свойств скалярного произведения,

$$\begin{aligned} \mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) dV &= \mu_0 \langle \mathbf{H}(t), \dot{\mathbf{H}}(t) \rangle = \frac{\mu_0}{2} (\langle \mathbf{H}(t), \dot{\mathbf{H}}(t) \rangle + \langle \dot{\mathbf{H}}(t), \mathbf{H}(t) \rangle) = \\ &= \frac{\mu_0}{2} \langle \mathbf{H}(t), \dot{\mathbf{H}}(t) \rangle = \frac{\mu_0}{2} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) dV \right), \end{aligned}$$

где треугольными скобками обозначено скалярное произведение в  $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ .

Интегралы от третьего и четвертого слагаемого в правой части (2.3):

$$- \int_{\mathbb{R}^3} \gamma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) dV - \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) dV = \int_{\Omega} \gamma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) dV - \int_T \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) dV,$$

где учтено, в каких областях  $\gamma$  и  $\mathbf{J}$  могут быть ненулевыми.

Интеграл от первого и второго слагаемого в (2.3) сначала возьмем по шару  $O_R$  с центром в начале координат и с радиусом  $R$  достаточно большим, чтобы  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{T}$  включались в  $O_R$ . Применим теорему Остроградского–Гаусса к областям  $\Omega$ ,  $T$ ,  $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$  и  $O_R \setminus (\bar{T} \cup \bar{\Omega}_1)$ :

$$\int_{O_R} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \text{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) dV = \int_{O_R} \text{div}[\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] dV =$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_{\partial\Omega} [\mathbf{H}_{\text{int}}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{E}_{\text{int}}(\mathbf{r}, t)] \mathbf{v}(\mathbf{r}) dS + \oint_{\partial\Omega_1} [\mathbf{H}_{\text{int}}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{E}_{\text{int}}(\mathbf{r}, t)] \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) dS - \\
&\quad - \oint_{\partial\Omega} [\mathbf{H}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)] \mathbf{v}(\mathbf{r}) dS + \oint_{\partial T} [\mathbf{H}_{\text{int}}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{E}_{\text{int}}(\mathbf{r}, t)] \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS + \\
&\quad + \oint_{\partial O_R} [\mathbf{H}_{\text{int}}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{E}_{\text{int}}(\mathbf{r}, t)] \mathbf{e}_r dS - \oint_{\partial\Omega_1} [\mathbf{H}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)] \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) dS - \\
&\quad - \oint_{\partial T} [\mathbf{H}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)] \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS,
\end{aligned}$$

где  $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$  – внешняя нормаль к сфере  $\partial O_R$ . Теорема Остроградского–Гаусса была применена к нескольким областям. И в знаках перед поверхностными интегралами учтено, что каждый из векторов  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{n}$  для одной из этих областей является внешним, и еще для одной – внутренним. В получившемся выражении, в смешанных произведениях под знаками поверхностных интегралов, по существу, участвуют только касательные компоненты  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (перпендикулярные нормальному вектору к поверхности). В силу граничных условий для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , эти компоненты непрерывны при пересечении поверхности. Следовательно, все поверхностные интегралы в полученном выражении, кроме интеграла по  $\partial O_R$ , взаимно уничтожаются. Поверхностный интеграл по  $\partial O_R$ , в силу условия (1.7), стремится к нулю при  $R \rightarrow +\infty$ .

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \text{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) dV = \mathbf{0},$$

из чего следует (2.2). Лемма доказана.

**Теорема 1.** Начально-краевая задача (1.1) – (1.8) имеет не более одного решения.

*Доказательство.* Для доказательства единственности решения рассматриваемой начально-краевой задачи необходимо и достаточно показать, что соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение. В случае однородной начально-краевой задачи  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{0}$  в  $\Omega$  и для любого  $t \in [0, +\infty)$   $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{0}$  в  $T$ . Тогда, в силу (2.1),  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) \equiv \mathbf{0}$  в  $\mathbb{R}^3$ ; а в силу (2.2),

$$\frac{\mu_0}{2} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \dot{\mathbf{H}}^2(\mathbf{r}, t) dV \right) = - \int_{\Omega} \gamma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) dV. \quad (2.4)$$

С учетом знака  $\gamma$ , из полученного равенства следует, что  $\int_{\mathbb{R}^3} \dot{\mathbf{H}}^2(\mathbf{r}, t) dV$  – невозрастающая функция времени. При этом,  $\int_{\mathbb{R}^3} \dot{\mathbf{H}}^2(\mathbf{r}, 0) dV = 0$ . Следовательно, при любом  $t \in [0, +\infty)$   $\int_{\mathbb{R}^3} \dot{\mathbf{H}}^2(\mathbf{r}, t) dV = 0$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{0}$  в  $\mathbb{R}^3$ . Отсюда, в силу (2.4), в свою очередь следует, что при любом  $t \in [0, +\infty)$   $\int_{\Omega} \gamma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) dV = 0$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{0}$  в  $\Omega$ . Осталось доказать, что  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{0}$  в областях  $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_1$ .

В силу (1.2), в указанных областях  $\text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$ . Далее в доказательстве теоремы мы не будем указывать зависимость  $\mathbf{E}$  от  $t$ : дифференцирования или интегрирования по времени не будет; при этом, все рассуждения и выводы будут применимы к любому конкретному  $t \in [0, +\infty)$ . Таким образом,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  можно представить, как  $-\text{grad} \varphi(\mathbf{r})$  [14], где потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  дважды непрерывно дифференцируем в  $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_1$  и, вместе с производными первого порядка, допускает непрерывное продолжение на  $\partial\Omega$  снаружи, а также на  $\partial\Omega_1$  изнутри и снаружи.

Потенциал  $\varphi$  в каждой из указанных областей определен с точностью до постоянного слагаемого. С учетом (1.7), первые производные  $\varphi$  на бесконечности имеют асимптотику  $O(1/r^2)$ ; тогда постоянное слагаемое в  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_1$  можно выбрать так, чтобы сам потенциал  $\varphi$  на бесконечности имел асимптотику  $O(1/r)$  – будем считать, что такой выбор постоянного слагаемого выполнен:

$$\begin{aligned}\varphi &= O(1/r), r \rightarrow +\infty, \\ \text{grad}\varphi &= O(1/r^2), r \rightarrow +\infty.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Кроме того, в силу (1.4), касательная компонента  $\text{grad}\varphi$  непрерывно меняется при пересечении  $\partial\Omega_1$ . Следовательно, предельные значения потенциала на  $\partial\Omega_1$  изнутри и снаружи (то есть,  $\varphi_{\text{int}}$  и  $\varphi_{\text{ext}}$ ) могут отличаться только на постоянную величину – будем считать, что выбор постоянного слагаемого для  $\varphi$  в  $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$  таков, что  $\varphi_{\text{int}}$  и  $\varphi_{\text{ext}}$  друг другу равны:

$$\varphi_{\text{int}} = \varphi_{\text{ext}}.\tag{2.7}$$

Применим к векторному полю  $\varepsilon\varphi\text{grad}\varphi$  в области  $O_R \setminus \bar{\Omega}$  теорему Остроградского–Гаусса:

$$\begin{aligned}\int_{O_R \setminus \bar{\Omega}} \text{div}(\varepsilon(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\text{grad}\varphi(\mathbf{r}))dV &= \oint_{\partial\Omega_1} \varepsilon_{\text{int}}(\mathbf{r})\varphi_{\text{int}}(\mathbf{r}) \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\nu_1} dS + \\ &- \oint_{\partial\Omega} \varepsilon_{\text{ext}}(\mathbf{r})\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\nu} dS + \oint_{\partial O_R} \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial r} dS - \oint_{\partial\Omega_1} \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\nu_1} dS,\end{aligned}\tag{2.8}$$

где учтено, что в точках, внешних по отношению к  $\Omega_1$ ,  $\varepsilon(\mathbf{r}) \equiv 1$ . Интегралы по  $\partial\Omega_1$  в полученном выражении взаимно уничтожаются вследствие (1.4) и (2.7):

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\Omega_1} \varepsilon_{\text{int}}(\mathbf{r})\varphi_{\text{int}}(\mathbf{r}) \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\nu_1} dS - \oint_{\partial\Omega_1} \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\nu_1} dS &= \\ = \oint_{\partial\Omega_1} \varphi_{\text{int}}(\mathbf{r})(\varepsilon_{\text{int}}E_{\nu_1,\text{int}} - E_{\nu_1,\text{ext}})dS &= 0.\end{aligned}$$

В силу (1.5), касательная компонента  $\mathbf{E}$  непрерывно меняется при пересечении  $\partial\Omega$ . Однако  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{0}$  в области  $\Omega$  и  $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$  в области  $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$ . Следовательно, предельное значение касательной компоненты  $\text{grad}\varphi$  на  $\partial\Omega$  равно нулевому вектору, и  $\varphi$  принимает на  $\partial\Omega$  постоянное значение. Тогда, в силу (1.6),

$$\oint_{\partial\Omega} \varepsilon_{\text{ext}}(\mathbf{r})\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\nu} dS = \varphi_{\text{ext}} \oint_{\partial\Omega} \varepsilon_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\nu} dS = \varphi_{\text{ext}} \oint_{\partial\Omega} \varepsilon_{\text{ext}}(\mathbf{r})E_{\nu,\text{ext}}(\mathbf{r}) dS = 0.$$

Таким образом, из всех слагаемых в правой части (2.8) остается только интеграл по  $\partial O_R$ . С другой стороны, в силу (1.2),

$$\begin{aligned}\text{div}(\varepsilon(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\text{grad}\varphi(\mathbf{r})) &= \varphi(\mathbf{r})\text{div}(\varepsilon(\mathbf{r})\text{grad}\varphi(\mathbf{r})) + \varepsilon(\mathbf{r})(\text{grad}\varphi(\mathbf{r}))^2 = \\ &= -\varphi(\mathbf{r})\text{div}(\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})) + \varepsilon(\mathbf{r})(\text{grad}\varphi(\mathbf{r}))^2 = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r}).\end{aligned}$$

Следовательно, равенство (2.8) можно представить в следующем виде:

$$\int_{O_R \setminus \bar{\Omega}} \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r})dV = \oint_{\partial O_R} \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial r} dS.$$

Вследствие (2.5) и (2.6), поверхностный интеграл, получившийся в правой части данного равенства, стремится к нулю при  $R \rightarrow +\infty$ . Тогда  $\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}^2(\mathbf{r})dV = 0$ , и  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{0}$  в областях  $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_1$ . Теорема доказана.

### 3. Вывод системы интегро-дифференциальных уравнений

Уравнения с роторами в (1.2) и (1.3), а также выражение для  $\mathbf{H}$  (2.1), позволяют исключить  $\mathbf{H}$  из рассматриваемой начально-краевой задачи. Из (1.2), (1.3) и (2.1) следует, что в областях  $\Omega$ ,  $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_1$

$$\text{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\gamma(\mathbf{r}')\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', t)dV' + \mu_0 \int_T G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)dV') = \mathbf{0}.$$

Таким образом, в перечисленных областях  $\mathbf{E}$  допускает следующее представление:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \gamma(\mathbf{r}') \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', t) dV' - \mu_0 \int_T G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t) dV' - \text{grad} \varphi(\mathbf{r}, t), \quad (3.1)$$

где потенциал  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  как функция пространственных координат дважды непрерывно дифференцируем в  $\Omega$ ,  $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_1$  и, вместе с производными первого порядка, допускает непрерывное продолжение на  $\partial\Omega$  и  $\partial\Omega_1$  изнутри и снаружи.

Заметим, что первое и второе слагаемые в правой части (3.1) соленоидальны; докажем это для первого слагаемого:

$$\text{div} \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \gamma(\mathbf{r}') \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', t) dV' = \left( \text{div} \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \gamma(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) dV' \right). \quad (3.2)$$

Воспользуемся (1.9) и (1.10):

$$\begin{aligned} \text{div} \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \gamma(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) dV' &= \int_{\Omega} \text{grad}_{\mathbf{r}} (G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)) \gamma(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) dV' = \\ &= - \int_{\Omega} \text{grad}_{\mathbf{r}'} (G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)) \gamma(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) dV' = \\ &= - \int_{\Omega} \text{div}_{\mathbf{r}'} (G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \gamma(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t)) dV' + \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \text{div}(\gamma(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t)) dV' = \\ &= - \oint_{\partial\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \gamma(\mathbf{r}') E_{v, \text{int}}(\mathbf{r}', t) dS' + \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \text{div}(\gamma(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t)) dV' = 0, \end{aligned}$$

что означает равенство нулю производной по времени в (3.2). Доказательство соленоидальности второго слагаемого в (3.1) – аналогичное (только следует воспользоваться соленоидальностью  $\mathbf{J}$  и равенством нулю  $J_n$  на  $\partial T$ ).

Таким образом, в силу (3.1),  $\text{div} \mathbf{E} = -\Delta\varphi$ . Тогда из (1.9) следует, что в области  $\Omega$

$$\Delta\varphi = \text{grad} \gamma(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) / \gamma(\mathbf{r}). \quad (3.3)$$

Из (1.2) следует, что в области  $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$

$$\Delta\varphi = \text{grad} \varepsilon(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) / \varepsilon(\mathbf{r}). \quad (3.4)$$

Также из (1.2) следует, что в области  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_1$

$$\Delta\varphi = 0. \quad (3.5)$$

Решение (3.3)–(3.5) следует искать в виде суммы объемных потенциалов от правых частей (3.3) и (3.4) в областях  $\Omega$  и  $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$ , а также поверхностных потенциалов простого слоя от вторичных источников, распределенных на  $\partial\Omega$  и  $\partial\Omega_1$  [6]:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= - \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \text{grad} \gamma(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) / \gamma(\mathbf{r}') dV' - \\ &- \int_{\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \text{grad} \varepsilon(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) / \varepsilon(\mathbf{r}') dV' + \oint_{\partial\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \sigma(\mathbf{r}', t) dS' + \\ &+ \oint_{\partial\Omega_1} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \sigma_1(\mathbf{r}', t) dS', \end{aligned}$$

где  $\sigma$  и  $\sigma_1$  – поверхностные плотности вторичных источников, соответственно, на  $\partial\Omega$  и  $\partial\Omega_1$ .

Тогда, в силу (3.1),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \gamma(\mathbf{r}') \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', t) dV' - \mu_0 \int_T G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t) dV' + \\ &+ \text{grad} \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \text{grad} \gamma(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) / \gamma(\mathbf{r}') dV' + \\ &+ \text{grad} \int_{\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \text{grad} \varepsilon(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) / \varepsilon(\mathbf{r}') dV' - \\ &- \text{grad} \oint_{\partial\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \sigma(\mathbf{r}', t) dS' - \text{grad} \oint_{\partial\Omega_1} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \sigma_1(\mathbf{r}', t) dS'. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Объемные потенциалы представляют собой функции пространственных координат,



непрерывно дифференцируемые во всем пространстве [15]. Поэтому выполнения условий для нормальных компонент в (1.4) и (1.10) можно добиться только за счет поверхностных потенциалов простого слоя. Для предельных значений нормальной производной потенциала простого слоя на  $\partial\Omega_1$  выполняются следующие равенства:

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_1} \int_{\partial\Omega_1} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \sigma_1(\mathbf{r}', t) dS'\right)_{int}^{ext} = \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial v_1} \sigma_1(\mathbf{r}, t) dS' \pm \frac{1}{2} \sigma_1(\mathbf{r}, t),$$

где обозначение нормальной производной за знаком интеграла указывает на ее предельное значение, а под знаком интеграла – на прямое значение. Аналогичные равенства справедливы для нормальной производной потенциала простого слоя на  $\partial\Omega$ .

Тогда из (3.6) и (1.4) следует, что на  $\partial\Omega_1$  должно выполняться следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \sigma_1(\mathbf{r}, t) + \lambda(\mathbf{r}) \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial v_1} \sigma_1(\mathbf{r}', t) dS' + \lambda(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial v_1} \oint_{\partial\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \sigma(\mathbf{r}', t) dS' + \\ + \lambda(\mathbf{r}) \mu_0 \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \gamma(\mathbf{r}') \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', t) dV' + \lambda(\mathbf{r}) \mu_0 \int_{\Gamma} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t) dV' - \\ - \lambda(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial v_1} \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \text{grad} \gamma(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) / \gamma(\mathbf{r}') dV' - \\ - \lambda(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial v_1} \int_{\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \text{grad} \varepsilon(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) / \varepsilon(\mathbf{r}') dV' = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\lambda = 2(\varepsilon_{int} - 1)/(\varepsilon_{int} + 1)$ .

Кроме того, из (3.6) и (1.10) следует, что на  $\partial\Omega$  должно выполняться такое уравнение:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{r}, t) + 2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial v} \sigma(\mathbf{r}', t) dS' + 2 \frac{\partial}{\partial v} \oint_{\partial\Omega_1} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \sigma_1(\mathbf{r}', t) dS' + \\ + 2\mu_0 \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \gamma(\mathbf{r}') \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', t) dV' + 2\mu_0 \int_{\Gamma} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t) dV' - \\ - 2 \frac{\partial}{\partial v} \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \text{grad} \gamma(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) / \gamma(\mathbf{r}') dV' - \\ - 2 \frac{\partial}{\partial v} \int_{\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \text{grad} \varepsilon(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) / \varepsilon(\mathbf{r}') dV' = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Условие (1.6) равносильно следующему:

$$\oint_{\partial\Omega} \varepsilon_{ext}(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}, t) dS = 0. \quad (3.9)$$

Заметим, что без условия (3.9) решение  $\sigma$  интегрального уравнения (3.8) определялось бы не однозначно, а с точностью до прибавления любого равновесного распределения вторичных источников на  $\partial\Omega$  [16]; условие (3.9) эту неоднозначность устраняет.

Заметим также, что ядра интегро-дифференциальных операторов, используемых в (2.1), (3.6)–(3.8), имеют слабую особенность, что распространяет на них действие теорем, касающихся полной непрерывности [15].

Отдельного обоснования требует то обстоятельство, что для напряженности  $\mathbf{E}$ , удовлетворяющей уравнениям (3.6)–(3.8), выполняется условие на бесконечности из (1.7) (выполнение всех остальных уравнений и условий в (1.1)–(1.7) непосредственно вытекает из свойств объемных и поверхностных потенциалов [15], из проведенных рассуждений). Первое и второе слагаемое в правой части (3.6) представляют собой объемные потенциалы (эти потенциалы – не под градиентом). В общем случае, для объемного потенциала гарантирована только асимптотика  $O(1/r)$  при  $r \rightarrow +\infty$ . Тем не менее, для любого решения (3.6)–(3.8) условие на бесконечности (1.7) оказывается выполненным.

**Теорема 2.** Если  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет системе уравнений (3.6)–(3.8) в области  $\Omega$ , то

$$\int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \gamma(\mathbf{r}') \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', t) dV' + \int_T G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t) dV' = O(1/r^2), r \rightarrow +\infty.$$

*Доказательство.* Если напряженность  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет системе уравнений (3.6)–(3.8), то для нее, как следствие, выполняются условия (1.9) и (1.10): векторная функция  $\gamma \mathbf{E}$  соленоидальна в  $\Omega$ ; нормальная компонента  $\mathbf{E}$  на  $\partial\Omega$  равна нулю. Аналогичными свойствами обладает  $\mathbf{J}$  в области  $T$  (для  $\mathbf{J}$  указанные свойства не вытекают из (3.6)–(3.8), а изначально наличествуют в постановке задачи). Примем следующее обозначение:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \gamma(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t), & \mathbf{r} \in \Omega \\ \mathbf{0}, & \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus (\bar{T} \cup \bar{\Omega}) \\ \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t), & \mathbf{r} \in T \end{cases}$$

Выберем  $R$  достаточно большим, чтобы  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{T}$  включались в  $O_R$ . Тогда

$$\int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \gamma(\mathbf{r}') \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', t) dV' + \int_T G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t) dV' = \int_{O_R} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{u}(\mathbf{r}', t) dV'.$$

Рассмотрим  $\eta$ -усреднение векторной функции  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  по Соболеву [15]:

$$\mathbf{u}_{\eta}(\mathbf{r}, t) = \int_{O_R} \omega_{\eta}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{u}(\mathbf{r}', t) dV',$$

где  $\omega_{\eta}$  – "шапочка" с носителем радиуса  $\eta$ . При любом  $t \in [0, +\infty)$   $\mathbf{u}_{\eta}(\mathbf{r}, t)$  представляет собой бесконечно гладкую векторную функцию пространственных координат; кроме того, при достаточно малых  $\eta$   $\mathbf{u}_{\eta}(\mathbf{r}, t)$  финитна в  $O_R$ . Векторная функция  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  является пределом в  $L_2(O_R)$  от  $\mathbf{u}_{\eta}(\mathbf{r}, t)$  при  $\eta \rightarrow +0$  [15].

Найдем дивергенцию от  $\mathbf{u}_{\eta}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}_{\eta}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{div} \int_{O_R} \omega_{\eta}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{u}(\mathbf{r}', t) dV' = \int_{O_R} \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \left( \omega_{\eta}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}', t) dV' = \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \left( \omega_{\eta}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \right) \gamma(\mathbf{r}') \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', t) dV' + \int_T \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \left( \omega_{\eta}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \right) \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t) dV' = \\ &= \left( \int_{\Omega} \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \left( \omega_{\eta}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \right) \gamma(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) dV' + \int_T \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \left( \omega_{\eta}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \right) \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) dV' \right). \end{aligned}$$

Интегралы-слагаемые, получившиеся под знаком производной по времени, равны нулю. Докажем это для первого интеграла:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \left( \omega_{\eta}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \right) \gamma(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) dV' &= - \int_{\Omega} \operatorname{grad}_{\mathbf{r}'} \left( \omega_{\eta}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \right) \gamma(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) dV' = \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\mathbf{r}'} \left( \omega_{\eta}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \gamma(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) \right) dV' + \int_{\Omega} \omega_{\eta}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \operatorname{div}_{\mathbf{r}'} (\gamma(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t)) dV' = \\ &= - \oint_{\partial\Omega} \omega_{\eta}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \gamma(\mathbf{r}') E_{v, \text{int}}(\mathbf{r}', t) dS' + \int_{\Omega} \omega_{\eta}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \operatorname{div}_{\mathbf{r}'} (\gamma(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t)) dV' = 0. \end{aligned}$$

Для второго интеграла равенство нулю доказывается аналогично.

Таким образом,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  может быть представлена, как предел в  $L_2(O_R)$  последовательности бесконечно гладких, соленоидальных и финитных в  $O_R$  векторных функций. Из этого следует [17], что  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , где  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  – векторная функция, квадратично суммируемая в  $O_R$  вместе со своими обобщенными производными по Соболеву первого порядка и, кроме того,  $[\mathbf{e}_{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] = \mathbf{0}$  на  $\partial O_R$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{O_R} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{u}(\mathbf{r}', t) dV' &= \int_{O_R} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \operatorname{rot}_{\mathbf{r}'} \mathbf{v}(\mathbf{r}', t) dV' = \\ &= \int_{O_R} \operatorname{rot}_{\mathbf{r}'} (G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{v}(\mathbf{r}', t)) dV' - \int_{O_R} [\operatorname{grad}_{\mathbf{r}'} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \times \mathbf{v}(\mathbf{r}', t)] dV' = \\ &= \oint_{\partial O_R} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) [\mathbf{e}_{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}', t)] dS + \int_{O_R} [\operatorname{grad}_{\mathbf{r}} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \times \mathbf{v}(\mathbf{r}', t)] dV' = \\ &= \operatorname{rot} \int_{O_R} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{v}(\mathbf{r}', t) dV'. \end{aligned}$$

Каждая из компонент ротора представляет собой разность производных первого порядка, а для производных первого порядка от объемного потенциала асимптотика  $O(1/r^2)$  гарантирована. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что система интегро-дифференциальных уравнений (2.1), (3.6)–(3.8), дополненная интегральным условием (3.9) и начальными условиями (1.8), эквивалентна начально-краевой задаче (1.1)–(1.8).

### Заключение

Представляется актуальным обобщение полученных результатов на ферромагнитные проводящие тела под диэлектрическим слоем, а также на проводящие тела с негладкими границами.

Для вывода интегро-дифференциальных уравнений применительно к случаю дефектного ферромагнитного проводника может быть использован метод, связанный с введением дополнительных вторичных источников на границе раздела сред, обладающих разными магнитными свойствами [5, 6, 18, 19].

Однако также возможно применение иного подхода, не связанного с использованием поверхностных потенциалов [20]. В рамках такого подхода уже были получены объемные интегро-дифференциальные уравнения для постоянного магнитного поля в дефектных магнетиках (причем из магнитостатики на квазистационарный случай многие результаты могут быть перенесены без изменений). Кроме того, были получены конкретные неравенства для норм обратных операторов, разрешающих указанные интегро-дифференциальные уравнения.

Обобщение интегро-дифференциальных уравнений на области с негладкими границами представляется возможным при достаточно подробной классификации точек негладкости, допускаемых в модели: тогда в функциональных классах, выбираемых для постановки задачи, следует указать асимптотическое поведение решения вблизи точек негладкости, определить класс (степень) суммируемости решения [21, 22].

Все перечисленное станет предметом дальнейших исследований.

### Список источников

1. Дякин В. В., Сандовский В. А. Задачи электродинамики в неразрушающем контроле. Екатеринбург: ИФМ УрО РАН, 2008. 390 с. ISBN: 5-7691-1861-X. EDN: QMFYCF.
2. Марвин С. В. Существование и единственность решения начально-краевой задачи для однородной системы уравнений Максвелла в случае неферромагнитного дефектного металлического тела // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2016. № 1. С. 105–117. EDN: VVYSAZ.
3. Марвин С. В. Начально-краевая задача структуроскопии неферромагнитного металлического тела с инородными диэлектрическими включениями остаточным полем мгновенно выключенного стороннего тока // Дефектоскопия. 2016. № 2. С. 42–54. EDN: VXMEDV.
4. Марвин С. В. Начально-краевая задача для системы уравнений Максвелла в случае неограниченной немагнитной проводящей среды под диэлектрическим слоем // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2017. № 13 (262), вып. 47. С. 5–14. EDN: ZCJDKZ.
5. Тозони О. В. Маергойз И. Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. Киев: Техника, 1974. 352 с.

6. Тозони О. В. Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1975. 296 с.
7. Кочубей Т. В., Астахов В. И. Вихревые токи в проводящей пластине с неоднородными анизотропными свойствами // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 8. С. 19–32. EDN: RXPNHT.
8. Астахов В. И., Елсуков В. С. О расчете экранирующих оболочек сложных геометрических форм // Известия вузов. Электромеханика. 2013. № 2. С. 3–7. EDN: PZFOSR.
9. Астахов В. И., Басан С. Н., Данилина Э. М. О математической модели вихревых токов в оболочках с разрезами // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2017. № 4. С. 13–21. EDN: ZWHBVX.
10. Астахов В. И., Данилина Э. М. Сведение задачи расчета вихревых токов в пластине с разрезами к интегральному уравнению // Известия вузов. Электромеханика. 2018. Т. 61, № 6. С. 5–12. DOI: 10.17213/0136-3360-2018-6-5-12. EDN: VNXSNG.
11. Марвин С. В. Интегро-дифференциальные уравнения для квазистационарного электромагнитного поля в немагнитном проводящем теле с дефектом // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия "Математика. Механика. Физика". 2024. Т. 16, № 3. С. 38–44. DOI: 10.14529/mmph240306. EDN: WUTYAD.
12. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Физматлит, 2003. 616 с. ISBN: 978-5-9221-0313-8. EDN: RXGSUP.
13. Петрушенко Е. И. К расчету вихревых токов в проводниках сложной формы. Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1966. № 6. С. 59–70.
14. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления М.: Наука, 1965. 427 с.
15. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 431 с.
16. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: ГИТТЛ, 1953. 415 с.
17. Быховский Э. Б. Смирнов Н. В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых в заданной области, и операторах векторного анализа // Тр. МИАН СССР. 1960. Т. 59. С. 5–36.
18. Кадников С. Н., Веселова И. Е. Исследование свойств граничного интегрального уравнения для расчета квазистатического магнитного поля // Вестник ИГЭУ. 2008. Вып. 2. С. 1–7. EDN: PFJMIZ.
19. Кадников С. Н., Веселова И. Е. Анализ векторного интегрального уравнения для расчета магнитного поля // Электричество. 2010. № 9. С. 61–65. EDN: LNAZIQ.
20. Дякин В. В. Математические основы классической магнитостатики. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2016. 404 с.
21. Головкин М. А. О некоторых свойствах интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Ученые записки ЦАГИ. 2006. Т. 37, № 4. С. 8–11. EDN: JWLRVJ
22. Мазья В. Г., Поборчий С. В. О представлении решения задачи Неймана в области с пиком гармоническим потенциалом простого слоя // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2009. Вып. 3. С. 41–49. EDN: KYOINB.

## References

1. Dyakin, V. V. and Sandovskii, V. A. (2008), "Zadachi elektrodinamiki v ne-razrushaiushchem kontrole" [Electrodynamics problems in the nondestructive testing], IMP UB RAS, Yekaterinburg, Russia, 390 p.
2. Marvin, S. V. (2016), "Existence and the uniqueness of solution of initial-boundary problem for the uniform system of equations of Maxwell in the case of nonferromagnetic defective metallic body", *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, no 1, pp. 105–117.
3. Marvin, S. V. (2016), "An initial-boundary value problem of structurescopy of a nonferromagnetic metal solid with foreign dielectric inclusions using the residual field of an in-stantaneously cut-off extraneous current", *Russian journal of nondestructive testing*, vol. 52, no 2, pp. 85–94.
4. Marvin, S. V. (2017), "An initial –boundary value problem for the system of Maxwell's equations in the case of an unlimited nonmagnetic conductive medium under dielectric layer", *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*, no 13 (262), iss. 47, pp. 5–14.
5. Tozoni, O. V. and Maergoyz, I. D. (1974), "Raschet trekhmernikh elektromagnitnikh poley" [Calculation of three-dimensional electromagnetic fields], Tekhnika, Kiev, USSR, 352 p.
6. Tozoni, O. V. (1975), "Metod vtorichnikh istochnikov v elektrotekhnike" [Secondary sources method in the electrical engineering], Energia, Moscow, USSR, 296 p.
7. Kochubey, T. V. and Astakhov, V. I. (2011), "Eddy currents in case of anisotropic inhomogeneous conductive plates", *Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 23, no 8, pp. 19–32.
8. Astakhov, V. I. and Elsukov, V. S. (2013), "About calculation of shielding shells of complex geometric shapes", *Russian Electromechanics*, no 2, pp. 3–7.
9. Astakhov, V. I., Basan, S. N. and Danilina, E. M. (2017), "About mathematical model of eddy current in thin shell with a cuts", *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus region. Technical Sciences*, no 4, pp. 13–21.
10. Astakhov, V. I. and Danilina, E. M. (2018), "Reduction problem of eddy current calculation in the plate with cuts to integral equation", *Russian Electromechanics*, vol. 61, no 6, pp. 5–12.
11. Marvin, S. V. (2024), "Integro-differential equations for a quasi-stationary electromagnetic field in a nonmagnetic conductive body with a defect", *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, vol. 16, no 3, pp. 38–44.
12. Tamm, I. E. (2003), "Osnovy teorii elektrichestva" [Fundamentals of electricity theory], Fizmatlit Publ., Moscow, Russia, 616 p.
13. Petrushenko, E. I. (1966), "To the calculation of eddy currents in conductors of complex shapes", *Izvestiya AN SSSR, Energetika i transport*, no. 6, pp. 59–70.
14. Kochin, N. E. (1965), "Vektornoye ischislenie i nachala tenzornogo ischisleniya" [The vector calculus and basics of the tensor calculus], Nauka, Moscow, USSR, 427 p.
15. Mikhlin, S. G. (1977), "Lineynie uravneniya v chastnykh proizvodnykh" [Linear partial differential equations], Vysshaya shkola, Moscow, USSR, 431 p.
16. Gyunter, N. M. (1953), "Teoriya potentsiala I ee primenenie v zadachakh matematicheskoy fiziki" [The theory of potential and it's applications in problems of the mathematical physics], GITTL, Moscow, USSR, 415 p.
17. Bykhovskii, E. B. and Smirnov, N. V. (1960), "Orthogonal decomposition of the space of vector function square-summable on a given domain, and the operators of vector analysis", *Tr. MIAN SSSR.*, vol. 59, pp. 5–36.

18. Kadnikov, S. N. and Veselova, I. E. (2008), "Investigating boundary integral equation for calculating quasistatic magnetic field", *Bulletin of IGEU*, iss. 2. pp. 1–7
19. Kadnikov, S. N. and Veselova, I. E. (2010), "Analysis of vector integral equation for calculation of magnetic field", *Electricity*, no 9. pp. 61–65.
20. Dyakin, V. V. (2016), "Matematicheskie osnovy klassicheskoy magnitostatiki" [Mathematical fundamentals of classical magnetostatics], UB RAS Publ, Yekaterinburg, Russia, 404 p.
21. Golovkin, M. A. (2006), "About some properties of the second kind Fredholm integral equations", *TsAGI Science Journal*, vol. 37, no 4, pp. 8–11.
22. Mazya, V. G. and Poborchii, S. V. (2009), "On representation of the solution of the Neumann problem in a domain with peak by the harmonic simple layer potential", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, vol. 42, iss. 3, pp. 185–193.

**Информация об авторе:**

С. В. Марвин – кандидат физико-математических наук, доцент департамента информационных технологий и автоматизации, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина (620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19).

**Information about the author:**

S. V. Marvin – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of department of information technologies and automation, Ural Federal University named after the first of President of Russia B.N. Yeltsin (19, Mira st., Yekaterinburg, Russian Federation, 620002).

Научная статья

УДК 519.6

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-31-43

<https://elibrary.ru/nfpfrh>



## Численное решение уравнений Фредгольма с двойной точностью методом вырождения интегрального ядра

Дмитрий Феликсович Пастухов<sup>1</sup>, Юрий Феликсович Пастухов<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup>Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, Новополоцк, Белоруссия

<sup>1</sup>[dmitrij.pastuhov@mail.ru](mailto:dmitrij.pastuhov@mail.ru)

<sup>2</sup>[pulsar1900@mail.ru](mailto:pulsar1900@mail.ru)

**Аннотация.** В работе впервые предложен модифицированный метод вырождения интегрального ядра для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Идея заключается в том, чтобы интегральное ядро разложить в ряд Тейлора по одной переменной  $x$ , а не по двум переменным  $x, s$  как в классическом методе. Разложение ядра в ряд проводится в средней точке отрезка интегрирования, что уменьшает модули элементов матрицы  $C$ , а также область невырожденности для матрицы  $I - \lambda C$ . Используется система степенных базисных функций на отрезке интегрирования. Получены три теоремы для достаточных условий корректности предложенного алгоритма методом вырождения интегрального ядра. Введено определение факториальной нормы Чебышева вектор-функции. Факториальная норма для системы частных производных интегрального ядра по переменной  $x$  и параметр  $\lambda$  входят в неравенство третьей теоремы – достаточное условие корректности алгоритма. Предложенный в работе численный алгоритм тестировался на трех интегральных уравнениях Фредгольма с ядрами с экспоненциальным ростом или с периодическим изменением знака ядра. Численные решения совпадают с точными решениями в 15 значащих знаках в равномерной метрике.

**Ключевые слова:** уравнения Фредгольма; численные метод; интегральные уравнения; матричный метод.

**Для цитирования:** Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф. Численное решение уравнений Фредгольма с двойной точностью методом вырождения интегрального ядра // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 3(70). С. 31–43. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-31-43. <https://elibrary.ru/nfpfrh>.

Статья поступила в редакцию 14.07.2025; одобрена после рецензирования 20.08.2025; принята к публикации 26.09.2025.



© 2025 Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф. Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы ознакомиться с условиями этой лицензии, посетите сайт <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Research article

## Numerical Solution of Fredholm Equations With Double Precision by the Integral Kernel Degeneracy Method

Dmitry F. Pastuhov<sup>1</sup>, Yuri F. Pastuhov<sup>2</sup><sup>1, 2</sup>Polotsk State University, Novopolotsk, Belarus<sup>1</sup>dmitrij.pastuhov@mail.ru<sup>2</sup>pulsar1900@mail.ru

**Abstract.** The work for the first time proposed a modified method of degeneration of the integral nucleus to solve the integrated equations of Fredholm of the second kind. The idea is to put the integral core in a series of Taylor along one variable  $x$ , and not in two variables  $x, s$  as in the classical method. The decomposition of the nucleus in the row is carried out at the middle point of the integration segment, which reduces the modules of the elements of the matrix  $C$ , as well as the area of disaster for the  $I - \lambda C$  matrix. The system of degree basic functions is used at the integration segment. Three theorems are offered for sufficient conditions for the correctness of the proposed algorithm by the degeneration of the integral nucleus. The definition of the factorial norm of Chebyshev Vector-functions has been introduced. The factual norm for the system of private derivatives of the integral nucleus on the variable  $x$  and the parameter  $\lambda$  are included in the inequality of the third theorem – a sufficient condition for the correctness of the algorithm. The numerical algorithm proposed in the work was tested on three integral equations of Fredholm with nuclei with exponential growth or with a periodic change in the sign of the nucleus. Numerical solutions coincide with accurate solutions in 15 significant signs in a uniform metric.

**Keywords:** *Fredholm equations; numerical methods; integral equations; matrix method.*

**For citation:** Pastuhov, D. F. and Pastuhov, Yu. F. (2025), "Numerical Solution of Fredholm Equations With Double Precision by the Integral Kernel Degeneracy Method", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(70), pp. 31–43, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-31-43, <https://elibrary.ru/nfpfrh>.

*The article was submitted 14.07.2025; approved after reviewing 20.08.2025; accepted for publication 26.09.2025.*

### Введение

Методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерры подробно описаны в работе [1]. Прямые методы [1, стр. 135] и проекционные методы [1, стр. 139]. В работе [2] для решения интегральных уравнений Фредгольма используются сплайны обобщенного вида, интегральное ядро может быть непрерывным, гладким или дважды дифференцируемым на квадрате. Благодаря второму порядку аппроксимации интегрального ядра  $O(h^2)$  требуется большое число интервалов аппроксимации. В работах [3, 4] предложен метод подбора подобластей на базе полиномов Канторовича для решения уравнения Фредгольма второго рода, а также рассматривается специальный вариант метода коллокации на базе полиномов Бернштейна для решения уравнений Фредгольма второго рода, приведены оценки корректности алгоритмов. В работе [5] применен метод коллокации для решения интегрального уравнения Вольтерры второго рода с использованием многочленов Чебышева и Лежандра, произведение интегрального ядра на приближенное решение раскладывается в частичную сумму по системе многочленов Чебышева или многочленов Лежандра. Достигнута минимальная норма Чебышева для невязки задачи  $10^{-13}$ . В работе



[6] решается система интегральных уравнений методом коллокации с узлами многочленов Чебышева первого и второго рода, получены теоретические оценки для корректности алгоритма. В работе [7] предложен метод решения системы нелинейных интегральных уравнений сверточного типа с монотонно выпуклой нелинейностью. В работе [8] предложен обобщенный метод Петрова–Галеркина для решения системы линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

В работе [9] методом замены интеграла с квадратурной интегральной формулой с двенадцатым порядком погрешности получено табличное решение линейного интегрального уравнения с двойной точностью. В данной работе, как и в работах [2–8] решение имеет функциональный вид, но использованы более простые координатные степенные функции. Метод получил название *модифицированного метода вырождения интегрального ядра для решения линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода*. Для достаточно гладкого интегрального ядра по переменной  $x$  можно использовать всего двадцать базисных функций и тридцать интервалов интегрирования в квадратурных формулах для достижения двойной точности решения. То есть, во всех примерах норма Чебышева невязки решения равна  $10^{-15}$ , единственный недостаток алгоритма заключается в явном знании формул для частных производных ядра по переменной  $x$ . Алгоритм тестировался на примерах с экспоненциальным изменением интегрального ядра или с периодическим изменением знака ядра. Доказаны 3 теоремы (достаточные условия существования и единственности численного решения задачи (1) алгоритмом (2)–(7)). Полученный алгоритм вместе с известными методами благодаря простоте и высокой точности решения поможет решать интегральные уравнения Фредгольма второго рода с достаточно гладкими интегральными ядрами.

### Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода [1, стр.135]

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), (x, s) \in [a, b] \times [a, b]. \quad (1)$$

В уравнении (1) параметр  $\lambda$ , интегральное ядро  $K(x, s) \in L_2[a, b] \times [a, b]$  и правая часть – функция  $f(x)$  заданы. Неизвестная функция должна быть интегрируема с квадратом на отрезке  $[a, b]$   $y(x) \in L_2[a, b]$ . Пусть также частные производные ядра по переменной  $x$  непрерывны на квадрате  $K_x^{(i)}(x, s) \in C[a, b] \times [a, b], i = \overline{0, n}$ .

Известен прямой метод решения интегрального уравнения (1) методом вырожденного ядра [1, стр. 135], который заключается в том, чтобы интегральное ядро разложить в ряд по переменным  $x, s$ . То есть, заменить интегральное ядро полиномом двух переменных, как, например, в задаче 29.11 [1, стр. 138]. А затем решить уравнение (1) методом замены ядра. В классическом методе требуется две системы базисных линейно независимых функций  $\{A_i(x)\}_{i=1}^n, \{B_i(x)\}_{i=1}^n$ . По одной из систем раскладывается решение, а ядро представляется суммой попарных произведений функций по одной из каждой системы [1, стр. 138]. Чтобы из интегрального ядра  $K(x, s)$  произвольного вида получить полином по двум переменным необходимо разложить ядро в ряд Тейлора по переменным  $x, s$ . В этом идея традиционного подхода решения уравнения (1) методом замены интегрального ядра.

Модифицируем известный метод. В данном случае понадобится одна система линейно-независимых функций  $\{A_i(x)\}_{i=0}^n, x \in [a, b]$ . Будем рассматривать симметричную

переменную  $y \Big|_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} = x \Big|_a^b - \frac{a+b}{2}$ ,  $c = \frac{a+b}{2}$ ,  $h = \frac{b-a}{2}$  относительно середины отрезка  $c = \frac{a+b}{2}$ ,  $y \in [-h, h]$  и систему линейно независимых степенных функций  $\{A_i(y) = y^i\}_{i=0}^n, y \in \left[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}\right]$ .

Идея модифицированного метода вырождения ядра заключается в том, чтобы разложить ядро  $K(x, s)$  по первой переменной  $x$  в центре отрезка  $c = \frac{a+b}{2}$ ,  $x = c + y$ ,  $dx = dy$ . Получаем

$$K(x, s) = K(c + y, s) = \sum_{i=0}^n K_x^{(i)}(c, s) \frac{y^i}{i!} + O(y^{n+1}), K_n(x, s) = \sum_{j=0}^n K_x^{(i)}(c, s) \frac{y^j}{j!}. \quad (2)$$

В формуле (2) обозначим  $K_x^{(i)}(c, s) = q_i(s)$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $s \in [a, b]$ . Разложим решение  $y(x)$  на отрезке  $[a, b]$  в сумму

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=0}^n A_i(y) D_i. \quad (3)$$

В формуле (3)  $D_i, i = \overline{0, n}$  называется вектором коэффициентов разложения решения по базисным функциям  $\{A_i(y) = y^i\}_{i=0}^n$ .

Подставим разложения (2), (3) в уравнение Фредгольма второго рода (1).

$$\begin{aligned} y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds &= f(x), A_i(y) = y^i \Leftrightarrow \\ f(x) + \lambda \sum_{i=0}^n y^i D_i - \lambda \int_a^b \sum_{i=0}^n q_i(s) \frac{y^i}{i!} \left( f(s) + \lambda \sum_{j=0}^n A_j(s-c)^j D_j \right) ds &= f(x) \Leftrightarrow \\ \sum_{i=0}^n y^i D_i - \int_a^b \sum_{i=0}^n q_i(s) \frac{y^i}{i!} \left( f(s) + \lambda \sum_{j=0}^n (s-c)^j D_j \right) ds &= 0 \Leftrightarrow \\ \sum_{i=0}^n y^i \left\{ D_i - \lambda \sum_{j=0}^n \left( \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} (s-c)^j ds \right) D_j \right\} &= \sum_{i=0}^n y^i \left\{ \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} f(s) ds \right\} \Leftrightarrow \\ D_i - \lambda \sum_{j=0}^n \left( \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} (s-c)^j ds \right) D_j &= \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} f(s) ds, \quad i = \overline{0, n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Если ввести обозначения в системе из  $n$  уравнений (4)

$$C_{i,j} = \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} (s-c)^j ds, \quad i, j = \overline{0, n}, \quad f_i = \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} f(s) ds, \quad i = \overline{0, n}, \quad (5)$$

то получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $D_j, j = \overline{0, n}$ :

$$D_i - \lambda \sum_{j=0}^n C_{i,j} D_j = f_i, \quad i = \overline{0, n}. \quad (6)$$

Систему уравнений (6) можно переписать в матричном виде (7):

$$D_i - \lambda \sum_{j=0}^n C_{i,j} D_j = f_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad (I - \lambda C)D = f \Leftrightarrow D = (I - \lambda C)^{-1} f. \quad (7)$$

Обратная матрица  $(I - \lambda C)^{-1}$  в программе вычислялась библиотекой Msimsl на языке Fortran. Где: матричные элементы  $C_{i,j}$  и коэффициенты правой части (6) можно записать в виде

$$\begin{cases} C_{i,j} = \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} (s-c)^j ds = \int_{-h}^h \frac{q_i(c+y)}{i!} y^j dy, \quad i, j = \overline{0, n}, \quad h = \frac{b-a}{2}, \quad y \in [-h, h], \\ f_i = \int_a^b \frac{q_i(s)}{i!} f(s) ds = \int_{-h}^h \frac{q_i(c+y)}{i!} f(c+y) dy, \quad i = \overline{0, n}. \end{cases} \quad (8)$$

Во-первых. В формулах (8) переменная  $y \in [-h, h]$  изменяет знак и принимает абсолютное значение меньше, чем переменная  $x$  на отрезке  $[a, b]$ , поэтому элементы матрицы  $C_{i,j}$  по модулю будут меньше чем, если использовать систему базисных функций  $\{A_i(y) = y^i\}_{i=0}^n, y \in [-h, h]$  вместо системы функций  $\{A_i(x) = x^i\}_{i=0}^n, x \in [a, b]$  (в работе [1, стр. 137]). Это уменьшит норму матрицы  $\|C\|$  и расширит область невырожденности матрицы  $I - \lambda C$ , то есть расширит область существования обратной матрицы  $(I - \lambda C)^{-1}$ .

Во-вторых. Базисные функции  $\{A_i(y) = y^i\}_{i=0}^n$  степенного вида не только входят множителями в разложение в ряд Тейлора (2) интегрального ядра  $K(x, s)$  по переменной  $x$ , но также обеспечивают корректность СЛАУ (4).

В-третьих. Решение (3) является функцией-полиномом степени  $n$ , которое можно сравнить с точным решением в каждой точке отрезка  $x \in [a, b]$  в отличие от работы [9], где решение ищется в табличном виде (вектора) на узлах сетки.

В-четвертых. В работе [9, стр. 11] приведена интегральная квадратурная формула (9) для вычисления определенного интеграла с двенадцатым порядком погрешности, которая используется в данной работе для вычисления элементов матрицы и коэффициентов правой части системы (6) по формулам (8):

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x) y_2(x) dx = 5h \cdot \sum_{i=0}^{n_1} C_i y_1(x_i) y_2(x_i) + O(h^{12}), \quad n_1 = 10p, \quad h = \frac{b-a}{n_1}, \quad p \in N, \quad (9)$$

где:

$$C_i = \begin{cases} \frac{16067}{299376}, & \text{если } i = 0 \text{ или } i = n_1, \\ \frac{16067}{149688}, & \text{если } (i \equiv 0 \pmod{10}) \text{ и } (0 < i < n_1), \\ \frac{26575}{74844}, & \text{если } (i \equiv 1 \pmod{10}) \text{ или } (i \equiv 9 \pmod{10}), \\ \frac{-16175}{99792}, & \text{если } (i \equiv 2 \pmod{10}) \text{ или } (i \equiv 8 \pmod{10}), \\ \frac{5675}{6237}, & \text{если } (i \equiv 3 \pmod{10}) \text{ или } (i \equiv 7 \pmod{10}), \\ \frac{-4825}{5544}, & \text{если } (i \equiv 4 \pmod{10}) \text{ или } (i \equiv 6 \pmod{10}), \\ \frac{17807}{12474}, & \text{если } i \equiv 5 \pmod{10}. \end{cases}$$

Таким образом, алгоритм (2)–(9) решает численно уравнение Фредгольма второго рода (1), обратная матрица  $(I - \lambda C)^{-1}$  в формуле (7) вычислялась библиотекой Msimsl в компиляторе Fortran. Алгоритм (2)–(7) назовем решением интегрального уравнения Фредгольма (1) методом вырождения интегрального ядра.

**Теорема 1** (критерий существования и единственности решения в алгоритме (2)–(7)). Для того чтобы алгоритм (2)–(7) имел единственное решение необходимо и достаточно, чтобы матрица  $I - \lambda C$  была невырожденной.

**Доказательство Теоремы 1** следует из формулы (7), в которой требуется существование обратной матрицы  $(I - \lambda C)^{-1}$ , что эквивалентно неравенству нулю определителя матрицы  $I - \lambda C$ ,  $\det(I - \lambda C) \neq 0$ . Теорема 1 доказана. Здесь  $I$  – единичная матрица порядка  $n$ .

**Теорема 2** (достаточные условия корректности алгоритма (2)–(7)). Пусть норма вектора  $f$  в уравнении (7) конечна. Если  $q = |\lambda| \|C\| < 1$ , то алгоритм (2)–(7) корректен и справедлива оценка нормы обратной матрицы  $\|(I - \lambda C)^{-1}\| < \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-|\lambda| \|C\|}$ .

**Доказательство.** По условию теоремы 2  $q = |\lambda| \|C\| < 1$ . Поэтому справедливо представление обратной матрицы рядом

$$(I - \lambda C)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k C^k, \|(I - \lambda C)^{-1}\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k C^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k \|C\|^k = \frac{1}{1-|\lambda| \|C\|} < \infty.$$

$$\|D\| = \|(I - \lambda C)^{-1} f\| \leq \|(I - \lambda C)^{-1}\| \|f\| \leq \frac{\|f\|}{1-|\lambda| \|C\|} < \infty. \text{ Теорема 2 доказана.}$$

**Определение 1.** Факториальной нормой Чебышева вектор-функции  $f(x) : [a, b] \rightarrow C([a, b], R^{n+1})$ ,  $f(x) = \{f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)\}$  назовем число

$$\|f\|_{\infty}^F = \max_{\substack{x \in [a, b] \\ i=0, n}} \frac{|f_i(x)|}{i!}$$

**Теорема 3.** Выполнение условия  $\|q\|_\infty^F < \frac{1}{2|\lambda|sh(h)}$  достаточно для корректности алгоритма (2)-(7).

**Доказательство.** Пусть выполнены условия **Теоремы 2**  $q = |\lambda||C| < 1$ . Оценим бесконечную норму матрицы  $C$ , используя формулу (8).

$$\begin{aligned} \|C\|_\infty &= \max_{i=0,n} \sum_{j=0}^n |C_{i,j}| = \max_{i=0,n} \sum_{j=0}^n \left| \int_{-h}^h \frac{q_i(c+y)}{i!} y^j dy \right| \leq \sum_{j=0}^n \max_{i=0,n} \frac{1}{i!} \left| \int_{-h}^h q_i(c+y) y^j dy \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{n=2k} \max_{\substack{i=0,n \\ y \in [-h,h]}} \frac{1}{i!} |q_i(c+y)| \left| \int_{-h}^h y^j dy \right| = \sum_{j=0}^{n=2k} \|q\|_\infty^F \left| \int_{-h}^h y^j dy \right| = 2\|q\|_\infty^F \left( h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \dots + \frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!} \right). \end{aligned}$$

Поскольку  $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^5}{5!} + \dots$ ,  $e^{-h} = 1 - h + \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^5}{5!} + \dots$ , то

$$e^h - e^{-h} = 2 \left( h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \dots \right) \Leftrightarrow h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \dots = \frac{e^h - e^{-h}}{2} = sh(h).$$

Обозначим конечную сумму:

$$I_{n=2k} = h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \dots + \frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!}, I_{n=2k} + R_{n=2k} = sh(h), I_{n=2k} < sh(h), R_{n=2k} > 0.$$

$$\begin{aligned} R_{n=2k} &= sh(h) - I_{n=2k} = \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} + \frac{h^{2k+5}}{(2k+5)!} + \frac{h^{2k+7}}{(2k+7)!} + \frac{h^{2k+9}}{(2k+9)!} + \dots = \\ &= \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \left( 1 + \frac{(2k+3)!}{(2k+5)!} h^2 + \frac{(2k+3)!}{(2k+7)!} h^4 + \frac{(2k+3)!}{(2k+9)!} h^6 + \dots \right) = \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \cdot \\ &\cdot \left( 1 + \frac{h^2}{(2k+4)(2k+5)} + \frac{h^4}{(2k+4)(2k+5)(2k+6)(2k+7)} + \frac{h^6}{(2k+4)(2k+5)(2k+6)(2k+7)(2k+8)(2k+9)} + \dots \right) \leq \\ &\leq \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \left( 1 + \left( \frac{h}{2k+4} \right)^2 + \left( \frac{h}{2k+4} \right)^4 + \left( \frac{h}{2k+4} \right)^6 + \dots \right) = \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \frac{1}{1 - \left( \frac{h}{2k+4} \right)^2}. \\ sh(h) - I_{n=2k} &\leq \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \frac{1}{1 - \left( \frac{h}{2k+4} \right)^2} \Leftrightarrow I_{n=2k} \geq sh(h) - \frac{h^{2k+3}}{(2k+3)!} \frac{1}{1 - \left( \frac{h}{2k+4} \right)^2}. \end{aligned}$$

Поскольку  $q = |\lambda||C| < 1 \Leftrightarrow \|C\| < \frac{1}{|\lambda|}$  а также  $\|C\|_\infty \leq 2\|q\|_\infty^F I_{n=2k} < \frac{1}{|\lambda|}$ , то верны оценки

$$\|q\|_\infty^F < \frac{1}{2|\lambda|sh(h)} < \frac{1}{2|\lambda|I_{n=2k}} \leq \frac{1}{2|\lambda| \left( sh(h) - \frac{1}{(2k+3)!} \frac{h^{2k+3}}{1 - \left( \frac{h}{2k+4} \right)^2} \right)}, n = 2k. \quad (10)$$

**Теорема 3** доказана.

**Замечание.** Отметим, что в правой части неравенства (10) обе оценки фактически совпадают, поскольку если положить  $n=2k=10$ ,  $h=\pi/2$  добавочное слагаемое очень мало.

$$\frac{1}{(2k+3)!} \frac{h^{2k+3}}{\left(1 - \left(\frac{h}{2k+4}\right)^2\right)} = \frac{1}{13!} \frac{1.57^{13}}{\left(1 - \left(\frac{1.57}{14}\right)^2\right)} \approx 5.73 \cdot 10^{-8}.$$

#### Теорема 4

1) Пусть  $C$  – положительная матрица,  $C_{i,j} > 0$ ,  $i, j = \overline{0, n}$  и  $\lambda > 0$  (либо  $C$  – отрицательная матрица,  $C_{i,j} < 0$ ,  $i, j = \overline{0, n}$  и  $\lambda < 0$ ) с элементами главной диагонали  $1 - |\lambda| C_{i,i} > |\lambda| \sum_{j=0, j \neq i}^n |C_{i,j}|$ ,  $i = \overline{0, n}$ , тогда алгоритм (2)–(7) корректен.

2) Верна оценка для нормы обратной матрицы

$$\frac{1}{r^*} \leq \|(I - \lambda C)^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{r_*}, r_* = \min_{i=0, n} \left(1 - \lambda \sum_{j=0}^n C_{i,j}\right), r^* = \max_{i=0, n} \left(1 - \lambda \sum_{j=0}^n C_{i,j}\right).$$

#### Доказательство

1) По условию **Теоремы 4**

$$1 - |\lambda| C_{i,i} > |\lambda| \sum_{j=0, j \neq i}^n |C_{i,j}|, i = \overline{0, n} \Leftrightarrow |\lambda| \sum_{j=0}^n C_{i,j} < 1 \Rightarrow \max_{i=0, n} |\lambda| \sum_{j=0}^n |C_{i,j}| = |\lambda| \|C\|_{\infty} < 1.$$

По **Теореме 2** алгоритм (2)–(7) корректен и существует обратная матрица  $(I - \lambda C)^{-1}$  с ограниченной нормой.

2) Диагональные элементы матрицы  $I - \lambda C$  положительны  $1 - |\lambda| C_{i,i} > |\lambda| \sum_{j=0, j \neq i}^n |C_{i,j}| \geq 0$ , а недиагональные отрицательны так как  $-\lambda C_{i,j} < 0 \forall i, j = \overline{0, n}, i \neq j$ . Также по условию **Теоремы 4** матрица  $I - \lambda C$  имеет строгое диагональное преобладание. Тогда выполнены все условия Теоремы Ю. С. Волкова, В. Л. Мирошниченко [10] для матрицы монотонного вида  $I - \lambda C$  и справедлива оценка

$$\frac{1}{r^*} \leq \|(I - \lambda C)^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{r_*}, r_* = \min_{i=0, n} \left(1 - \lambda \sum_{j=0}^n C_{i,j}\right) > 0, r^* = \max_{i=0, n} \left(1 - \lambda \sum_{j=0}^n C_{i,j}\right) > 0.$$

**Теорема 4** доказана.

Рассмотрим **пример 1**.

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x-s} y(s) ds = e^x. \quad (11)$$

С точным решением  $y(x) = 2e^x$ . Выполним проверку:

$$2e^x - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x-s} 2e^s ds = e^x \Leftrightarrow 2e^x - e^x = e^x.$$

Применим алгоритм (2)–(9) и достаточные условия корректности алгоритма (Теорему 3) к примеру (10), получим ( $n = 20$ ):

$$\lambda = 1/2, K(x, s) = e^{x-s}, f(x) = e^x, a = 0, b = 1, c = h = 1/2, K_x^{(i)}(c, s) = q_i(s) = K_x^{(i)}(1/2, s) = e^{1/2-s},$$

$$i = \overline{0, n}, s \in [0, 1], \|q\|_\infty^F < \frac{1}{2|\lambda|sh(h)} \Leftrightarrow \|q\|_\infty^F = \max_{\substack{s \in [0, 1], \\ i = \overline{0, n}}} \frac{|e^{1/2-s}|}{i!} = e^{1/2} \approx 1.649 < \frac{1}{2 \cdot (1/2)sh(1/2)} \approx 1.919.$$

**Таблица 1.** Численное и точное решение примера (10). Число базисных функций  $n = 20$ , число интервалов  $n_1 = 10$  в квадратурной формуле (9)

$x$	$u^{num}$	$u^{exact}$	$u^{num} - u^{exact}$
0.0000000000000000E+000	2.0000000000000000	2.0000000000000000	8.88178419E-016
0.1000000000000000	2.21034183615130	2.21034183615130	4.44089209E-016
0.2000000000000000	2.44280551632034	2.44280551632034	-4.4408920E-016
0.3000000000000000	2.69971761515201	2.69971761515201	4.44089209E-016
0.4000000000000000	2.98364939528254	2.98364939528254	0.0000000000E+000
0.5000000000000000	3.29744254140026	3.29744254140026	8.881784197E-016
0.6000000000000000	3.64423760078102	3.64423760078102	8.881784197E-016
0.7000000000000000	4.02750541494095	4.02750541494095	8.8817841970E-016
0.8000000000000000	4.45108185698493	4.45108185698494	-8.881784197E-016
0.9000000000000000	4.91920622231390	4.91920622231390	8.8817841970E-016
1.0000000000000000	5.43656365691809	5.43656365691809	8.8817841970E-016

С нормой Чебышева [11] для невязки задачи (разности численного решения и точного решения) на узлах сетки квадратурной формулы:

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_C = \max_{i=\overline{0, n_1}} |u_i^{num} - u_i^{exact}| = 8.8817E-016, x_i = a + h \cdot i, i = \overline{0, n_1}.$$

По найденному решению (3), можно найти норму невязки в промежуточных узлах сетки, она равна

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_C = \max_{i=\overline{1, n_1}} |u_i^{num} - u_i^{exact}| = 1.776E-015, x_i = a + h \cdot (i - 1/2), i = \overline{1, n_1}.$$

Значения нормы невязки задачи показывают, что функциональное решение (3) имеет двойную точность, – дает 15 верных значащих цифр в решении (табл. 1).

## Пример 2.

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x+s} y(s) ds = e^x. \quad (12)$$

С точным решением  $y(x) = \frac{4}{5-e^2} e^x$ . Выполним проверку:

$$\frac{4}{5-e^2} e^x - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x+s} \left( \frac{4}{5-e^2} \right) e^s ds = e^x \Leftrightarrow \frac{4}{5-e^2} - \frac{2}{5-e^2} \left( \frac{e^2-1}{2} \right) = \frac{5-e^2}{5-e^2} = 1 = 1.$$

Применим алгоритм (2)–(9) к примеру (12), получим

$\lambda = 1/2$ ,  $K(x, s) = e^{x+s}$ ,  $f(x) = e^x$ ,  $a = 0, b = 1, c = 1/2$ ,  $K_x^{(i)}(c, s) = q_i(s) = K_x^{(i)}(1/2, s) = e^{1/2+s}$ .

Бесконечная норма матрицы  $C$ , вычисленная программой с числом базисных функций  $n = 20$ , равна

$$\|C\|_{\infty} = 3.39714811032309, \quad |\lambda| \|C\|_{\infty} = (1/2)3.39714811032309 = 1.69857405516155 > 1.$$

Поэтому достаточные условия в теоремах 2, 3, 4 не выполнены, и теоремы 2, 3, 4 к примеру 2 не применимы.

**Таблица 2.** Численное и точное решение примера (11). Число базисных функций  $n=20$ , число интервалов  $n_1 = 30$  в квадратурной формуле (9)

$x$	$u^{num}$	$u^{exact}$	$u^{num} - u^{exact}$
0.0000000000000000E+000	-1.67430141208924	-1.67430141208924	2.2204460492E-016
0.1000000000000000	-1.85038922873402	-1.85038922873402	0.0000000000E+000
0.2000000000000000	-2.04499636271726	-2.04499636271727	1.3322676295E-015
0.3000000000000000	-2.26007050764560	-2.26007050764560	8.8817841970E-016
0.4000000000000000	-2.49776419785038	-2.49776419785038	4.4408920985E-016
0.5000000000000000	-2.76045635167479	-2.76045635167479	4.4408920985E-016
0.6000000000000000	-3.05077608048818	-3.05077608048818	4.4408920985E-016
0.7000000000000000	-3.37162900171635	-3.37162900171635	8.8817841970E-016
0.8000000000000000	-3.72622631923734	-3.72622631923734	4.4408920985E-016
0.9000000000000000	-4.11811696218917	-4.11811696218917	0.0000000000E+000
1.0000000000000000	-4.55122310384550	-4.55122310384550	8.881784197E-016

С нормой Чебышева [11] для невязки задачи (разности численного решения и точного решения) на узлах сетки квадратурной формулы

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_C = \max_{i=0, n_1} |u_i^{num} - u_i^{exact}| = 1.3322E-015, x_i = a + h \cdot i, i = 0, n_1.$$

### Пример 3.

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(x+s)y(s)ds = \sin x + \cos x. \quad (13)$$

С точным решением  $y(x) = \frac{4}{4-\pi}(\sin x + \cos x)$ . Выполним проверку:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{4-\pi}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(x+s) \frac{4}{4-\pi}(\sin s + \cos s)ds = \frac{4}{4-\pi}(\sin x + \cos x) - \\ & \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\sin x \cos s + \cos x \sin s) \left( \frac{4}{4-\pi} \right) (\sin s + \cos s)ds = \frac{4}{4-\pi}(\sin x + \cos x) - \frac{2}{4-\pi}(\sin x + \cos x) \frac{\pi}{2} = \\ & = \left( \frac{4-\pi}{4-\pi} \right) (\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x. \end{aligned}$$

Применим алгоритм (2)–(9) к примеру 3, получим



$$\lambda = 1/2, K(x, s) = \sin(x + s), f(x) = \sin x + \cos x, a = 0, b = \pi, \\ c = \pi/2, K_x^{(i)}(c, s) = q_i(s) = K_x^{(i)}(\pi/2, s) = \sin\left(s + (i+1)\frac{\pi}{2}\right), i = \overline{0, n}, s \in [0, \pi].$$

Бесконечная норма матрицы  $C$ , вычисленная программой с числом базисных функций  $n = 20$ , в примере 3 равна

$$\|C\|_{\infty} = 1528.89560494716, |\lambda| \|C\|_{\infty} = (1/2)1528.89560494716 = 764.447802473580 > 1.$$

Поэтому достаточные условия в теоремах 2, 3, 4 не выполнены, и теоремы 2, 3, 4 к примеру 3 не применимы.

**Таблица 3.** Численное и точное решение примера (12). Число базисных функций  $n=20$ , число интервалов  $n_1 = 30$  в квадратурной формуле (9)

$x$	$u^{num}$	$u^{exact}$	$u^{num} - u^{exact}$
0.000000000000000E+000	4.65979236632548	4.65979236632549	-2.66453525E-015
0.314159265358979	5.87168092602949	5.87168092602949	-2.66453525E-015
0.628318530717959	6.50880844628713	6.50880844628714	-3.55271367E-015
0.942477796076938	6.50880844628713	6.50880844628714	-1.77635683E-015
1.25663706143592	5.87168092602949	5.87168092602949	-1.77635683E-015
1.57079632679490	4.65979236632549	4.65979236632549	0.0000000000E+000
1.88495559215388	2.99177086312304	2.99177086312304	-8.881784197E-016
2.19911485751286	1.03089398294480	1.03089398294480	8.8817841970E-016
2.51327412287183	-1.03089398294480	-1.03089398294480	1.11022302E-015
2.82743338823081	-2.99177086312304	-2.99177086312304	0.000000000000E+000
3.14159265358979	-4.65979236632548	-4.65979236632549	1.776356839400E-015

С нормой Чебышева [11] для невязки задачи (разности численного решения и точного решения) на узлах сетки квадратурной формулы

$$\|u^{num} - u^{exact}\|_C = \max_{i=0, n_1} |u_i^{num} - u_i^{exact}| = 1.7763E-015, x_i = a + h \cdot i, i = \overline{0, n_1}.$$

## Результаты

Впервые предложен модифицированный метод вырождения ядра для решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Идея метода заключается в разложении интегрального ядра по переменной  $x$  в ряд Тейлора в середине отрезка интегрирования. Для метода доказаны три теоремы – достаточные условия корректности алгоритма (2)–(7) с оценкой нормы обратной матрицы в формуле (7). Кроме того, определена факториальная норма Чебышева вектор-функции. Впервые получено достаточное условие (10), связывающее факториальную норму системы функций из частных производных интегрального ядра с параметром  $\lambda$ .

Алгоритм (2)–(7) тестировался для трех примеров, в которых интегральное ядро имеет экспоненциальную особенность или периодическую смену знака.

## Список источников

1. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010. 240 с.
2. Бурова И. Г., Алцыбеев Г. О. Применение сплайновых аппроксимаций второго порядка к решению интегральных уравнений второго рода // Вычислительные методы и программирование. 2025. Вып. 2(26). С. 175–191. DOI: 10.26089/NumMet.v26r213. EDN: OTOUPI.
3. Соловьева С. А. О специальном варианте метода подобластей решения интегральных уравнения Фредгольма второго рода // Вычислительные методы и программирование. 2018. Вып. 3(19). С. 230–234. DOI: 10.26089/NumMet.v19r322. EDN: YRJNJJ.
4. Соловьева С. А. Об одном варианте метода коллокации для интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Вычислительные методы и программирование. 2017. Вып. (2)18. С. 187–191. DOI: 10.26089/NumMet.v18r216. EDN: OEIFHU.
5. Гермидер О. В., Попов В. Н. О методе коллокации при построении решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода с использованием многочленов Чебышева и Лежандра // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2024. Вып. 50. С. 19–35. DOI: 10.26516/1997-7670.2024.50.19. EDN: DGBYUE.
6. Junghanns P., Roch St., Silbermann B. Методы коллокации для решения систем сингулярных интегральных уравнений Коши на отрезке // Computational Technologies. 2001. Vol. 1(6). P. 88–124.
7. Давыдов А. А., Хачатрян Х. А., Петросян А. С. О решениях одной системы нелинейных интегральных уравнений типа свёртки на всей числовой прямой // Дифференциальные уравнения. 2023. Вып. 11(59). С. 1500–1514. DOI: 10.31857/S0374064123110055. EDN: PDZECG.
8. Волосова Н. К., Волосов К. А., Волосова А. К. и др. Обобщение метода Петрова–Галеркина для решения системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 1(60). С. 5–14. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-5-14. EDN: KQEIXG.
9. Волосова Н. К., Волосов К. А., Волосова А. К. и др. Решение интегральных уравнений Фредгольма методом замены интеграла квадратурой с двенадцатым порядком погрешности в матричном виде // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 4(59). С. 9–17. DOI 10/17072/1993-0550-2022-4-9-17.
10. Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л. Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50, № 6. С. 1248–1254.
11. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы: учеб. пособие для студ. физ.-мат. специальностей вузов // М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. 636 с.

## References

1. Bakhvalov, N. S., Lapin, A. V. and Chizhonkov E. V. (2010), *Numerical methods in problems and exercises*, Binom, lab. Knowledge, Russia.

2. Burova, I. G. and Altsybeev, G.O. (2025), "The use of second-order Halsoths to solve integral equations of the second kind", *Computational methods and programming*, no 2(26), pp. 175–191, DOI 10. 26089/NumMet. v26r213.
3. Solovyova, S. A. (2018), "On the special version of the method of resolving the integrated equations of Fredgolm of the second kind", *Computational methods and programming*, no. 3(19), pp. 230–234, DOI 10.26089/nummet.v19r322.
4. Solovyova, S. A. (2017), "On one version of the collocation method for the integrated equations of Fredgolm of the second kind", *Computational methods and programming*, no. 2(18), pp. 187–191, DOI 10.26089/nummet.v18r216.
5. Hermider, O. V. and Popov, V. N. (2024), "On the method of collocation when constructing a solution to the integral equation of Voltaire's second kind using polynomials of Chebyshev and Lyandra", *Izvestia of the Irkutsk State University. Series: Mathematics*, no. 50, pp. 19–35, DOI 10.26516/1997-7670.2024.50.19.
6. Junghanns, P., Roch, St. and Silbermann, B. (2001), "Collocation methods to solve the systems of the singular integral equations of the cat on the segment", *Computation Technologies*, vol. 1(6), pp. 88–124.
7. Davydov, A. A., Khachatryan, H. A. and Petrosyan, A. S. (2023), "On the solutions of one system of non -linear integrated equations such as a soften throughout the numerical direct", *Differential equations*, vol. 11(59), pp. 1500–1514, DOI 10.31857/S0374064123110055.
8. Volosova, N. K., Volosov, K. A., Volosova, A. K. [et al.]. (2023), "Generalization of the Petrov-Galekin method to solve the system of integrated equations of Fredgolm of the second kind", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, vol. 1 (60), pp. 5-14, DOI 10.17072/1993-0550-2023-1-5-14.
9. Volosova, N. K., Volosov, K. A., Volosova, A. K. [et al.]. (2022), "The solution of the integral equations of Fredgolm by replacing the integrated square with the twelfth order of the error in the matrix form", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, vol. 4(59), pp. 9–17, DOI 10/17072/1993-0550-2022-4-9-17.
10. Volkov Yu. S. and Miroshnichenko V. L. (2009), "Assessments of the norms of matrices, opposite to matrices of a monotonous kind and quite non -negative matrices", *Siberian mathematical journal*, vol. 6(50), pp. 1248–1254.
11. Bahvalov, N.S., Zhidkov, N.P. and Kobelkov, G.M. (2011), *Numerical methods* [a textbook for students of physics and mathematics specialties of higher educational institutions], Binom, lab. Knowledge, Russia.

#### **Информация об авторах:**

Д. Ф. Пастухов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), AuthorID: 405101;

Ю. Ф. Пастухов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), AuthorID: 405109.

#### **Information about the authors:**

D. F. Pastukhov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), AuthorID: 405101;

Yu. F. Pastukhov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), AuthorID: 405109.

Научная статья

УДК 512.56

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-44-53

<https://elibrary.ru/ooessc>

## О некоторых свойствах полурешеток

Андрей Александрович Петров<sup>1</sup>, Александр Павлович Шкляев<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup>Вятский государственный университет, Киров, Россия

<sup>1</sup>[apetrov43@mail.ru](mailto:apetrov43@mail.ru)

<sup>2</sup>[sascha.schlyayev@yandex.ru](mailto:sascha.schlyayev@yandex.ru)

**Аннотация.** Полурешетки являются, по сути дела, идемпотентными моно-полукольцами. Доказано, что элементы всякой полурешетки разделяются ее простыми идеалами. Дано мультипликативное представление полуколец с полурешеточным умножением. Отсюда следует, что любая полурешетка изоморфна некоторой решетке множеств ее простого спектра. Установлено, что изоморфность произвольных полурешеток эквивалентна гомеоморфности их простых спектров. Показано, что конечные цепи являются ретрактами во всех содержащих их полурешетках. Получены следствия. Сделаны дополняющие замечания.

**Ключевые слова:** полурешетка; полукольцо; полурешетка множеств; простой спектр; мультипликативное представление Стоуна; ретракт.

**Для цитирования:** Петров А. А., Шкляев А. П. О некоторых свойствах полурешеток // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 3(70). С. 44–53. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-44-53. <https://elibrary.ru/ooessc>.

**Благодарности:** работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00117.

Статья поступила в редакцию 16.04.2025; одобрена после рецензирования 09.08.2025; принята к публикации 26.09.2025.

Research article

## About Some Properties of Semilattices

Andrey A. Petrov<sup>1</sup>, Alexander P. Shklyayev<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup>Vyatka State University, Kirov, Russia

<sup>1</sup>[apetrov43@mail.ru](mailto:apetrov43@mail.ru)

<sup>2</sup>[sascha.schlyayev@yandex.ru](mailto:sascha.schlyayev@yandex.ru)

**Abstract.** Semilattices are, in fact, idempotent mono-semirings. The article shows that elements of any semilattice are separated by its prime ideals. It gives a multiplicative representation of semirings with semilattice multiplication. This implies that any semilattice is isomorphic to some lattice of sets of its prime spectrum. It is shown that finite chains are retracts in all semilattices containing them. Corollaries are obtained. Additional remarks have been made.



© 2025 Петров А. А., Шкляев А. П. Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы ознакомиться с условиями этой лицензии, посетите сайт <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

**Keywords:** *semilattice; semiring; semilattice of sets; prime spectrum; Stone's representation; retract.*

**For citation:** Petrov, A. A. and Shklyayev, A. P. (2025), "About Some Properties of Semilattices", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(70), pp. 44–53, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-44-53, <https://elibrary.ru/ooessc>.

**Acknowledgments:** the work was supported by the Russian Science Foundation, Project № 24-21-00117.

*The article was submitted 16.04.2025; approved after reviewing 09.08.2025; accepted for publication 26.09.2025.*

## Введение

Статья посвящена теории полурешеток и их связям с полукольцами, мультипликативные полугруппы которых являются полурешетками.

Полурешетки можно трактовать как идемпотентные моно-полукольца, поэтому к ним применимы результаты общей теории полуколец. На этом пути получаются теорема 1, утверждающая разделяемость элементов произвольной полурешетки ее простыми идеалами, и теорема 2 о представлении полурешеток полурешетками множеств простого спектра.

С другой стороны, теорема 2 и теорема 3 об определяемости полурешеток их простыми спектрами применяются, соответственно, к идемпотентным моно-полукольцам (следствия 1 и 3) и к полукольцам с полурешеточным умножением и константным сложением (следствия 2 и 4).

Как показывают примеры 2 и 3, произвольные полукольца с полурешеточным умножением не обязаны определяться своим простым спектром.

Теорема 4 утверждает, что конечные цепи являются "абсолютными" ретрактами в классе всех полурешеток.

Необходимые понятия и факты можно найти в книгах [2, 3, 5–7].

## Предварительные сведения

*Полурешеткой* называется идемпотентная коммутативная полугруппа. Мы будем пользоваться мультипликативными обозначениями, то есть полурешетка – это алгебраическая структура  $\langle S, \cdot \rangle$  с одной бинарной операцией умножения  $\cdot$ , удовлетворяющей тождествам ассоциативности  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ , коммутативности  $x \cdot y = y \cdot x$ , идемпотентности  $x \cdot x = x$ . Как правило, знак умножения  $\cdot$  опускаем и пишем просто  $xu$  вместо  $x \cdot u$ .

Задавая на полурешетке  $\langle S, \cdot \rangle$  бинарное отношение  $\leq$  по правилу:  $x \leq y$  означает  $xu = x$ , получим упорядоченное множество  $\langle S, \leq \rangle$ , любые два элемента  $a, b$  которого имеют точную нижнюю грань  $\inf\{a, b\} = ab$ , называемое *нижней полурешеткой*, ассоциированной с полурешеткой  $\langle S, \cdot \rangle$ . Обратно, задавая на нижней полурешетке  $\langle S, \leq \rangle$  операцию умножения формулой:  $a \cdot b = \inf\{a, b\}$  для любых  $a, b \in S$ , получим полурешетку  $\langle S, \cdot \rangle$ . Определения мультипликативно заданной полурешетки и нижней полурешетки равносильны. Эти структуры будем называть просто полурешетками.

Двойственным образом определяется *верхняя полурешетка* – как такое упорядоченное множество  $\langle S, \leq \rangle$ , в котором любые два элемента  $a, b$  имеют точную верхнюю грань  $\sup\{a, b\}$ . Полагая при этом  $a + b = \sup\{a, b\}$  для всех  $a, b \in S$ , получим полурешетку  $\langle S, + \rangle$  в аддитивной записи. Если же на полурешетке  $\langle S, + \rangle$  определить отношение  $\leq$  по правилу:  $x \leq y$  означает  $x + y = y$ , то получим упорядоченное множество  $\langle S, \leq \rangle$ , являющееся верней полурешеткой. Понятия аддитивно заданной полурешетки и верхней полурешетки эквивалентны. См. [2, с. 23–24, упражнения 18 и 20].

*Идеалом полурешетки*  $S$  называется ее идеал как полугруппы, то есть вместе с каждым своим элементом  $a$  он содержит *главный идеал*  $aS = \{as: s \in S\}$ . Собственный идеал  $P$  полурешетки  $S$  ( $P \neq S$ ) называется *простым*, если для любых  $a, b \in S$  включение  $ab \in P$  влечет  $a \in P$  или  $b \in P$ . Говорят, что в полурешетке  $S$  *простые идеалы разделяют элементы* (или  $S$  имеет достаточно много простых идеалов), если для любых двух элементов полурешетки  $S$  в ней существует простой идеал, содержащий ровно один из этих элементов.

*Решеткой* называется алгебраическая структура  $\langle S, +, \cdot \rangle$  с двумя идемпотентными коммутативно-ассоциативными бинарными операциями сложения  $+$  и умножения  $\cdot$ , связанными тождествами поглощения  $x(x+y) = x$  и  $x+xy = x$ . При порядковом подходе под *решеткой* понимается упорядоченное множество  $\langle S, \leq \rangle$ , являющееся одновременно нижней полурешеткой и верхней полурешеткой. Приведенные определения решеток также эквивалентны [2, с. 20–21, теорема 1]. Решетка с тождеством  $x(y+z) = xy+xz$ , равносильно, с двойственным тождеством  $x+yz = (x+y)(x+z)$ , называется *дистрибутивной*.

Если полурешетка  $\langle S, \cdot \rangle$  имеет наименьший элемент (наибольший элемент), то он называется *нулем (единицей)* и обозначается  $0$  ( $1$ , соответственно). В полурешетках элементы  $0$  и  $1$  определяются тождествами  $0 \cdot x = 0$  и  $1 \cdot x = x$ . В решетках  $\langle S, +, \cdot \rangle$  к этим тождествам можно добавить соответственно тождества  $0+x = x$  и  $1+x = 1$ .

Дистрибутивная решетка  $S$  с нулем  $0$  и ненулевой единицей  $1$  называется *булевой решеткой*, если каждый ее элемент  $a$  имеет дополнение  $b \in S$ :  $a+b = 1$  и  $ab = 0$ ; дополнение к  $a$  единственно и обычно обозначается  $a'$ .

*Полурешеткой множеств* назовем непустое множество  $S$  множеств, замкнутое относительно конечных теоретико-множественных пересечений:  $A \cap B \in S$  для любых множеств  $A, B \in S$ . В результате получается полурешетка  $\langle S, \cap \rangle$ .

Полурешетка множеств  $S$  называется *решеткой множеств*, если  $A \cup B \in S$  для всех  $A, B \in S$ . Любая решетка множеств  $S$  является дистрибутивной решеткой  $\langle S, \cup, \cap \rangle$ . Классическая *теорема Биркгофа–Стоуна* [2, с. 93, теорема 19] утверждает, что, с точностью до изоморфизма, все дистрибутивные решетки исчерпываются решетками множеств их простых спектров. Имеет место аналог этой теоремы для произвольных полурешеток (теорема 3).

Через  $B(M)$  обозначим *булеан* произвольного множества  $M$ , то есть множество всех подмножеств в  $M$ .

*Полукольцом* называется алгебраическая структура  $S \equiv \langle S, +, \cdot \rangle$  с коммутативно-ассоциативной операцией сложения  $+$  и ассоциативной операцией умножения  $\cdot$ , дистрибутивной относительно сложения с обеих сторон:  $x(y+z) = xy+xz$ ,  $(x+y)z = xz+yz$ .

Полукольцо  $S$  называется:

*коммутативным*, если операция умножения в  $S$  коммутативна;

*полукольцом с нулем*  $0$ , если  $\forall s \in S (s+0 = s \text{ \& } s \cdot 0 = 0 \cdot s = 0)$ ;

*полукольцом с единицей*  $1$ , если  $\forall s \in S s \cdot 1 = 1 \cdot s = s$ ;

*мультипликативно (аддитивно) идемпотентным*, если  $S$  удовлетворяет тождеству  $xx = x$  ( $x+x = x$ , соответственно);

*идемпотентным*, если  $S$  мультипликативно идемпотентно и аддитивно идемпотентно;

*моно-полукольцом*, если в  $S$  выполняется тождество  $xu = x+u$ , то есть операции сложения и умножения полукольца  $S$  совпадают;

*кольцом*, если его аддитивная полугруппа  $\langle S, + \rangle$  является группой;

*булевым кольцом*, если  $S$  – мультипликативно идемпотентное кольцо.

Класс полуколец содержит все ассоциативные кольца, все дистрибутивные решетки, основные числовые системы, а класс полуколец с полурешеточным умножением, то есть коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец, содержит дистрибутивные решетки и булевы кольца.

Напомним, что непустое подмножество  $I$  полукольца  $S$  называется его *идеалом*, если для любых элементов  $a, b \in I$  и  $s \in S$  имеем  $a+b, sa, as \in I$ . Собственный идеал  $P$  полукольца  $S$  называется *первичным (простым)*, если для любых элементов  $a, b \in S$  включение  $aSb \subseteq P$  ( $ab \in P$ ) влечет  $a \in P$  или  $b \in P$ .

Нам понадобятся следующие утверждения.

**Предложение А** [1, предложение 4]. В мультипликативно идемпотентных полукольцах первичные идеалы совпадают с простыми идеалами.

**Предложение Б** [1, предложение 5]. Пусть в мультипликативно идемпотентном полукольце  $S$  даны непересекающиеся идеал  $I$  и мультипликативная подполугруппа  $M$ . Тогда в  $S$  существует простой идеал, содержащий  $I$  и не пересекающийся с  $M$ .

**Предложение В** [1, следствие 2]. Любой идеал произвольного мультипликативно идемпотентного полукольца является пересечением его простых идеалов.

**Предложение Г** [1, предложение 7]. Для того чтобы полукольцо имело полурешеточное умножение, необходимо и достаточно, чтобы в нем простые идеалы разделяли элементы.

Первичным спектром  $\text{Spec } S$  полукольца  $S$  называется множество всех его первичных идеалов, наделенное топологией Стоуна–Зарисского. Если первичные идеалы полукольца  $S$  совпадают с его простыми идеалами, то топологическое пространство  $\text{Spec } S$  будем называть *простым спектром полукольца  $S$* . В частности, в силу предложения А, к таким полукольцам относятся мультипликативно идемпотентные полукольца.

Напомним подробнее понятие первичного спектра  $\text{Spec } S$  произвольного полукольца  $S$  (см. [4, параграф 3]). Считаем, что  $\text{Spec } S \neq \emptyset$ . Открытыми множествами служат множества  $D(A) = \{P \in \text{Spec } S : A \text{ не включено в } P\}$  по всем идеалам  $A$  полукольца  $S$ , а также пустое множество  $\emptyset$ . В частности  $D(S) = \text{Spec } S$ . Для полукольца  $S$  с нулем  $0$  имеем  $D(\{0\}) = \emptyset$ .

Обозначим через  $\text{Id } S$  решетку всех идеалов полукольца  $S$  относительно отношения включения  $\subseteq$ . Решетка  $\text{Id } S$  *полна сверху*, поскольку любое непустое семейство  $(A_i)_{i \in I}$  идеалов в  $S$  имеет точная верхняя грань  $\bigvee (A_i)_{i \in I} = \sup (A_i)_{i \in I}$ , равную пересечению всех идеалов в  $S$ , содержащих  $\bigcup (A_i)_{i \in I}$ .

Если  $(A_i)_{i \in I}$  – непустое семейство идеалов полукольца  $S$  и  $A, B$  – идеалы в  $S$ , то имеют место равенства:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i \in I} D(A_i) &= D(\sup (A_i)_{i \in I}); \\ A \subseteq B &\Rightarrow D(A) \subseteq D(B); \\ D(A) \cap D(B) &= D(AB),\end{aligned}$$

где  $AB$  – идеал в  $S$ , состоящий из сумм элементов  $ab$  при  $a \in A, b \in B$ .

Для произвольного элемента  $a$  полукольца  $S$  положим  $D(a) = D((a))$ , где  $(a)$  – наименьший идеал в  $S$ , содержащий элемент  $a$ . Множества  $D(a), a \in S$ , образуют базу топологии Стоуна–Зарисского. Первичный спектр  $\text{Spec } S$  полукольца  $S$  является  $T_0$ -пространством, то есть для любых двух различных первичных идеалов в  $S$  в  $\text{Spec } S$  найдется открытое множество, содержащее ровно один из данных первичных идеалов. Если полукольцо  $S$  обладает единицей  $1$ , то топологическое пространство  $\text{Spec } S = D(1)$  компактно.

Для произвольного топологического пространства  $X$  положим:  $O(X)$  есть решетка всех открытых множеств (топология) пространства  $X$  относительно включения  $\subseteq$ . Решетка  $O(X)$  является *полной* дистрибутивной решеткой, поскольку для всякого непустого семейства  $(U_i)_{i \in I}$  открытых множеств пространства  $X$  имеем:  $\sup(U_i)_{i \in I} = \cup(U_i)_{i \in I}$  и  $\inf(U_i)_{i \in I}$  – внутренность множества  $\cap(U_i)_{i \in I}$ . Открытое множество  $U$  топологического пространства  $X$  назовем *неприводимым*, если для любого непустого семейства  $(U_i)_{i \in I}$  открытых множеств в  $X$  из  $U = \cup(U_i)_{i \in I}$  следует  $U = U_i$  для некоторого индекса  $i \in I$ . Как видим, понятие неприводимого множества определяется на языке решетки  $O(X)$ . Неприводимые множества топологического пространства являются компактными открытыми множествами.

**Пример 1.** Возьмем любую полурешетку множеств  $\langle S, \cap \rangle$ . Алгебраическая структура  $\langle S, \cap, \cap \rangle$  будет идемпотентным моно-полукольцом. При этом полурешетка  $\langle S, \cap \rangle$  и полукольцо  $\langle S, \cap, \cap \rangle$  обладают одними и теми же идеалами и одинаковыми простыми идеалами.

**Пример 2.** Рассмотрим произвольную полурешетку множеств  $\langle S, \cap \rangle$ , содержащую пустое множество  $\emptyset$  и хотя бы одно непустое множество. Для любых множеств  $A, B \in S$  положим  $A+B = \emptyset$ . Полученная алгебраическая структура  $\langle S, +, \cap \rangle$  является полукольцом с полурешеточным умножением и константным сложением. Полурешетка  $\langle S, \cap \rangle$  и полукольцо  $\langle S, +, \cap \rangle$  обладают одними и теми же идеалами и одинаковыми простыми идеалами. Поэтому, с учетом примера 1, простые спектры полурешетки  $\langle S, \cap \rangle$  и полукольца  $\langle S, \cap, \cap \rangle$ ,  $\langle S, +, \cap \rangle$  совпадают, но полукольца  $\langle S, \cap, \cap \rangle$  и  $\langle S, +, \cap \rangle$  не изоморфны.

**Пример 3.** Пусть  $B(M)$  – булеан непустого множества  $M$ . Относительно отношения включения  $B(M)$  является (булевой) решеткой множеств с наименьшим элементом  $\emptyset$  и наибольшим элементом  $M$ . Упорядоченное множество  $\langle B(M), \subseteq \rangle$  служит нижней полурешеткой, ассоциированной с полурешеткой  $\langle B(M), \cap \rangle$ , и верхней полурешеткой, ассоциированной с полурешеткой  $\langle B(M), \cup \rangle$ . Рассмотрим четыре полукольца с полурешеточным умножением:

- 1) идемпотентное моно-полукольцо  $\langle B(M), \cap, \cap \rangle$ ;
- 2) полукольцо  $\langle B(M), +\emptyset, \cap \rangle$  с константное сложением  $+\emptyset$  с суммой  $\emptyset$ ;
- 3) булеву решетку  $\langle B(M), \cup, \cap \rangle$ ;
- 4) булево кольцо  $\langle B(M), \oplus, \cap \rangle$ , где  $\oplus$  – симметрическая разность множеств.

Полукольца 1) – 4) попарно не изоморфны, но имеют общую мультипликативную подгруппу – полурешетку  $\langle B(M), \cap \rangle$ . Полукольца 1) и 2), а также полукольца 3) и 4), имеют одинаковые простые спектры. Простые идеалы булевой решетки  $\langle B(M), \cup, \cap \rangle$  являются простыми идеалами полукольца  $\langle B(M), \cap, \cap \rangle$ , но не наоборот. Если множество  $M$  имеет более одного элемента, то простые спектры полукольца 1) и 3) не гомеоморфны, поскольку  $\text{Spec } \langle B(M), \cap, \cap \rangle$  не является хаусдорфовым пространством, а  $\text{Spec } \langle B(M), \cup, \cap \rangle$  есть нульмерное компактное хаусдорфово пространство [2, с. 140, следствие 10]. Заметим, что множество  $B(M) \setminus \{M\}$  служит наибольшим простым идеалом полукольца  $\text{Spec } \langle B(M), \cap, \cap \rangle$ .

## Основные результаты

**Лемма 1.** *Всякая полурешетка является мультипликативной подгруппой идемпотентного моно-полукольца, при этом они имеют одни и те же идеалы и одинаковые простые идеалы.*

Действительно, достаточно задать на полурешетке операцию сложения, совпадающую с умножением.



Простым спектром полурешетки  $\langle S, \cdot \rangle$  назовем простой спектр соответствующего идемпотентного моно-полукольца  $\langle S, \cdot, + \rangle$ .

**Лемма 2.** *Всякая полурешетка с нулем является мультипликативной полугруппой полукольца с полурешеточным умножением и константным сложением, причем они имеют одни и те же идеалы и одинаковые простые спектры.*

Достаточно на полурешетке с нулем 0 определить константное сложение  $x+y=0$ .

Следствием предложения Б является

**Предложение 1.** *Если  $S$  – произвольная полурешетка,  $I$  – ее идеал и  $M$  – непересекающаяся с  $I$  подполурешетка в  $S$ , то в  $S$  найдется простой идеал, содержащий  $I$  и не пересекающийся с  $M$ .*

Из предложения 1 вытекает

**Теорема 1.** *В любой полурешетке простые идеалы разделяют ее элементы.*

**Лемма 3.** *Пусть  $S$  – полукольцо с идемпотентным умножением и  $A, B$  – его идеалы. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- (1)  $D(A) \subseteq D(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$ ;
- (2)  $D(A) = D(B) \Leftrightarrow A = B$ ;
- (3)  $D(a) = D(b) \Leftrightarrow a = b$  для любых  $a, b \in S$ ;
- (4)  $D(A) \cup D(B) = D(A \vee B)$ ;
- (5)  $D(A) \cap D(B) = D(AB) = D(A \wedge B)$ ;
- (6)  $D(ab) = D(a) \cap D(b)$  при любых  $a, b \in S$ ;
- (7) решетка  $Id\ S$  изоморфна решетке  $O(Spec\ S)$ .

**Доказательство.** (1) Импликация  $A \subseteq B \Rightarrow D(A) \subseteq D(B)$  очевидна. Включение  $D(A) \subseteq D(B)$  означает, что простые идеалы полукольца  $S$ , содержащие идеал  $B$ , содержат и идеал  $A$ . По предложению В любой идеал полукольца  $S$  является пересечением всех содержащих его простых идеалов  $id\ S$ . Поэтому верна и обратная импликация  $D(A) \subseteq D(B) \Rightarrow A \subseteq B$ .

(2) следует из (1).

(3) следует из (2).

(4) вытекает из аналогичного свойства первичного спектра полуколец.

(5) Как легко видеть, имеем  $A \cap B = AB$ . Остается применить соответствующее свойство первичного спектра полуколец.

(6) вытекает из (5).

(7) является следствием утверждения (1), также вытекает из (2), (4), (5).

**Предложение 2.** *Для произвольной полурешетки  $S$  справедливы следующие утверждения:*

(1) идеалы полурешетки  $S$  совпадают с теоретико-множественными объединениями ее главных идеалов;

(2) для любого непустого семейства  $(A_i)_{i \in I}$  идеалов полурешетки  $S$  верно равенство  $D(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} D(A_i)$ ;

(3) множества  $D(a)$ ,  $a \in S$ , и пустое множество суть в точности неприводимые множества простого спектра  $Spec\ S$ .

**Доказательство.** Можно считать, что  $S$  – неодноэлементная полурешетка. По теореме 1  $Spec\ S \neq \emptyset$ . Простой спектр полурешетки  $S$  обладает всеми свойствами первичных спектров полуколец, в частности  $Spec\ S$  является  $T_0$ -пространством.

(1) Всякий идеал полурешетки  $S$  совпадает с объединением содержащихся в нем главных идеалов. Очевидно, что объединение любого непустого семейства главных идеалов  $aS = \{x \in S: x \leq a\}$ ,  $a \in S$ , полурешетки  $S$  является ее идеалом. Поэтому объединение любого непустого семейства идеалов полурешетки  $S$  также будет идеалом в  $S$ .

(2) следует из аналогичного свойства первичного спектра полуколец в силу утверждения (1).

(3) Возьмем элемент  $a \in S$  и предположим, что  $D(a) = \cup U_i$  – объединение открытых множеств  $U_i$  топологического пространства  $\text{Spec } S$ , индексированных элементами непустого множества  $I$ . Для каждого индекса  $i \in I$  имеем  $U_i = D(A_i)$  для подходящего идеала  $A_i$  полурешетки  $S$ . Тогда  $D(aS) = D(a) = \cup D(A_i) = D(\cup A_i)$  в силу утверждения (2), откуда  $aS = \cup A_i$  по лемме 3(2), стало быть,  $aS \subseteq A_i$  для некоторого индекса  $i \in I$ . Значит,  $aS = A_i$  для указанного индекса  $i$ , и  $D(a) = U_i$ . Поэтому открытое множество  $D(a)$  неприводимо.

Обратно, рассмотрим непустое неприводимое множество  $U$  простого спектра  $\text{Spec } S$  полурешетки  $S$ . Имеем  $U = D(A)$  для некоторого идеала  $A$  в  $S$ . Тогда  $U = \cup D(a)$  по всем элементам  $a \in A$ . Поэтому  $U = D(a)$  для некоторого  $a \in A$ .

**Предложение 3** (мультипликативное представление Стоуна). *Любое полукольцо  $S$  с полурешеточным умножением допускает мультипликативно изоморфное вложение  $S$  в булеан  $B(\text{Spec } S)$ .*

**Доказательство.** Пусть дано полукольцо  $S \equiv \langle S, +, \cdot \rangle$  с полурешеточным умножением. Рассмотрим отображение  $D: S \rightarrow B(\text{Spec } S)$ , переводящее каждый элемент  $a \in S$  в подмножество  $D(a) = \{P \in \text{Spec } S: a \notin P\}$  простого спектра  $\text{Spec } S$  полукольца  $S$ . В силу утверждений (3) и (6) леммы 3 отображение  $D$  осуществляет изоморфное вложение полурешетки  $\langle S, \cdot \rangle$  в полурешетку множеств  $B(\text{Spec } S)$  с операцией пересечения множеств, при этом полурешетка  $\langle S, \cdot \rangle$  изоморфна подполурешетке множеств  $\{D(a): a \in S\}$  полурешетки  $\langle B(\text{Spec } S), \cap \rangle$ . См. также замечание 4 в конце статьи.

**Теорема 2** (представление). *Любая полурешетка (с нулем) изоморфна некоторой полурешетке множеств ее простого спектра (с пустым множеством, соответственно).*

**Доказательство.** Пусть  $S \equiv \langle S, \cdot \rangle$  – произвольная полурешетка. Если она одноэлементна, то изоморфна любой одноэлементной полурешетке множеств, скажем,  $\{\emptyset\}$ . Будем считать полурешетку  $S$  неоднородной. По определению ее простой спектр  $\text{Spec } S$  есть простой спектр идемпотентного моно-полукольца  $\langle S, \cdot, \cdot \rangle$ . Тогда по предложению 3 полурешетка  $S$  изоморфна полурешетке множеств  $\{D(a): a \in S\} \subseteq \text{Spec } S$ . Если полурешетка  $S$  обладает нулем  $0$ , то полурешетка множеств  $\{D(a): a \in S\}$  содержит  $\emptyset = D(0)$  в качестве нуля.

Отметим, что полурешетка множеств  $\{D(s): s \in S\}$  приведенная, то есть любые точки  $P \neq Q$  простого спектра  $\text{Spec } S = D(S) = \cup \{D(s): s \in S\}$  разделяются множеством  $D(a)$  для некоторого  $a \in S$ , именно, для всякого элемента  $a$ , принадлежащего ровно одному из простых идеалов  $P$  или  $Q$ .

**Теорема 3** (определяемость). *Произвольные полурешетки  $S$  и  $T$  изоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны их простые спектры  $\text{Spec } S$  и  $\text{Spec } T$ .*

**Доказательство.** Ясно, что изоморфные полурешетки имеют гомеоморфные простые спектры.

Обратно, пусть для полурешеток  $S$  и  $T$  топологические пространства  $\text{Spec } S$  и  $\text{Spec } T$  гомеоморфны. Тогда изоморфны решетки  $O(\text{Spec } S)$  и  $O(\text{Spec } T)$ . По лемме 3(6) и предложению 2(3) будут также изоморфны полурешетки  $\langle \{D(s): s \in S\}, \cap \rangle$  и  $\langle \{D(t): t \in T\}, \cap \rangle$ . Остается к полурешеткам  $S$  и  $T$  применить представление  $D$  (теорема 2).

Подполурешетка  $A$  полурешетки  $S$  называется ее *ретрактом*, если существует гомоморфизм полурешетки  $S$  на полурешетку  $A$ , тождественный на  $A$ .

**Теорема 4** (ретрактность). *Всякая конечная цепь служит ретрактом любой содержащей ее как подполурешетку полурешетки.*

**Доказательство.** Пусть  $A = \{a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n\}$  – конечная цепь, являющаяся подполурешеткой полурешетки  $S$ . В силу предложения 1 возьмем в полурешетке  $S$  произвольный простой идеал  $P_1$ , содержащий идеал  $a_n + S$  и не содержащий элемент  $a_{n-1}$ . Снова по предложению 1 выберем простой идеал  $P_2$  в  $S$ , содержащий идеал  $(a_{n-1} + S) \cup P_1$  и не содержащий элемент  $a_{n-2}$ . Действуя аналогичным образом далее, получим в полурешетке  $S$  цепочку простых идеалов  $P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_{n-1}$ , таких, что  $a_{n-k+1} \in P_k$  и  $a_{n-k} \notin P_k$  для всех  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Разбиение  $\{P_1, P_2 \setminus P_1, \dots, P_{n-1} \setminus P_{n-2}, S \setminus P_{n-1}\}$  определяет конгруэнцию на полурешетке  $S$ , фактор-полурешетка по которой изоморфна цепи  $A$ . Поэтому  $A$  будет ретрактом полурешетке  $S$ .

В связи с теоремой 4 возникает следующая

**Задача.** Описать полурешетки, служащие ретрактами всех содержащих их полурешеток в качестве подполурешеток.

### Применение к полукольцам с полурешеточным умножением

На основании теоремы 2 получаем:

**Следствие 1.** *С точностью до изоморфизма идемпотентные моно-полукольца совпадают с полукольцами  $\langle S, \cap, \cap \rangle$  из примера 1.*

**Следствие 2.** *С точностью до изоморфизма полукольца с полурешеточным умножением и константным сложением совпадают с полукольцами  $\langle S, +, \cap \rangle$  из примера 2.*

Следующие два утверждения вытекают из теоремы 3, поскольку в случае полукольца  $S$ , являющегося идемпотентным моно-полукольцом или полукольцом с полурешеточным умножением и константным сложением, простой спектр  $\text{Spec } S$  совпадает с простым спектром его мультипликативной полугруппы (леммы 1 и 2), которая полностью определяет само полукольцо  $S$ .

**Следствие 3.** *Изоморфность идемпотентных моно-полуколец эквивалентна гомеоморфности их простых спектров.*

**Следствие 4.** *Изоморфность полуколец с полурешеточным умножением и константным сложением равносильна гомеоморфности их простых спектров.*

### Замечания

Сделаем ряд замечаний, дополняющих основной текст статьи.

1. На произвольной полурешетке  $\langle S, * \rangle$ , как идемпотентной коммутативной полугруппе с бинарной операцией  $*$ , вводятся два отношения порядка  $\leq^*$  и  $\leq^*$ , превращающие ее, соответственно, в нижнюю полурешетку и верхнюю полурешетку. Именно,  $x \leq^* y$  означает  $x * y = x$  и  $x \leq^* y$  означает  $x * y = y$  для любых  $x, y \in S$ . Порядки  $\leq^*$  и  $\leq^*$  двойственны друг и другу и их пересечение есть отношение равенства. См. [2, с. 23–24, упражнение 19].

2. В обзорной статье "Полугруппы" справочной книги [3, с. 32] указано, что любая полурешетка  $S$  вложима в полурешетку  $\langle B(S), \cap \rangle$ , стало быть, изоморфна соответствующей полурешетке множеств. В самом деле, сопоставляя каждому элементу  $a$  полурешетки  $S$  ее главный идеал  $aS$ , получаем изоморфное вложение  $S$  в полурешетку  $\langle B(S), \cap \rangle$ , поскольку, как легко проверить,  $aS \cap bS = (ab)S$  и  $aS = bS \Rightarrow a = b$  для любых элементов  $a, b \in S$ .

3. Изоморфное вложение  $D: S \rightarrow B(\text{Spec } S)$  полурешетки  $S$  в полурешетку  $\langle B(\text{Spec } S), \cap \rangle$  является полурешеточной вариацией представления Стоуна  $D$  дистрибутивных решеток. Действительно, пусть  $S \equiv \langle S, +, \cdot \rangle$  – произвольная

дистрибутивная решетка,  $\text{Spec } S$  – ее простой спектр (как полукольца) и  $D: S \rightarrow \mathcal{B}(\text{Spec } S)$ ,  $a \rightarrow D(a) = \{P \in \text{Spec } S: a \notin P\}$  для всех  $a \in S$ . По теореме 2 имеем изоморфное вложение полурешетки  $\langle S, \cdot \rangle$  в полурешетку  $\langle \mathcal{B}(\text{Spec } S), \cap \rangle$ . Легко видеть, что  $D(a+b) = D(a) \cup D(b)$  для любых  $a, b \in S$ . Поэтому дистрибутивная решетка  $S$  изоморфна решетке множеств  $\{D(a): a \in S\}$  – подрешетке булеана  $\langle \mathcal{B}(\text{Spec } S), \cup, \cap \rangle$ . Кроме того, конечно-порожденные идеалы дистрибутивной решетки  $S$  являются главными, поскольку  $aS+bS = (a+b)S$  для всех  $a, b \in S$ . Поэтому множества  $D(a)$ ,  $a \in S$ , совпадают с компактными открытыми множествами простого спектра  $\text{Spec } S$ .

Отметим также, что в случае дистрибутивной решетки  $\langle S, +, \cdot \rangle$  представление  $a \rightarrow aS$  ( $a \in S$ ) из замечания 2 не обязано переводить сумму в объединение, так как  $(a+b)S = aS+bS \neq aS \cup bS$  для несравнимых элементов  $a, b \in S$ , то есть при  $a \neq ab \neq b$ .

4. Возьмем произвольное полукольцо  $S \equiv \langle S, +, \cdot \rangle$  с полурешеточным умножением. В силу предложения 3 стоуново представление  $D$  осуществляет изоморфное вложение полурешетки  $\langle S, \cdot \rangle$  в полурешетку  $\langle \mathcal{B}(\text{Spec } S), \cap \rangle$ . А как обстоит дело с множеством  $D(a+b)$  для элементов  $a, b \in S$ ? Ясно, что  $D(a+b) \subseteq D(a) \cup D(b)$ . Если  $S$  – моно-полукольцо, то  $D(a+b) = D(a) \cap D(b)$  для всех  $a, b \in S$ . Если  $S$  – полукольцо с константным сложением, то  $D(a+b) = \emptyset$  для любых  $a, b \in S$ . Для дистрибутивной решетки  $S$  тождественно  $D(a+b) = D(a) \cup D(b)$  по замечанию 3. Для булева кольца  $S$  тождественно  $D(a+b) = D(a) \oplus D(b)$ , причем,  $D(a+a) = D(0) = \emptyset$ .

5. В книге Гретцера даны определения дистрибутивной верхней полурешетки [2, с. 135] и простого идеала в таких полурешетках [2, с. 135]. Соответствующий простой спектр  $P(S)$  дистрибутивной верхней полурешетки  $S$  назван *стоуновым пространством полурешетки  $S$*  [2, с. 136]. Для них доказана теорема определяемости [2, с. 137, теорема 5]: две дистрибутивные верхние полурешетки изоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны их стоуновы пространства. В силу замечания 3 дистрибутивные решетки также определяются своими простыми спектрами. Наша теорема 3 является определенным аналогом этих результатов.

6. В дополнение к теореме 4 отметим, что, как нетрудно видеть, любая полурешетка, являющаяся ретрактом всех содержащих ее полурешеток в качестве подполурешетки, имеет наименьший и наибольший элементы. Цепи натуральных, отрицательных целых и всех целых чисел не являются ретрактами цепи  $S$  целых чисел, пополненной наименьшим и наибольшим элементами, в то время как сама цепь  $S$  будет ретрактом любой полурешетки, содержащей  $S$  как подполурешетку.

7. В статье [4] изучались свойства полурешеток, являющихся аддитивными полугруппами идемпотентных полуколец с единицей.

Авторы выражают благодарность профессору Е. М. Вечтомову за постановку задач и внимание к нашей работе.

#### Список источников

1. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Простые идеалы в мультипликативно идемпотентных полукольцах // Математические заметки. 2022. Т.111, вып. 4. С. 494–505. DOI: 10.4213/mzm13343. EDN: QXOMSE.
2. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1981. 456 с.
3. Общая алгебра / Салий В. Н., Скорняков Л. А. / под общ. ред. Л. А. Скорнякова. М.: Физ.-мат. лит.: Наука, 1991. Т. 2. 480 с.
4. Петров А. А., Шкляев А. П. Об аддитивных полугруппах идемпотентных полуколец с единицей // Математические заметки. 2024. Т.116, вып. 4. С. 552–558. DOI: 10.4213/mzm14329. EDN: HVSYTL.

5. Чермных В. В. Функциональные представления полуколец. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2010. 224 с. ISBN 978-5-93825-882-2.
6. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
7. Golan J. S. Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 381 p.

#### References

1. Vechtomov, E. M. and Petrov, A. A. (2022) "Completely Prime Ideals in Multiplicatively Idempotent Semirings", *Mathematical Notes*, vol. 111, no 4, pp. 494–505.
2. Grätzer, G. (1982), *Obshchaya teoriya reshetok* [General lattice theory], Mir, Moscow, Russia.
3. Skornyakov, L. A. (1991), *Obshchaya algebra. T. 2*, [General Algebra, V. 2], Nauka, Moscow, Russia.
4. Petrov, A. A. and Shklyayev, A. P. (2024) "On Additive Semigroups of Idempotent semirings with Identity", *Mathematical Notes*, vol. 116, no 4, pp. 552–558.
5. Chermnykh, V. V. (2010), *Funkcional'nye predstavleniya polukolec*, [Functional representations of semirings], Izd. VyatGGU, Kirov, Russia
6. Engelking, R. (1986), *Obshchaya topologiya*, [General topology], Mir, Moscow, Russia.
7. Golan, J. S. (1999), *Semirings and their applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

#### Информация об авторах:

А. А. Петров – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, д. 36), AuthorID: 662310;

А. П. Шкляев – бакалавр четвертого года обучения по направлению "Математика и компьютерные науки", Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, д. 36).

#### Information about the authors:

A. A. Petrov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000), AuthorID: 662310;

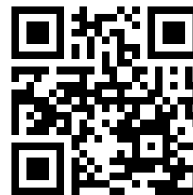
A. P. Shklyayev – Bachelor of the fourth year of study in the field of Mathematics and Computer Science, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000).

## МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 539.3

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-54-70

<https://elibrary.ru/qqfsuq>**Градиентные теории упругости и способы идентификации  
градиентных параметров моделей****Валерий Нагимович Аптуков<sup>1</sup>, Марина Александровна Барулина<sup>2</sup>**<sup>1, 2</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия<sup>1</sup>[aptukov@psu.ru](mailto:aptukov@psu.ru)<sup>2</sup>[mab@psu.ru](mailto:mab@psu.ru)

**Аннотация.** В связи с разработкой новых нано-структурированных материалов представляют интерес неклассические, в частности, градиентные теории упругости, использование которых считается оправданным для микро- и нано-масштабов в различных практических задачах материаловедения, механике композиционных материалов и др. Данная работа посвящена обзору исследований по градиентным теориям упругости, касающейся как развития общих теоретических подходов, так и применения их к решению различных практических задач. В статье проанализированы работы, где исследовались статические, динамические, тепловые процессы в рамках градиентных теорий упругости; рассмотрены примеры задач использования неклассических теорий упругости для материалов и конструкций с отдельными трещинами, поврежденностью, фазовыми переходами и др. Следует отметить, что особой проблемой в таких задачах является идентификация параметров неклассических моделей, что является нетривиальным в отличие от классической теории упругости. В связи с этим, в статье предлагается оригинальный способ идентификации параметра упрощенной модели градиентной упругости Е. Айфантиса на основе представленного аналитического решения задачи одномерной деформации тяжелого тонкого слоя.

**Ключевые слова:** градиентные теории упругости; упрощенные модели, идентификация параметров; деформация тяжелого слоя.

**Для цитирования:** Аптуков В. Н., Барулина М. А. Градиентные теории упругости и способы идентификации градиентных параметров моделей // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 3(70). С. 54–70. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-54-70. <https://elibrary.ru/qqfsuq>.

Статья поступила в редакцию 21.07.2025; одобрена после рецензирования 10.09.2025; принята к публикации 26.09.2025.



© 2025 Аптуков В. Н., Барулина М. А. Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, перейдите по ссылке <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Research article

## Gradient Elasticity Theories and Methods for Identifying Gradient Model Parameters

Valery N. Aptukov<sup>1</sup>, Marina A. Barulina<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup>Perm State University, Perm, Russia

<sup>1</sup>aptukov@psu.ru

<sup>2</sup> mab@psu.ru

**Abstract.** The development of new nano-structured materials contributes to the development of nonclassical, in particular, gradient theories of elasticity. The use of gradient elasticity theories is considered justified for micro- and nano-scales in various practical problems of materials science, mechanics of composite materials, etc. This paper is devoted to a review of research on gradient elasticity theories, concerning both the development of general theoretical approaches and their application to solving various practical problems. The article analyzes works where static, dynamic, and thermal processes were studied within the framework of gradient theories of elasticity; examples of problems of using non-classical theories of elasticity for materials and structures with individual cracks, damage, phase transitions, etc. are considered. It should be noted that a special problem in such problems is the identification of parameters of nonclassical models, which is non-trivial in contrast to the classical theory of elasticity. In this regard, the article proposes an original method for identifying the parameter of the simplified gradient elasticity model by E. Aifantis based on the presented analytical solution to the problem of one-dimensional deformation of a heavy thin layer.

**Keywords:** *gradient elasticity theories; simplified models, parameter identification; heavy layer deformation.*

**For citation:** Aptukov, V. N. and Barulina, M. A. (2025), "Gradient Elasticity Theories and Methods for Identifying Gradient Model Parameters", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(70), pp. 54–70, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-54-70, <https://elibrary.ru/qqfsuq>.

*The article was submitted 21.07.2025; approved after reviewing 10.09.2025; accepted for publication 26.09.2025.*

### Введение

Применение классической теории упругости при оценке напряженно-деформированного состояния некоторого тела ограничено определенным масштабным уровнем рассматриваемого тела (или его части). Обычно это связано с наличием значительных неоднородностей материальных характеристик, начиная с микроуровня и ниже. Для таких объектов необходимо использовать неклассические теории упругости, которые позволяют учитывать нелокальность деформаций. К таким теориям относятся градиентные теории упругости, основной особенностью которых является то, что они учитывают не только деформации, но и их пространственные производные, поэтому уравнения включают тензор моментных напряжений наряду с тензором Коши. Это значительно усложняет постановку и решение задач, получение их аналитических и численных решений.

Настоящая работа содержит обзор исследований по градиентным теориям упругости. В рамках обзора представлены и проанализированы работы, касающиеся как общей теории, так и различных приложений. Также изучены способы идентификации параметров неклассических моделей, что является нетривиальной проблемой в отличие от клас-

сической теории упругости. На основе анализа авторами была решена задача одномерной деформации тяжелого тонкого слоя. На основе решения предложенной задачи был предложен оригинальный способ идентификации градиентного параметра.

### **Общая теория неклассических сред**

*Первоначальные идеи.* В последнее время (начиная с 90-х годов прошлого века) в связи с появлением и разработкой новых материалов, а также благодаря тренду на миниатюризацию электронно-механических систем и их компонентов, активно развиваются теории обобщенного континуума, использующие неклассические определяющие соотношения [1]. Это связано, прежде всего, с необходимостью описания размерных эффектов, в том числе, в нано-структурированных материалах, различных сверхтонких структурах, материалах с большими градиентами неоднородностей, и другими задачами на мезо- и микроуровне [2].

Первоначальные идеи исходят от теории братьев Эжена и Франсуа Коссера [3, 4], называемой в настоящее время *несимметричной теорией упругости* (моментной теорией упругости). Особенности модели Коссера состоят в том, что для каждой частицы среды кроме вектора перемещений вводится еще одна кинематическая переменная – вектор поворота, в связи с чем, наряду с обычными напряжениями в среде возникают также моментные напряжения.

Дальнейшее развитие теории Коссера началось с классической работы К. Труделла и его ученика Дж. Эриксона [5]. Современная трактовка континуальной модели, включающей эффекты второго порядка, дана в работе [6]. Позднее Р. Тупин получил аналогичные определяющие уравнения для конечных деформаций [7]. Далее эти идеи развивались в работах Р. Миндлина [8], Э. Аэро и Е. Кувшинского [9], В. Пальмова [10] и др.

*Модели нелокальной упругости.* Модели основаны на предположении, что силы между материальными точками могут иметь дальнедействующий характер, что отражает дальнедействующий характер межатомных взаимодействий. Э. Кренер дал физическое обоснование нелокальной теории на основе теории дислокаций [11,12]. А. Эринген и Д. Эделен получили определяющие уравнения нелокальной теории на основе вариационного подхода [13]. Физические основы нелокальной упругости обобщены в работе И. Кунина [14]. Вариационный подход к выводу достаточно общих уравнений нелокальной градиентной теории высокого порядка представлен в работе [15].

*Развитие общей теории.* Общие вопросы градиентной теории упругости рассматривались отечественными учеными. Так, С. Лурье и В. Васильев в работе [16] указывают на необходимость формулировки условий симметрии, аналогичным требованиям к тензору жесткости анизотропного тела в классической теории упругости. Это симметрия по перестановке индексов в первой и второй паре индексов, а также при перестановке этих пар. Последнее требование вытекает из условия существования потенциала упругой энергии. Авторы развивают подобные требования применительно к градиентным теориям упругости с целью получения корректных физических уравнений.

Вариационная формулировка градиентной анизотропной теории упругости представлена в работе [17]. Наряду с классическим тензором анизотропных модулей четвертого ранга предложено ввести вектор размерности длины.

Некоторые работы посвящены развитию градиентной теории при конечных деформациях. Например, показано, что условия эллиптичности уравнений градиентной теории упругости при конечных деформациях, когда плотность энергии деформации является функцией первого и второго градиента вектора градиента места, накладывает определенные ограничения на касательные модули [18].

*Особенности неклассических моделей.* Развиваемые модели позволяют учитывать масштабные эффекты, поскольку определяющие соотношения включают градиентные



параметры, соотносимые с размерными параметрами исследуемой области, например, с размерами зерна (дефекта), толщиной покрытия и т.п. Модели позволяют получать регулярные решения в окрестности острых трещин (так называемых особых точек), более гладкие решения для многокомпонентных (зернистых) материалов с микро- и нановключениями, рассматривать адгезионные эффекты, масштабные эффекты и др.

Поскольку плотность энергии деформации в неклассических моделях зависит не только от тензора деформаций, но и от градиента деформации первого (второго и т.д.) порядка, это приводит к уравнениям более высокого порядка, чем в классической теории упругости. Данное обстоятельство усложняется требованием формулировки дополнительных граничных условий, а также определением множества дополнительных параметров модели. Все это является определенной "платой" за новые возможности градиентных теорий.

*Упрощенные модели градиентной упругости.* На практике используются, как правило, упрощенные (прикладные) градиентные модели с малым количеством параметров, в частности, однопараметрические модели, наиболее распространенной из которых является вариант Е. Айфантиса [19]. Другим вариантом упрощенной (одно- и двухпараметрической) модели является подход В. Васильева, С. Лурье [16, 20]. Этими же авторами в работе [21] представлена новая однопараметрическая модель обобщенной теории упругости. Рассмотрены постановки задач различной размерности.

Подобные модели и используются в основном в различных приложениях, например [22, 23]. Таким образом, максимально упрощенный вариант физических уравнений одномерной градиентной теории упругости (вариант Е. Айфантиса [19]) выглядит следующим образом:

$$\sigma = E\varepsilon + LE \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости;  $L$  – градиентный параметр, имеющий размерность длины.

### **Применение неклассических теорий упругости к решению различных задач**

*Задачи деформирования балок, пластин с концентраторами.* К настоящему времени в рамках градиентной теории упругости решено достаточно много различных прикладных задач. Решение статических задач изгиба стержня представлены в работах [19, 23–25 и др.], а деформации цилиндра в работах [26, 27 и др.]. Задачи изгиба пластин, растяжения пластины с отверстием и подобных рассматривались в работах [28–29 и др.]. Авторами статьи [30] в рамках континуума Коссера проведен анализ аналитического решения задачи Кирша и показано отличие классического и неклассического решений.

*Задачи теории трещин.* Классическая линейная упругость приводит к бесконечно большому напряжению в вершине острой трещины, а поскольку сингулярность напряжений не является реальной, то в этом случае классические критерии разрушения не применимы. Градиентная теория устраняет сингулярность напряжений, что приводит к определенным преимуществам описания [31].

Подробное применение моментной теории упругости к задачам трещинами изложено в монографии Н. Морозова [32]. Новый вид решения плоской задачи градиентной теории упругости при наличии острой трещины представлен в [33].

*Задачи механики композиционных материалов, наноматериалов.* Градиентные теории упругости применяются при анализе напряженного состояния в тонких покрытиях (слоях) в композиционных материалах. В частности, в работе [34] рассмотрены тонкие покрытия, применяемые в авиакосмической области. Модель материалов со сферическими анизотропными наночастицами представлена в работе [35]. Изгиб консольных

нано-трубок с целью разработки резонаторов изучался в работе [36]. В работе [37] рассматривается модель композиционного материала, армированного двунаправленными волокнами, описывающая плавные переходы полей сдвиговых деформаций.

*Динамические задачи.* Применение градиентной теории упругости при описании различных динамических эффектов, в частности колебаний, приводит к различным эффектам. Так, многие авторы отмечают, что когда толщина микро-пластины сравнима с масштабным параметром модели, увеличивается собственная частота колебаний, например [38]. Аналогичный эффект наблюдается и для продольных колебаний нано-стержня [39].

Нелинейные продольные и сдвиговые волны деформации, распространяющиеся в градиентно-упругой среде, изучаются в работе [40]. Колебания полосы с отслоением в рамках однопараметрической модели Е. Айфантиса рассмотрены авторами работы [41], где получены смешанные полуаналитические решения для градиентной упругости.

Динамические задачи для микро- и нано-объектов часто возникают в связи с разработкой различных нано-электромеханических систем (датчиков), например [42]. В подобных задачах необходимо учитывать влияние нано-размерных эффектов, что было сделано в работе [43], где рассматривались колебания круглой ортотропной пластины с учетом эффектов градиентной упругости.

*Градиентная теплопроводность и термоупругость.* Значительная часть работ посвящена полусвязанным термоупругим задачам, когда температурное поле определяется по обычным классическим законам, а напряженно-деформированное состояние, индуцированное тепловыми эффектами – по градиентной теории упругости. Как всегда широко используется однопараметрическая теория Е. Айфантиса.

В работе А. Ватульян с соавторами [44] приведено решение термоупругой задачи для цилиндра с термозащитным покрытием, отмечается необходимость учета влияния градиентного параметра при оценке прочности покрытия. Аналогичная термоупругая плоская задача рассмотрена также в работе [45].

Развитие вариационного принципа Л. Седова для построения различных диссипативных моделей, позволяющее получить обобщение различных законов теплопроводности, в том числе градиентную модель теплообмена, предлагается в работе [46].

*Задачи с поврежденностью, фазовыми превращениями и др.* Уравнения неравновесной термодинамики с внутренними параметрами состояния для градиентной теории упругости представлены Р. Ван в работе [47]. Вариант градиентной теории упругости со скалярным параметром поврежденности развивается в работе [48]. Модель дилатационной теории упругости применительно к чистому изгибу балки, соответствующая частному случаю среды с микроструктурой Миндлина, развивается в работе [49].

Задачи электроупругости в рамках градиентной упругости рассмотрены в работах А. Ватульян с соавторами [50,51]. Оценка напряженно-деформированного состояния, индуцированного фазовым превращением в магнии на основе градиентной теории упругости, проведена в работе [52], где получено аналитическое решение для одноосной деформации тонкого слоя.

*Идентификация параметров неклассических теорий упругости.* Для практического применения градиентных теорий требуется разработка достоверных методов идентификации дополнительных материальных констант. Идентификация параметров может осуществляться различным образом, в литературе выделяются несколько основных подходов.

Сравнение результатов континуального и дискретно-атомистического моделирования проведено в работе [53]. Использование потенциалов межатомного взаимодействия

позволяет определять параметры градиентной теории, приводится пример идентификации для двухфазного композита W-Si [54].

Испытания образцов с различной длиной нанесенных трещин или с различным размером дефектов (метод Васильева–Лурье) предполагает сравнение соответствующих расчетных и экспериментальных данных, в том числе измерение двухмерного или трехмерного поля деформаций вблизи дефектов на поверхности образца [55]. Подобный подход обсуждается в работе [56].

Наиболее распространенным подходом является аналогичный подход, когда оценка параметров для микро- и нано-композиционных структур производится путем измерения поля деформаций (измерение двухмерного или трехмерного поля координат на поверхности образца) изучаемого объекта и сравнения данных с численными (в частном случае, аналитическими) результатами. Такие подходы отражены в различных работах, например [57, 58].

Ниже будет рассмотрена задача деформации тонкого слоя под действием собственного веса для физических уравнений Е. Айфантиса, решение которой в совокупности с инструментальными измерениями позволяет идентифицировать градиентный параметр.

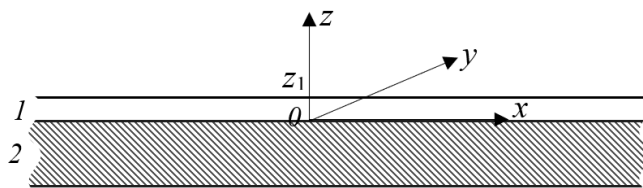
### Одноосная деформация тяжелого слоя

Рассмотрим одноосную деформацию тонкого слоя толщиной  $z_1 < 1$  мкм под действием силы тяжести. Такая задача позволяет получить аналитическое решение и может служить основой для оценки градиентного параметра при наличии соответствующего инструментального сопровождения.

Связь между напряжениями и деформациями для максимально простого варианта градиентной теории упругости (Е. Айфантис, [19]) в одномерном варианте (одноосной деформации вдоль оси  $z$ , рис. 1) для декартовой системы координат можно записать как

$$\sigma_z = E\varepsilon_z + LE \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z}, \quad (2)$$

где  $E$  – модуль упругости;  $L$  – градиентный параметр, имеющий размерность длины;  $\sigma_z, \varepsilon_z$  – компоненты тензора напряжений и деформаций, соответственно.



**Рис. 1.** Одноосная деформация тонкого тяжелого слоя (1), лежащего на абсолютно твердом основании (2)

Рассмотрим тяжелый однородный слой (рис. 1), расположенный в диапазоне

$$-\infty \leq x \leq +\infty; -\infty \leq y \leq +\infty; 0 \leq z \leq z_1, \quad (3)$$

тогда с учетом направления оси  $z$  от точки 0 в сторону  $z_1$

$$\sigma_z = -\gamma(z_1 - z), \quad (4)$$

где  $\gamma$  – удельный вес.

Общее решение уравнения (2) с учетом (4) имеет вид

$$\varepsilon_z = C \exp\left(-\frac{z}{L}\right) + \frac{\gamma}{E}(z - z_1 - L). \quad (5)$$

Интегрируя (5), получим общее выражение для перемещения:

$$u_z = -CL \exp\left(-\frac{z}{L}\right) + \frac{\gamma}{2E}(z - z_1 - L)^2 + C_1. \quad (6)$$

Постоянные интегрирования  $C, C_1$  в решении (6) определяются из граничных условий на границах слоя. Классическое граничное условие касается перемещения на границе  $u_z(z = 0) = 0$ . Откуда следует, что

$$C_1 = CL - \frac{\gamma}{2E}(z_1 + L)^2. \quad (7)$$

Возникает вопрос о дополнительном граничном условии для определения постоянной  $C$ . Казалось естественно предположить, что на свободной границе  $z_1$  деформация  $\varepsilon_z(z = z_1) = 0$ , что приводит к условию  $\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z}(z = z_1) = 0$  согласно (2), и соответствует отсутствию напряжения на свободной границе  $\sigma_z(z = z_1) = 0$ . В этом случае выражение для деформации принимает вид

$$\varepsilon_z = \frac{\gamma L}{E} \exp\left(\frac{z_1 - z}{L}\right) + \frac{\gamma}{E}(z - z_1 - L). \quad (8)$$

Анализ выражения (8) показывает, что деформация является положительной  $\varepsilon_z > 0$ , что, конечно, не имеет физического смысла, поскольку слой сжимается под действием силы тяжести.

Следовательно, необходимо задавать деформацию (или ее производную) на границе  $z = 0$ , где отсутствуют перемещения. Вариант граничного условия  $\varepsilon_z(z = 0) = 0$  также приводит к не физическому следствию  $\varepsilon_z > 0$ . Подходящим вариантом является требование  $\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z}(z = 0) = 0$  для которого постоянная  $C = \frac{\gamma L}{E}$ . В этом случае деформация и перемещение принимают вид:

$$\varepsilon_z = \frac{\gamma L}{E} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) + \frac{\gamma}{E}(z - z_1 - L); \quad (9)$$

$$u_z = \frac{\gamma L^2}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{z}{L}\right)\right] + \frac{\gamma}{2E} z(z - 2z_1 - 2L). \quad (10)$$

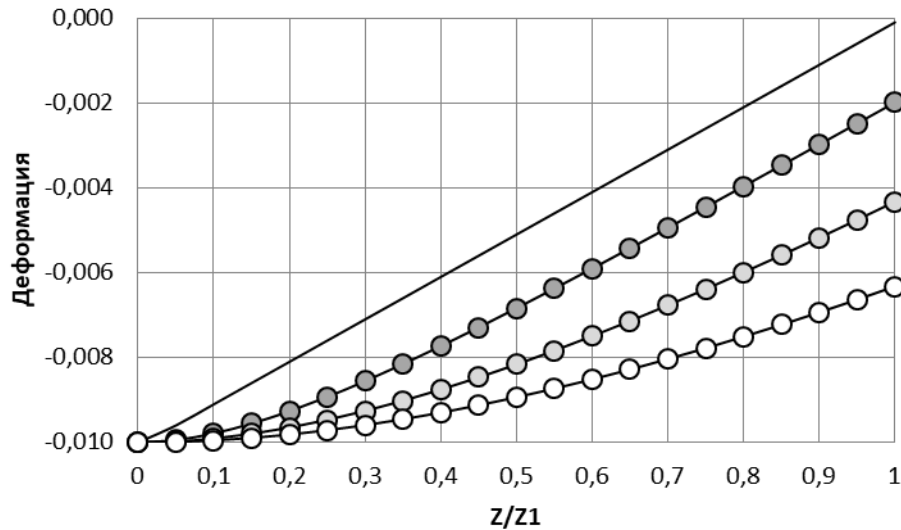
Полученные выражения (9), (10) можно представить в безразмерном виде:

$$\varepsilon_z = \pi_1 \pi_2 \exp\left(-\frac{\zeta}{\pi_2}\right) + \pi_1(\zeta - \pi_2 - 1); \quad (11)$$

$$u_z/z_1 = \pi_1 \pi_2^2 \left\{1 - \exp\left(-\frac{\zeta}{\pi_2}\right)\right\} + \frac{1}{2} \pi_1 \zeta(\zeta - 2\pi_2 - 2), \quad (12)$$

где  $\pi_1 = \frac{\gamma z_1}{E}$ ,  $\pi_2 = \frac{L}{z_1}$ ,  $\zeta = \frac{z}{z_1}$ .

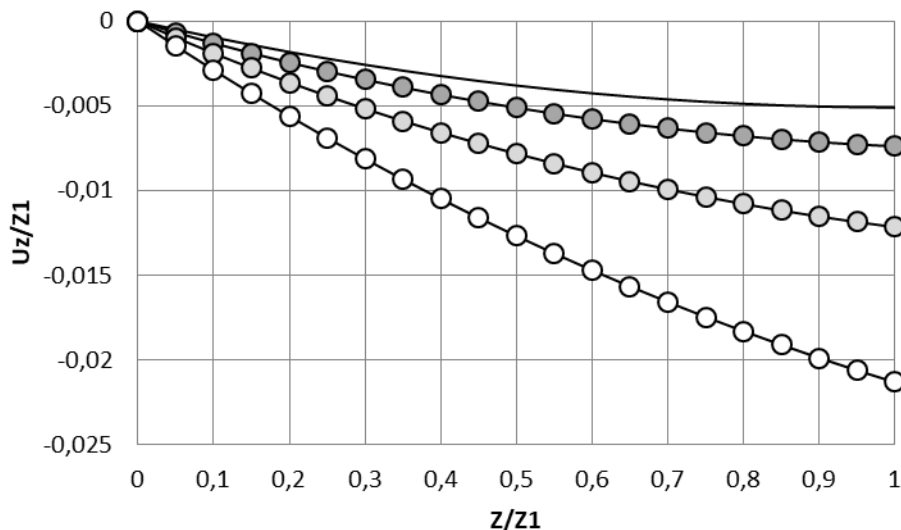
Распределение деформации (11) по толщине слоя при  $\pi_1 = 0,01$  для различных значений параметра  $\pi_2$  (соответственно, градиентного параметра  $L$ ) показано на рис. 2.



**Рис. 2.** Распределение деформации по толщине тяжелого слоя:  $\pi_2 = 1$  – белый круг; 0,5 – светло-серый круг; 0,2 – темно-серый круг; 0,01 – линия без маркера (классическое решение)

Наблюдается сильное отличие классического решения от решений согласно градиентной теории при различных параметрах  $\pi_2(L)$ .

Распределение относительного перемещения (12) по толщине слоя при тех же параметрах показано на рис. 3.



**Рис. 3.** Распределение относительного перемещения по толщине тяжелого слоя:  $\pi_2 = 1$  – белый круг; 0,5 – светло-серый круг; 0,2 – темно-серый круг; 0,01 – линия без маркера (классическое решение)

Видно, что на свободной границе тяжелого слоя отличия в перемещениях по градиентной и классической теории могут достигать от 1,5 до 4 раз. Подобные отличия могут быть замерены инструментально с целью определения градиентного параметра  $L$ .

Например, для низкомолекулярного материала (полимер, клей) при толщине слоя  $z_1$  около 1 мм величина  $\pi_1$  может достигать  $10^{-4}$ . При этом значении  $\pi_1$  расчеты по представленной модели дают величину максимального перемещения границы слоя  $u_z(z_1 = 1) = 0,5$  мкм для  $\pi_2 = 0,01$  (классическое решение) и  $u_z(z_1 = 1) = 2$  мкм для  $\pi_2 = 1$  (градиентная теория).

Пусть тонкий слой низкомолекулярного материала приклеен к массивной пластине. Пусть толщина низкомолекулярного слоя в случае, когда массивная пластина находится внизу, равна  $h_1$ . А соответствующая толщина, когда массивная пластина находится сверху, равна  $h_2$ . Тогда

$$h_2 - h_1 = 2u_z(z_1 = 1). \quad (13)$$

Именно собственный вес слоя определяет разность величин  $h_2 - h_1$  в (13), которая находится в пределах от 1 мкм до 4 мкм, что может быть замерено инструментально. В зависимости от полученного результата (в том числе с помощью графиков рис. 2) можно оценить величину  $\pi_2$  и градиентный параметр  $L$ .

### Заключение

Представлен обзор исследований по неклассическим (градиентным) теориям упругости. Рассмотрены вопросы общей теории и различные приложения, в частности, использование упрощенных моделей применительно к микро- и нано-структурным материалам. Отдельное внимание уделено методам идентификации параметров градиентных моделей.

В рамках упрощенной модели Е. Айфантиса поставлена и решена задача одномерной деформации тонкого слоя под действием собственного веса. Предложен способ определения градиентного параметра на основе полученного решения.

### Список источников

1. Трусов П. В., Швейкин А. И. Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения. Новосибирск: Изд. СО РАН, 2019. 605 с. DOI: 10.15372/MULTILEVEL2019TPV. ISBN: 978-5-7692-1661-9. EDN: BCSSTZ.
2. Лурье С. А., Соляев Ю. О. Метод идентификации параметров градиентных моделей неоднородных структур с использованием дискретно-атомистического моделирования // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 3. С. 89–112. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.06. EDN: SXDTNX.
3. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris: A. Hermann, 1909. 226 p.
4. Ерофеев В. И., Герасимов С. И. Континуума Коссера сто лет спустя // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2013. Т. 5, № 1. С. 3–4.
5. Ericksen J. L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1957. Vol. 1. P. 295–323. DOI: 10.1007/bf00298012. EDN: AKLXGG.
6. Truesdell C., Toupin R. A. The Classical Field Theories, Handbuch der Physik, vol III/1, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer Verlag, 1960. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6\_2.

7. *Toupin R. A.* Elastic Materials with Couple Stresses, *Arch. Rational Mech. and Anal.* 1962. Vol. 11. P. 385–414. DOI: 10.1007/bf00253945. EDN: YMFBWU.
8. *Mindlin R. D.* Micro-structure in linear elasticity // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1964. Vol. 16. P. 51–78. DOI: 10.1007/bf00248490. EDN: UUTPGW.
9. *Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В.* Континуальная теория асимметричной теории упругости. Равновесие изотропного тела // *Физика твердого тела.* 1964. Т. 6, вып. 9. С. 2689–2699.
10. *Пальмов В. А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // *Прикладная математика и механика.* 1964. Т. 28, вып. 3. С. 401–408.
11. *Kroner E.* Elasticity Theory of Materials with Long Range Cohesive Forces // *International Journal of Solids and Structure.* Vol. 3. 1967. P. 731–743. DOI: 10.1016/0020-7683(67)90049-2.
12. *Kroner E.* Dislocation field theory. Theory of cristal defects. New York, 1966.
13. *Kunin I. A.* Elastic Media with Microstructure, Springer Verlag, Berlin, 1983. DOI: 10.1007/978-3-642-81960-5.
14. *Eringen A. C. and Edelen D. G. B.* On Nonlocal Elasticity // *International Journal of Engineering Science.* Vol. 10. 1972. P. 233–248. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90039-0.
15. *Faghidian S. A.* Higher-order nonlocal gradient elasticity: a consistent variational theory // *International Journal of engineering science.* 2020. Т. 154. P. 103337. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2020.103337. EDN: CSOFWI.
16. *Васильев В. В., Лурье С. А.* О корректных нелокальных обобщенных теориях упругости // *Физическая мезомеханика.* 2016. Т. 19, № 1. С. 47–59. EDN: VSMFNF.
17. *Белов П. А., Лурье С. А.* Развитие концепции "разделенной анизотропии" в теории градиентной анизотропной упругости // *Механика композитных материалов.* 2021. Т. 57, № 4. С. 611–628. DOI: 10.22364/mkm.57.4.01. EDN: IVOVKD.
18. *Еремеев В. А.* Об эллиптичности уравнений равновесия градиентной теории упругости и устойчивости в малом // *Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия.* 2023. Т. 10 (68), вып. 1. С. 99–108. DOI: 10.21638/spbu01.2023.109. EDN: KHXUVH.
19. *Altan B. S., Aifantis E. C.* On Some Aspects in the Special Theory of Gradient Elasticity // *Journal of the Mechanical Behavior of Materials.* 1997. Vol. 8, № 3. P. 231–282. DOI: 10.1515/JMBM.1997.8.3.231.
20. *Васильев В. В., Лурье С. А.* Модель сплошной среды с микроструктурой // *Композиты и наноструктуры.* 2015. Т. 7, № 1. С. 2–10. EDN: TPKWUN.
21. *Васильев В. В., Лурье С. А.* Обобщенная теория упругости // *Известия РАН. Механика твердого тела.* 2015. № 4. С. 16–27. EDN: UXVZDR.
22. *Askes H., Aifantis E. C.* Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results // *International Journal of Solids and Structures.* 2011. Т. 48. P. 1962–1990. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006. EDN: OKODVR.
23. *Ломакин Е. В., Лурье С. А., Рабинский Л. Н., Соляев Ю. О.* Полуобратное решение задачи чистого изгиба балки в градиентной теории упругости: отсутствие масштабных эффектов // *Доклады РАН.* 2018. Т. 479, № 4. С. 390–394. DOI: 10.7868/S0869565218100079. EDN: YWMUMX.
24. *Ломакин Е. В., Лурье С. А., Рабинский Л. Н., Соляев Ю. О.* Об уточнении напряженного состояния в прикладных задачах теории упругости за счет градиентных эффектов // *Доклады РАН.* 2019. Т. 489, № 6. С. 585–591. DOI: 10.31857/S0869-56524896585-591. EDN: KETOXA.

25. Лурье С. А. О парадоксе аномальной относительной изгибной жесткости сверхтонких балок в градиентной теории упругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 2020. № 3. С. 48–57. DOI: 10.31857/S0572329920030095. EDN: LADRAR.
26. Gao X. L., Park S. K. Variational formulation of simplifies strain gradient elasticity theory and its application to pressurized thick-walled cylinder problem // Int. Journal of Solids and Structures. 2007. Vol. 44. P. 7486–7499. DOI: 10.1016/j.ijsol-str.2007.04.022. EDN: KETIPD.
27. Collin F., Caillerie D., Chambon R. Analytical solution for the thick-walled cylinder problem modelled with an isotropic elastic second gradient constitutive equation // Int. Journal of Solids and Structures. 2009. Vol. 46. P. 3927–3937. DOI: 10.1016/j.ijsol-str.2009.05.017.
28. Короленко В. А., Соляев Ю. О. Оценка уровня концентрации напряжений вблизи микро-размерных отверстий на основе упрощенных моделей градиентной теории упругости // Труды Московского авиационного института. 2021. № 121. С. 1–39. DOI: 10.34759/trd-2021-121-04. EDN: JKCWSF.
29. Mousavi S. M., Paavola J. Analysis of plate in second strain gradient elasticity // Arch. Applied Mechanics 2014. Vol. 84. P. 1135–1143. DOI: 10.1007/s00419-014-0871-9. EDN: AZYTNM.
30. Кулеш М. А., Матвеев В. П., Шардаков И. Н. Построение и анализ точного аналитического решения задачи Кирша в рамках континуума и псевдоконтинуума Коссера // Прикладная механика и техническая физика. 2001. Т. 42, № 4. С. 145–154. EDN: ONVVRD.
31. Eringen A. C., Speziale C. G., Kim B. S. Crack Tip Problems in Nonlocal Elasticity // J. Mechanics and Physics of Solids. 1972. Vol. 25. P. 339–355.
32. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
33. Lurie S. A., Volkov-Bogorodsky D. B., Vasiliev V. V. A new approach to non-singular plane cracks theory in gradient elasticity // Mathematical and computational applications. 2019. Т. 24, № 4. P. 24040093. DOI: 10.3390/mca24040093. EDN: JSPDPK.
34. Лурье С. А., Соляев Ю. О., Рабинский Л. Н., Кондратова Ю. Н., Волов М. И. Моделирование напряженно-деформированного состояния тонких композитных покрытий на основе решения плоской задачи градиентной теории упругости слоя // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2013. № 1. С. 161–181. EDN: PYXMRN.
35. Karami B., Janghorban M., Tounsi A. Nonlocal strain gradient 3D elasticity theory for anisotropic spherical nanoparticles // Steel and composite structures. 2018. Т. 27, № 2. P. 201–216. DOI: 10.12989/scs.2018.27.2.201. EDN: VINXEY.
36. Arda M. Buckling analysis of intermediately supported nanobeams via strain gradient elasticity theory // International journal of engineering and applied science. 2020. Т. 12, № 4. P. 163–172. DOI: 10.24107/ijeas.842499. EDN: NRPQHX.
37. Kim C. I., Zeidi M. Gradient elasticity theory for fiber composites with fibers resistant to extension and flexure // International journal of engineering science. 2018. Т. 131. P. 80–99. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2018.06.002. EDN: YIAPTF.
38. Ramezani Sh. Nonlinear vibration analysis of micro-plates based on strain gradient elasticity theory // Nonlinear dynamics. 2013. Т. 73, № 3. P. 1399–1421. DOI: 10.1007/s11071-013-0872-1. EDN: IHJZKV.
39. Uzun B., Civalek Ö., Yayli M. Ö. Анализ продольных колебаний функционально-градиентного наностержня при различных условиях защемления на основе нелокальной теории упругости с учетом жесткости // Физическая мезомеханика. 2023. Т. 26, № 1. С. 60–77. DOI: 10.55652/1683-805X\_2023\_26\_1\_60. EDN: UHMKLZ.



40. Ерофеев В. И., Шешенина О. А. Нелинейные продольные и сдвиговые стационарные волны деформации в градиентно-упругой среде // Математическое моделирование систем и процессов. 2007. № 15. С. 15–27. EDN: PAXXAX.
41. Ватульян А. О., Явруян О. В. Колебания полосы с отслоением в рамках однопараметрической модели Айфантиса градиентной теории упругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2022. № 3. С. 70–82. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.08. EDN: IWCMUN.
42. Барулина М. А., Голиков А. В., Панкратова Е. В., Маркелова О. В. Исследование влияния структуры подвеса инерционной массы стеклянного микромеханического акселерометра на его характеристики // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. Вып. 1(68). С. 41–51. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-1-41-51. EDN: DVYPDM.
43. Barulina M., Kondratov D., Galkina S., Markelova O. Analytical Solution for Bending and Free Vibrations of an Orthotropic Nanoplate based on the New Modified Couple Stress Theory and the Third-order Plate Theory // Journal of Mathematical and Fundamental Sciences. 2022. Vol. 54(1). P. 11–38. DOI: org/10.5614/j.math.fund.sci.2022.54.1.2. EDN: TMDNMI.
44. Ватульян А. О., Нестеров С. А., Юров В. О. Решение задачи градиентной термоупругости для цилиндра с термозащитным покрытием // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14, № 3. С. 253–263. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.3.21. EDN: DDVWWM.
45. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Решение задачи градиентной термоупругости для полосы с покрытием // Ученые записки Казанского университета. Серия "Физико-математические науки". 2021. Т. 163, кн. 2. С. 181–196. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196. EDN: DDVWWM.
46. Белов П. А., Лурье С. А. Вариационная формулировка градиентной необратимой термодинамики // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2023. № 5. С. 36–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.04. EDN: OTLSML.
47. Van P. Thermodynamically consistent gradient elasticity with an internal variable // Theoretical and applied mechanics. 2020. Vol. 47, Is. 1. P. 1–17. DOI: <https://doi.org/10.2298/TAM200204006V>.
48. Лурье С. А., Белов П. А., Ожерелков Д. А. Моделирование поврежденности механических свойств материалов в обобщенной градиентной теории упругости // Упругость и неупругость (материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел). М.: Изд-во МГУ, 2021. С. 270–276. EDN: LSRMGP.
49. Соляев Ю. О., Лурье С. А., Волков А. В. Численное решение задачи чистого изгиба балки в рамках дилатационной теории упругости // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10, № 2. С. 137–152. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.12. EDN: ZBPCXN.
50. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Масштабно-зависимая модель электроупругости для сплошного цилиндра с покрытием // Владикавказский математический журнал. 2023. Т. 25, вып. 4. С. 29–40. DOI: 10.46698/q5632-5654-3734-n. EDN: MKHUBF.
51. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Градиентные модели деформирования составных электроупругих тел // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2023. № 5. С. 5–16. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.01. EDN: MSKRGO.

52. Антуков В. Н., Скрябина Н. Е., Фрушар Д. Анализ упругих деформаций, индуцированных гидридным превращением в магнии, в рамках градиентной теории упругости // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2025. № 3. С. 19–28. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.3.02.
53. Лурье С. А., Соляев Ю. О. Метод идентификации параметров градиентных моделей неоднородных структур с использованием дискретно-атомистического моделирования // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 3. С. 89–112. EDN: SXDTNX.
54. Лурье С. А., Соляев Ю. О. Определение параметров градиентной теории упругости по потенциалам межатомного взаимодействия, учитывающим модифицированное правило Лоренца-Бертло // Физическая мезомеханика. 2016. Т. 19 (3). С. 39–46. EDN: WCLPNV.
55. Васильев В. В., Лурье С. А., Салов В. А. Исследование прочности пластин с трещинами на основе критерия максимальных напряжений в масштабно-зависимой обобщенной теории упругости // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21, № 4. С. 5–12. DOI: 10.24411/1683-805X-2018-14001. EDN: XWCGMH.
56. Askes H., Susmel L. Understanding cracked materials: is linear elastic fracture mechanics obsolete? // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2015. Vol. 38, № 2. P. 154–160. DOI: 10.1111/ffe.12183.
57. Лурье С. А., Посыпкин М. А., Соляев Ю. О. Метод идентификации масштабных параметров градиентной теории упругости на основе численных экспериментов для плоских композиционных структур // *International Journal of Open Information Technologies*. 2015. Vol. 3, № 6. P. 1–5. EDN: TTTTVH.
58. Короленко В. А., Соляев Ю. О. Оценка уровня концентрации напряжений вблизи микро-размерных отверстий на основе упрощенных моделей градиентной теории упругости // Труды Московского авиационного института. 2021. № 121. С. 1–39. DOI: 10.34759/trd-2021-121-04. EDN: JKCWSF.

## References

1. Trusov, P. V. and Shveikin, A. I. (2019), *Multilevel Models of Mono- and Polycrystalline Materials: Theory, Algorithms, and Application Examples*, Novosibirsk, SO Russian Academy of Sciences, 605 p.
2. Lurie, S. A. and Solyev, Yu. O. (2014), "A method for identifying the parameters of gradient models of heterogeneous structures using discrete-atomic modeling", *PNRPU Mechanics Bulletin*, no 3, pp. 89–112.
3. Cosserat, E. and Cosserat, F. (1909), *Theorie des corps deformables*, A. Hermann, Paris, France, 226 p.
4. Erofeev, V. I. and Gerasimov, S. I. (2013), "The Kosserat Continuum One Hundred Years Later", *Radio electronics. Nanosystems. Information technologies*, vol. 5, no 1, pp. 3–4.
5. Ericksen, J. L. and Truesdell, C. (1957), "Exact theory of stress and strain in rods and shells", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 1, pp. 295–323.
6. Truesdell, C. and Toupin, R. A. (1960), "The Classical Field Theories", *Handbuch der Physik*, vol III/1, Berlin-Gottingen-Heidelberg, Springer Verlag.
7. Toupin, R. A. (1962), "Elastic Materials with Couple Stresses", *Arch. Rational Mech. and Anal*, vol.11, pp. 385–414.
8. Mindlin, R. D. (1964), "Micro-structure in linear elasticity", *Arch. Rational Mech. Anal*, vol. 16, pp. 51–78.

9. Aero, E. L. and Kuvshinsky, E. V. (1964), "Continuum theory of asymmetric elasticity theory. Equilibrium of an isotropic body", *Solid State Physics*, vol. 6, no 9, pp. 2689–2699.
10. Palmov, V. A. (1964), "Basic equations of the theory of asymmetric elasticity", *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 28, no 3, pp. 401–408.
11. Kroner, E. (1967), "Elasticity Theory of Materials with Long Range Cohesive Forces", *International Journal of Solids and Structure*, vol. 3, pp. 731–743.
12. Kroner, E. (1966), "Dislocation field theory", *Theory of cristal defects*, New York.
13. Kunin, I. A. (1983), "Elastic Media with Microstructure", *Springer Verlag*, Berlin.
14. Eringen, A. C. and Edelen, D. G. B. (1972), "On Nonlocal Elasticity", *International Journal of Engineering Science*, vol. 10, pp. 233–248.
15. Faghidian, S. A. (2020), "Higher-order nonlocal gradient elasticity: a consistent variational theory", *International Journal of Engineering Science*, vol. 154, pp. 103337. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2020.103337.
16. Vasiliev, V. V. and Lurie, S. A. (2016), "On Correct Non-Local Generalized Elasticity Theories", *Physical Mesomechanics*, vol. 19, no 1, pp. 47–59.
17. Belov, P. A. and Lurie, S. A. (2021), "Development of the concept of "split anisotropy" in the theory of gradient anisotropic elasticity", *Mechanics of Composite Materials*, vol. 57, no 4, pp. 611–628. <https://doi.org/10.22364/mkm.57.4.01>.
18. Ereemeev, V. A. (2023), "On the ellipticity of the equilibrium equations of the gradient theory of elasticity and stability in the small", *Bulletin of St. Petersburg State University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, vol. 10 (68), no 1, pp. 99–108. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.109>.
19. Altan, B. S. and Aifantis, E. C. (1997), "On Some Aspects in the Special Theory of Gradient Elasticity", *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, vol. 8, no 3, pp. 231–282.
20. Vasiliev, V. V. and Lurie, S. A. (2015), "A continuous medium model with a microstructure", *Composites and Nanostructures*, vol. 7, no 1, pp. 2–10.
21. Vasiliev, V. V. and Lurie, S. A. (2015), "Generalized theory of elasticity", *News of the Russian Academy of Sciences. Solid state mechanics*, no 4, pp. 16–27.
22. Askes, H. and Aifantis, E. C. (2011), "Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, pp. 1962–1990.
23. Lomakin, E. V., Lurie, S. A., Rabinsky, L. N. and Solyaev Yu. O. (2018), "Semi-inverse solution of the pure bending problem of a beam in the gradient theory of elasticity: absence of scale effects", *Russian Academy of Sciences Reports*, vol. 479, no 4, pp. 390–394. DOI:10.7868/S0869565218100079.
24. Lomakin, E. V., Lurie, S. A., Rabinsky, L. N., Solyaev Yu. O. (2019), "On the refinement of the stress state in applied problems of elasticity theory due to gradient effects", *Russian Academy of Sciences Reports*, vol. 489, no 6, pp. 585–591. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524896585-591>.
25. Lurie, S. A. (2020), "On the Paradox of Anomalous Relative Flexural Stiffness of Ultra-Thin Bridges in the Gradient Theory of Elasticity", *News of the Russian Academy of Sciences. Solid State Mechanics*, no 3, pp. 48–57. DOI: 10.31857/S0572329920030095.
26. Gao, X. L., Park, S. K. (2007), "Variational formulation of simplifies strain gradient elasticity theory and its application to pressurized thick-walled cylinder problem", *Int. Journal of Solids and Structures*, vol. 44, pp. 7486–7499.

27. Collin, F., Caillerie, D., Chambon, R. (2009), "Analytical solution for the thick-walled cylinder problem modelled with an isotropic elastic second gradient constitutive equation", *Int. Journal of Solids and Structures*, vol. 46, pp. 3927–3937.
28. Korolenko, V. A. and Solyaev Yu. O. (2021), "Estimation of stress concentration levels near micro-sized holes based on simplified models of gradient elasticity theory", *Proceedings of the Moscow Aviation Institute*, no 121, pp. 1–39. DOI: 10.34759/trd-2021-121-04.
29. Mousavi, S. M. and Paavola, J. (2014), "Analysis of plate in second strain gradient elasticity", *Arch. Applied Mechanics*, vol. 84, pp. 1135–1143. DOI: 10.1007/s00419-014-0871-9.
30. Kulesh, M. A., Matveenko, V. P. and Shardakov, I. N. (2001), "Construction and analysis of an exact analytical solution to the Kirsch problem within the framework of the Kossara continuum and pseudo-continuum", *Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 42, no 4, pp. 145–154.
31. Eringen, A. C., Speziale, C. G. and Kim, B. S. (1972), "Crack Tip Problems in Nonlocal Elasticity", *J. Mechanics and Physics of Solids*, vol. 25, pp. 339–355.
32. Morozov, N. F. (1984), *Mathematical Issues of Crack Theory*, Nauka, Moscow, Russia, 256 p.
33. Lurie, S. A., Volkov-Bogorodsky, D. B. and Vasiliev, V. V. (2019), "A new approach to non-singular plane cracks theory in gradient elasticity", *Mathematical and computational applications*, vol. 24, no 4, pp. 24040093. DOI: 10.3390/mca24040093.
34. Lurie, S. A., Solyev, Yu., O., Rabinsky, L. N., Kondratova, Yu. N. and Volov, M. I. (2013), "Modeling the stress-strain state of thin composite coatings based on solving the plane problem of the layer gradient elasticity theory", *PNRPU Mechanics Bulletin*, no 1, pp. 161–181.
35. Karami, B., Janghorban, M. and Tounsi, A. (2018), "Nonlocal strain gradient 3D elasticity theory for anisotropic spherical nanoparticles", *Steel and composite structures*, vol. 27, no 2, pp. 201–216. DOI: 10.12989/scs.2018.27.2.201.
36. Arda, M. (2020), "Buckling analysis of intermediately supported nanobeams via strain gradient elasticity theory", *International Journal of Engineering and Applied Science*, vol. 12, no 4, pp. 163–172. DOI: 10.24107/ijeas.842499.
37. Kim, C.I. and Zeidi, M. (2018), "Gradient elasticity theory for fiber composites with fibers resistant to extension and flexure", *International Journal of Engineering Science*, vol. 131, pp. 80–99. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2018.06.002.
38. Ramezani, Sh. (2013), "Nonlinear vibration analysis of micro-plates based on strain gradient elasticity theory", *Nonlinear Dynamics*, vol. 73, no 3, pp. 1399–1421.
39. Uzun B., Civalek Ö. and Yayli M. Ö. (2023), "Analysis of longitudinal vibrations of a functionally graded nanorod under various clamping conditions based on non-local elasticity theory taking into account stiffness", *Physical Mesomechanics*, vol. 26, no 1, pp. 60–77. DOI: 10.55652/1683-805X\_2023\_26\_1\_60.
40. Erofeev, V. I. and Sheshenina, O. A. (2007), "Nonlinear longitudinal and shear stationary deformation waves in a gradient-elastic medium", *Mathematical Modeling of Systems and Processes*, no 15, pp. 15–27.
41. Vatulyan, A. O. and Yavruyan, O. V. (2022), "Fluctuations of a strip with delamination within the framework of the one-parameter Aifantis model of gradient elasticity theory", *PNRPU Mechanics Bulletin*, no 3, pp. 70–82. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.08.
42. Barulina, M. A., Golikov A. V., Pankratova, E. V. and Markelova, O. V. (2025), "Study of the effect of the inertial mass suspension structure of a glass micromechanical accelerometer on its characteristics", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(68), pp. 41–51. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-1-41-51.

43. Barulina, M., Kondratov, D., Galkina, S. and Markelova, O. (2022), "Analytical Solution for Bending and Free Vibrations of an Orthotropic Nanoplate based on the New Modified Couple Stress Theory and the Third-order Plate Theory", *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*, vol. 54(1), pp. 11–38. DOI:org/10.5614/j.math.fund.sci.2022.54.1.2.
44. Vatulyan, A. O., Nesterov, S. A. and Yurov, V. O. (2021), "Solution of the gradient thermoelasticity problem for a cylinder with a thermal coating", *Computational Continuum Mechanics*, vol. 14, no 3, pp. 253–263. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.3.21.
45. Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. (2021), "Solution of the gradient thermoelasticity problem for a coated strip", *Scientific Notes of Kazan University. Series "Physical and Mathematical Sciences"*, vol. 163, book 2, pp. 181–196. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196.
46. Belov, P. A. and Lurie, S. A. (2023), "Variational formulation of gradient irreversible thermodynamics", *PNRPU Mechanics Bulletin*, no 5, pp. 36–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.04.
47. Van P. (2020), "Thermodynamically consistent gradient elasticity with an internal variable", *Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 47, is. 1, pp. 1–17. DOI: <https://doi.org/10.2298/TAM200204006V>.
48. Lurie, S. A., Belov, P. A. and Ozherelkov, D. A. (2021), "Modeling of damage to the mechanical properties of materials in the generalized gradient theory of elasticity", *Elasticity and Inelasticity (Proceedings of the International Scientific Symposium on the Mechanics of Deformable Bodies)*, Moscow State University, pp. 270–276.
49. Solyaev, Yu. O., Lurie, S. A. and Volkov, A. V. (2017), "Numerical solution of the pure bending problem of a beam within the framework of the dilatational theory of elasticity", *Computational Continuum Mechanics*, vol. 10, no 2, pp. 137–152. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.12.
50. Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. (2023), "Scale-dependent electroelasticity model for a solid cylinder with a coating", *Vladikavkaz Mathematical Journal*, vol. 25, no 4, pp. 29–40. DOI 10.46698/q5632-5654-3734-n.
51. Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. (2023), "Gradient models of deformation of composite electroelastic bodies", *PNRPU Mechanics Bulletin*, no 5, pp. 5–16. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.01.
52. Aptukov, V. N., Skryabina, N. E. and Fruchart, D. (2025), "Analysis of elastic deformations induced by the hydride transformation in magnesium within the framework of the gradient theory of elasticity", *PNRPU Mechanics Bulletin*, no 3, pp. 19–28. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.3.02.
53. Lurie, S. A. and Solyaev, Yu. O. (2014), "A method for identifying the parameters of gradient models of heterogeneous structures using discrete-atomic modeling", *PNRPU Mechanics Bulletin*, no 3, pp. 89–112.
54. Lurie, S. A. and Solyaev, Yu. O. (2016), "Determination of the parameters of the gradient theory of elasticity using interatomic interaction potentials that take into account the modified Lorentz-Berthelot rule", *Physical Mesomechanics*, vol. 19 (3), pp. 39–46.
55. Vasiliev, V. V., Lurie, S. A. and Salov, V. A. (2018), "Study of the strength of cracked plates based on the maximum stress criterion in the scale-dependent generalized theory of elasticity", *Physical Mesomechanics*, vol. 21, no 4, pp. 5–12. DOI: 10.24411/1683-805X-2018-14001.
56. Askes, H. and Susmel, L. (2015), "Understanding cracked materials: is linear elastic fracture mechanics obsolete? ", *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 38, no 2, pp. 154–160. DOI: 10.1111/ffe.12183.

57. Lurie, S. A., Posypkin, M. A. and Solyaev, Yu. O. (2015), "A method for identifying scale parameters of the gradient theory of elasticity based on numerical experiments for flat composite structures", *International Journal of Open Information Technologies*, vol. 3, no 6, pp. 1–5.
58. Korolenko, V. A. and Solyaev, Yu. O. (2021), "Estimation of stress concentration levels near micro-sized holes based on simplified models of gradient elasticity theory", *Proceedings of the Moscow Aviation Institute*, no 121, pp. 1–39. DOI: 10.34759/trd-2021-121-04.

**Информация об авторах:**

В. Н. Аптуков – доктор технических наук, профессор, начальник центра фундаментальной математики физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета, почетный работник высшего профессионального образования РФ (614068, Россия, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), Author ID: (РИНЦ) 11997, ORCID: 0000-0001-8048-3804;

М. А. Барулина – доктор физико-математических наук, доцент, директор физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), Author ID (РИНЦ): 174006, ORCID: 0000-0003-3867-648X.

**Information about the authors:**

V. N. Aptukov – Doctor of Science (Technical), Professor, Head of the Fundamental Mathematics Center at the Physics and Mathematics Institute of Perm State National Research University, Honorary Worker of Higher Professional Education (15 Bukireva Street, Perm, Russia, 614068), AuthorID: 11997, ORCID: 0000-0001-8048-3804;

M. A. Barulina - Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Director of the Physics and Mathematics Institute at Perm State National Research University (15 Bukireva Street, Perm, Russia, 614068), Author ID: 174006, ORCID: 0000-0003-3867-648X.

Научная статья

УДК 531.717.53, 53.087.92

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-71-79

<https://elibrary.ru/zyobkk>



## Формирование оптического полимерного моста для волоконно-оптического датчика температуры

Мария Алексеевна Чеснокова<sup>1</sup>, Даниль Илдарович Нурмухаметов<sup>2</sup>, Роман Сергеевич Пономарев<sup>3</sup>, Татьяна Александровна Терехина<sup>4</sup>, Валерий Нагимович Аптуков<sup>5</sup>

<sup>1, 2, 3, 4, 5</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

<sup>1</sup>[mariachesnokova@psu.ru](mailto:mariachesnokova@psu.ru)

<sup>2</sup>[danur@psu.ru](mailto:danur@psu.ru)

<sup>3</sup>[rsponomarev@gmail.com](mailto:rsponomarev@gmail.com)

<sup>4</sup>[tat21042002@mail.ru](mailto:tat21042002@mail.ru)

<sup>5</sup>[aptukov@psu.ru](mailto:aptukov@psu.ru)

**Аннотация.** В работе представлен метод изготовления волоконно-оптического датчика температуры на основе торцевого интерферометра Фабри–Перо, выполненного в виде полимерного "моста", часть которого является чувствительным элементом датчика. Основным материалом для создания чувствительной части является УФ-отверждаемая смола, прозрачная для оптического и ближнего инфракрасного диапазона. Проверка работоспособности датчика проводилась с помощью оптического анализатора спектра. Пики и провалы, видимые на спектре отражения широкополосного источника излучения, свидетельствовали о правильной работе интерферометра Фабри–Перо, а их смещение при изменении температуры образца позволило измерить чувствительность предложенного типа датчика. В результате выполнения работы показано, что чувствительность разрабатываемого датчика выше, чем у существующих аналогов, а габариты позволяют применять его в задачах биомедицины и ответственных измерениях температуры.

**Ключевые слова:** датчик температуры; оптическое волокно; интерферометр Фабри–Перо; полимерный мост.

**Для цитирования:** Чеснокова М. А., Нурмухаметов Д. И., Пономарев Р. С., Терехина Т. А., Аптуков В. Н. Формирование оптического полимерного моста для волоконно-оптического датчика температуры // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 3(70). С. 71–79. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-71-79. <https://elibrary.ru/zyobkk>.

**Благодарности:** исследование выполнено за счет средств Государственного задания № FSNF-2024-0001.

Статья поступила в редакцию 30.04.2025; одобрена после рецензирования 24.08.2025; принята к публикации 27.09.2025.



© 2025 Чеснокова М. А., Нурмухаметов Д. И., Пономарев Р. С., Терехина Т. А., Аптуков В. Н. Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы ознакомиться с условиями этой лицензии, перейдите по ссылке <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Research article

## Formation of Optical Polymer Bridge for Fiber-Optic Temperature Sensor

Maria A. Chesnokova<sup>1</sup>, Danil I. Nurmukhametov<sup>2</sup>, Roman S. Ponomarev<sup>3</sup>,  
Tatyana A. Terekhina<sup>4</sup>, Valery N. Aptukov<sup>5</sup>

<sup>1, 2, 3, 4, 5</sup>Perm State University, Perm, Russia

<sup>1</sup>mariachesnokova@psu.ru

<sup>2</sup>danur@psu.ru

<sup>3</sup>rsponomarev@gmail.com

<sup>4</sup>tat21042002@mail.ru

<sup>5</sup>aptukov@psu.ru

**Abstract.** The paper presents a method of fabrication of a fiber-optic temperature sensor based on an end-face Fabry-Perot interferometer made in the form of a polymer “bridge”, a part of which is a sensitive element of the sensor. The main material for creation of the sensitive part is UV-curable resin, transparent for optical and near-infrared range. The performance of the sensor was tested using an optical spectrum analyzer. The peaks and dips visible on the reflection spectrum of the broadband radiation source indicated the correct operation of the Fabry-Perot interferometer, and their displacement when the sample temperature changes allowed to measure the sensitivity of the proposed type of sensor. As a result of this work it is shown that the sensitivity of the developed sensor is higher than that of existing analogs, and its dimensions allow its application in biomedical applications and critical temperature measurements.

**Keywords:** *temperature sensor; optical fiber; Fabry-Perot interferometer; polymer bridge.*

**For citation:** Chesnokova, M. A., Nurmukhametov, D. I., Ponomarev, R. S., Terekhina, T. A. and Aptukov, V. N. (2025), "Formation of Optical Polymer Bridge for Fiber-Optic Temperature Sensor", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(70), pp. 71–79, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-71-79, <https://elibrary.ru/zyobkk>.

**Acknowledgments:** the work was supported by the State Task No. FSNF-2024-0001.

*The article was submitted 30.04.2025; approved after reviewing 24.08.2025; accepted for publication 27.09.2025.*

### Введение

Среди различных типов волоконно-оптических сенсоров особое место занимают чувствительные элементы на базе интерферометра Фабри–Перо, так как они обладают рядом преимуществ перед аналогами: простота конструкции, компактность, высокая чувствительность и хорошая работоспособность при высоких температурах [1–3]. Эти характеристики делают данный тип интерферометра особенно привлекательным для создания датчиков температуры. Однако практическое применение таких устройств усложняется высокой стоимостью и специфичностью компонентов, необходимых для создания чувствительного элемента.

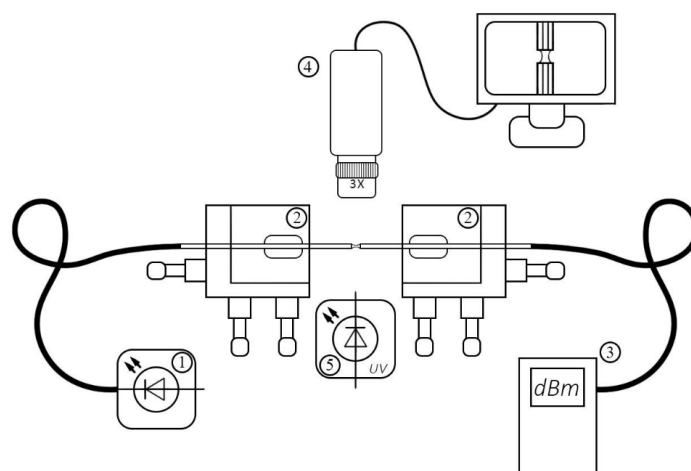
В качестве решения этой проблемы предлагается создавать интерферометр Фабри–Перо непосредственно на торце оптического волокна, используя доступный фотополимерный материал, который прозрачен в диапазоне длин волн 700–1600 нм.

### Формирование чувствительной части

В качестве материала для чувствительной части датчика температуры был использован фоточувствительный полимер, а именно оптический клей АС 545, который

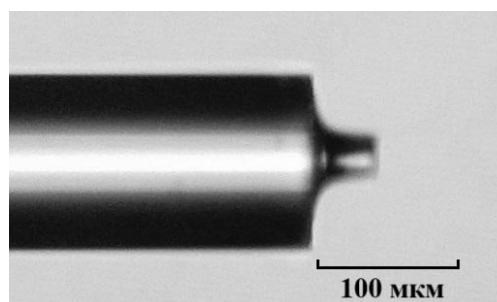


прозрачен для видимого света и ближнего инфракрасного диапазона (ИК-диапазона). Выбор данного полимера обоснован тем, что он чаще всего применяется в фотонике для соединения оптических компонентов. Процесс формирования заготовки основан на технике формирования полимерного "моста" между торцами двух оптических волокон [4]. Подготовленные волокна укладываются в микропозиционеры напротив друг друга (см. рис. 1) под микроскопом, далее при помощи измерителя оптической мощности проводится точная юстировка оптических волокон. Оптические волокна сводятся друг к другу торец в торец. После чего на торец одного из волокон наносится капля из фотополимерного материала.



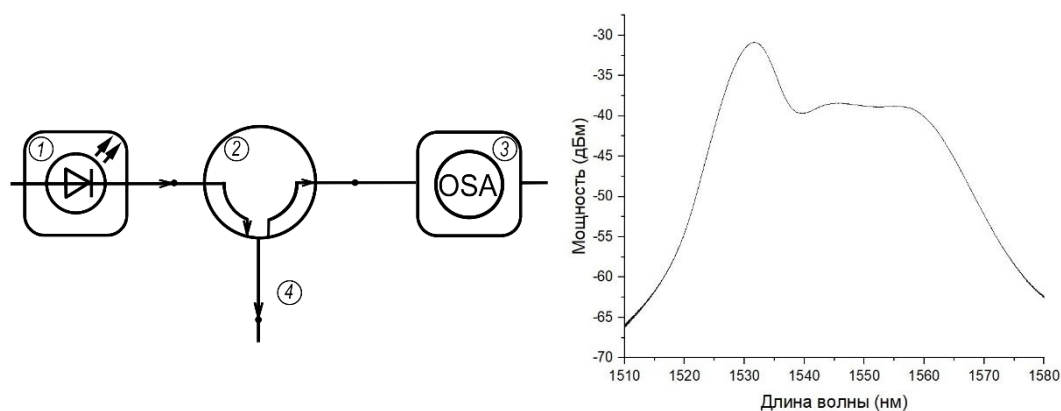
**Рис. 1.** Общая схема формирования чувствительного элемента:  
 1 – источник излучения (1550 нм), 2 – микропозиционеры с волокнами,  
 3 – измеритель оптической мощности, 4 – микроскоп, подключенный к компьютеру,  
 5 – источник УФ-излучения

За счет смачиваемости оптического волокна и сил поверхностного натяжения полимер располагается между торцами оптических волокон. Поочередно засвечивая ультрафиолетовым источником FUWO (FUV-6L) полимер и разводя волокна относительно друг друга по одной из осей, – формируется полимерный "мост". Управление скоростью и дистанцией между оптическими волокнами, длительностью и мощностью излучения на каждом этапе позволяет контролировать длину, толщину и форму получаемой структуры. Скол полученного полимерного "моста" вблизи из одного из торцов обеспечивает формирование "столбика" с прямым торцом. Таким образом, две границы раздела сред: оптическое волокно – полимер и полимер – воздух в совокупности формируют интерферометр Фабри–Перо на торце волокна (см. рис. 2).



**Рис. 2.** Микрофотография датчика чувствительного элемента, сформированного из полимера на основе оптического клея AC 545

Работоспособность датчика оценивалась при помощи собранной установки (см. рис. 3а) для получения спектра отражения от сформированной структуры из полимера. Спектр излучения суперлюминесцентного волоконного источника (1510–1580 нм с выходной мощностью до 4 мВт) приведен на рис. 3б.



а)

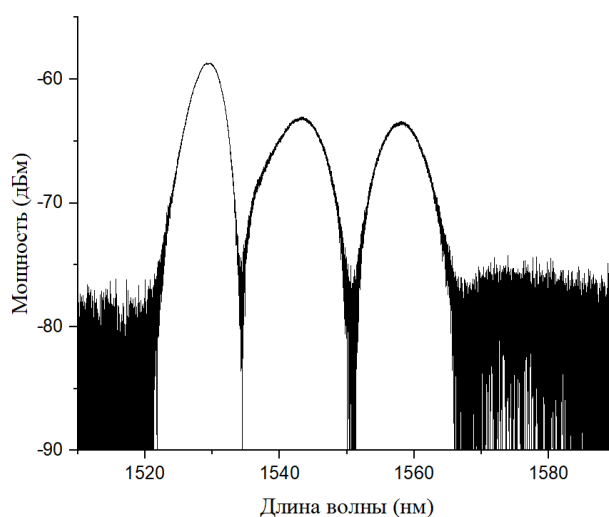
б)

**Рис. 3.** а) Принципиальная схема измерения:

1 – суперлюминесцентный волоконный источник, 2 – циркулятор,  
3 – оптический анализатор спектра, 4 – чувствительный элемент;

б) спектр источника излучения

Полученный спектр представлен на рис. 4 при температуре  $t = 25^\circ\text{C}$ , параметры чувствительного элемента полимерного "столбика": диаметр – 32 мкм, длина – 51,2 мкм, материал – оптический клей АС 545.



**Рис. 4.** Спектр чувствительного элемента из оптический клей АС 545  
(диаметр – 32 мкм, длина – 51,2 мкм) при температуре  $25^\circ\text{C}$

Огибающая спектра, представленного на рис. 4, повторяет форму спектра излучения источника, что говорит о достоверности полученных данных. Провалы на спектре объясняются возникновением интерференции: любое минимальное воздействие на интерферометр изменяет длину оптического пути, то есть расстояние между плечами, в

результате чего на интерферограмме изменяется расстояние между соседними максимумами (область свободной дисперсии, FSR):

$$\text{FSR} = \frac{\lambda^2}{\Delta L},$$

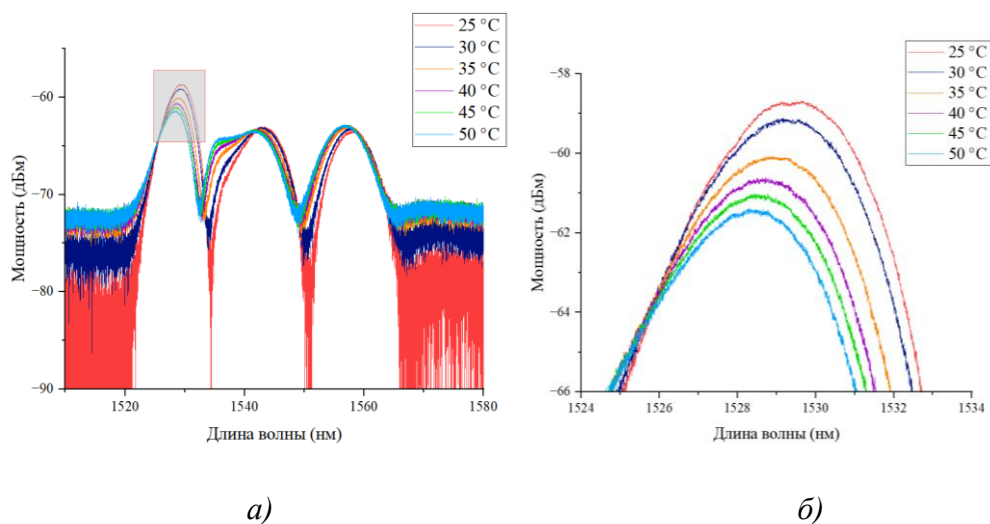
где  $\lambda$  – длина волны,  $\Delta L$  – длина чувствительной части датчика.

Для подтверждения того, что интерференция происходит именно в чувствительной части датчика, были рассчитаны FSR для оптического волокна ( $\text{FSR}_{\text{опт}} = 0,26$  мкм) и FSR для "столбика" ( $\text{FSR}_{\text{столб}} = 0,0457$  мкм).

### Температурные испытания

Датчик размещался внутри климатической камеры 60/150-80 KTX, температура внутри климатической камеры линейно изменялась от 30 до 50 °C с шагом в 5 °C с выдержкой на каждой ступени в 5 мин при скорости нагрева 4 °C/мин.

Согласно теории оптоволоконных интерферометров Фабри–Перо [5], при изменении температуры форма спектра отражения сохраняется, а сам спектр смещается по длине волны. Полученные экспериментальные данные позволяют с высокой точностью определить смещение спектра отражения, а, следовательно, и действующую на чувствительный элемент температуру (см. рис. 5).



**Рис. 5.** Спектр а) датчика температуры на основе оптического клея АС 545; б) фрагмент спектра для различных значений температуры

Смещение спектра (пикового значения) при изменении внешней температуры (рис. 5б) позволяет использовать предложенный чувствительный элемент в качестве датчика температуры. Чувствительность изготовленного датчика составила ~44 пм/°C. В работе [6] предложен метод изготовления аналогичного Фабри–Перо на торце оптического волокна из боросиликатного стекла, результаты экспериментальных исследований образцов интерферометров показали, что они демонстрируют близкую температурную чувствительность спектральных откликов, которая составила 42 пм/°C и 37 пм/°C. Однако повторяемость геометрии датчиков при использовании существующих технологий изготовления затруднительна. Аналогичный датчик был разработан учеными из Китая [7], в качестве материала для формирования чувствительной части был использован фотополимерный материал с примесями полидиметилсилоксана (ПДМС). Данный датчик

работает в диапазоне длин волн 1500–1600 нм и имеет чувствительность -1,18 нм/°С при 20–110 °С.

### Одномерная модель деформации и отверждения оптического волокна

Рассмотрим модель отверждения материала капли/стержня путем перехода из жидкого состояния в твердое с изменением механических характеристик, а также усадки, связанной со структурными изменениями.

Скорость полной деформации "столбика"  $\dot{\varepsilon}$  является суммой скоростей упругой  $\dot{\varepsilon}^e$  и вязкой  $\dot{\varepsilon}^v$  деформации, а также деформации усадки  $\dot{\varepsilon}^f$ . Предполагаем, что деформация усадки является функцией полученной дозы УФ-облучения  $\varepsilon^f = F(D)$ ,  $D = \int (W(t)/S) dt$ ,  $W(t)$  – переменная мощность источника УФ;  $S$  – площадь воздействия светодиода.

Процесс деформации и отверждения описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + \sigma/\mu + (\partial F/\partial D)\dot{D}(t), \quad \dot{D}(t) = W(t)/S \quad (1)$$

где  $\sigma$  – нормальное напряжение в стержне;  $E$  – модуль упругости;  $\mu$  – коэффициент вязкости.

В уравнениях (1) механические характеристики являются заданными функциями полученной дозы облучения,  $E = E(D)$ ,  $\mu = \mu(D)$ . Доза облучения  $D$  определяется мощностью  $W(t)$ , а в итоге все неизвестные функции являются функциями времени. Управляя процессом полимеризации (при некоторых технических ограничениях – мощность излучения, скорость растяжения стержня и т. д.) можно реализовать различное напряженно-деформированное состояние стержня и его геометрию. Основными параметрами управления является скорость изменения полной деформации  $\dot{\varepsilon} = \Psi(t)$  от времени, а также переменная мощность облучения  $W(t)$ .

### Анализ режимов процесса отверждения при постоянном напряжении

На практике представляют интерес режимы управления процессом  $\Psi(t)$  и  $W(t)$ , при которых деформация и отверждение стержня протекает при небольшом постоянном напряжении  $\sigma_1$ , что позволяет получить тонкий и длинный датчик для измерения температуры в локальной области в труднодоступном месте. В противном случае рост напряжения может привести к преждевременному разрушению чувствительной части датчика. Условие постоянства напряжения имеет вид

$$\sigma_1/\mu(D) = \Psi(t) - (\partial F/\partial D)\dot{D}(t), \quad (2)$$

а наиболее простым вариантом управления процессом является выбор определенного режима скорости деформации при фиксированной мощности облучения.

Для его поиска необходимо конкретизировать зависимости деформации усадки, коэффициента вязкости и модуля упругости от полученной дозы облучения  $D$ . Примем эти зависимости в одинаковой нелинейной форме:

$$\varepsilon^f = F(D) = \varepsilon_1^f (1 - e^{-\gamma D}), \quad \mu = \mu(D) = \mu_1 (1 - e^{-\beta D}), \quad (3)$$

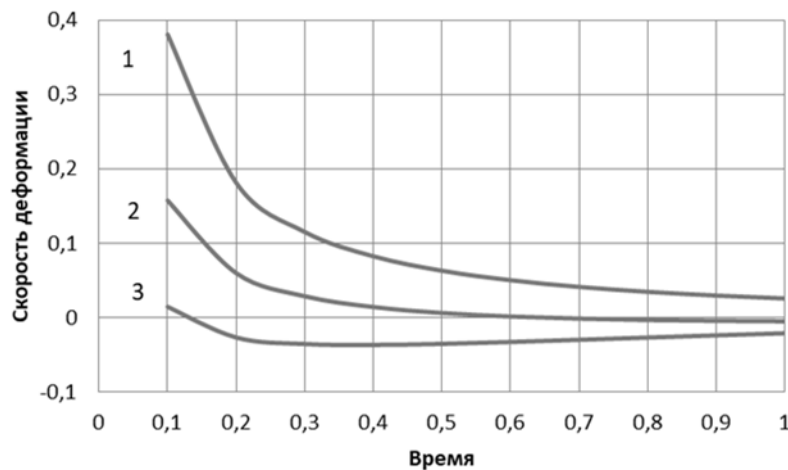
где  $\varepsilon_1^f$  – максимальная деформация усадки твердого материала;  $\gamma$  – коэффициент, характеризующий скорость изменения деформации усадки;  $\mu_1$  – коэффициент вязкости

твердой капли,  $\beta$  – коэффициент, характеризующий скорость изменения коэффициента вязкости.

Пусть мощность облучения постоянна:  $\dot{D}(t) = \frac{W(t)}{S} = V_D$ , тогда  $D = V_D t$ , а для выполнения условия (2) необходимо задать скорость полной деформации в виде

$$\Psi(t) = \sigma_1 / [\mu_1 (1 - e^{-\beta V_D t})] + \varepsilon_1^f \gamma V_D e^{-\gamma V_D t}, \quad (4)$$

На рисунке 6 показаны требуемые скорости деформирования стержня (4) при различных мощностях облучения:  $V_D = 0,5$  (кривая 1);  $1,0$  (кривая 2);  $2,0$  (кривая 3). В расчете использовались следующие постоянные:  $\sigma_1 / \mu_1 = 0,01$ ;  $\beta = 0,5$ ;  $\gamma = 0,5$ ;  $\varepsilon_1^f = -0,1$ .



**Рис. 6.** Временная зависимость скорости деформации, требуемая для поддержания постоянного напряжения при 0,5 (кривая 1); 1,0 (кривая 2); 2,0 (кривая 3)

Из рисунка 6 следует, что при постоянной мощности излучения для поддержания фиксированного уровня напряжения скорость растяжения стержня должна уменьшаться с течением времени. Средний уровень скорости деформации тем меньше, чем больше мощность излучения. Таким образом, при меньших уровнях мощности облучения и выполнении требования (4) для сохранения постоянного напряжения, можно достичь более значительного уровня деформации (перемещения). Это важный для практики вывод, поскольку такой режим позволяет получить более длинный и тонкий цилиндр ("столбик").

### Заключение

В результате исследования была разработана технология формирования температурного датчика, чувствительный элемент которого представляет собой торцевой интерферометр Фабри–Перо из полимерной УФ-отверждаемой, прозрачной для ближнего ИК-диапазона смолы. Испытания показали, что с ростом температуры происходит сдвиг начального спектра, которое можно объяснить изменением длины интерферометра и показателя преломления полимера. Также была определена чувствительность исследуемого датчика, которая составляет  $\sim 44$  пм/°С и превышает чувствительность классических волоконно-оптических датчиков ( $\sim 11$  пм/°С), чувствительный элемент которых базируется на кварцевом стекле. Кроме того, была разработана одномерная модель деформации и отверждения оптического волокна, с помощью которой получены режимы процессов

отверждения, при которых напряжение не возрастает, что позволяет получить более длинный и тонкий "столбик" (датчик).

#### Список источников

1. Yang M., Peng J., Wang G., Dai J. Fiber Optic Sensors Based on Nano-Films. In Fiber Optic Sensors // Smart Sensors, Measurement and Instrumentation; Springer International Publishing: Cham, 2017. Vol. 21. P. 1–30. ISBN 978-3-319-42624-2. DOI: 10.1007/978-3-319-42625-9\_1. EDN: YINRLW.
2. Chen Z., Xiong S., Gao S., Zhang H., Wan L., Huang X., Huang B., Feng Y., Liu W., Li Z. High-Temperature Sensor Based on Fabry-Perot Interferometer in Microfiber Tip // Sensors. 2018. Vol. 18. 202. DOI: 10.3390/s18010202.
3. Li J., Jia P., Fang G., Wang J., Qian J., Ren Q., Xiong J. Batch-Produced All-Silica Fiber-Optic Fabry-Perot Pressure Sensor for High-Temperature Applications up to 800 °C // Sensors and Actuators A: Physical. 2022. Vol. 334. P. 113363. DOI: 10.1016/j.sna.2022.113363. EDN: KGXSGH.
4. Mohammed P. A., Wadsworth W. J. Long Free Standing Polymer Waveguides Fabricated Between Single-Mode Optical Fiber Cores // J. Light wave Technol. JLT. 2015. Vol. 33. P. 4384–4389. DOI: 10.1109/JLT.2015.2471810. EDN: VFFPNZ.
5. Hussein S. M. R. H.; Sakhabutdinov A. Zh., Morozov O. G., Anfinogentov, V. I., Tunakova J. A.; Shagidullin A. R., Kuznetsov A. A., Lipatnikov K. A., Nasybullin A. R. Applicability Limits of the End Face Fiber-Optic Gas Concentration Sensor, Based on Fabry-Perot Interferometer // Karbala International Journal of Modern Science. 2022. Vol. 8. P. 339–355. DOI: 10.33640/2405-609X.3243. EDN: WVHXFE.
6. Хуссейн С. М., Каид М., Альхуссейн А. Н., Аглиуллин Т. А., Самигуллин Д. В., Валеев Б. И., Сахабутдинова Л. А. Цельностеклянный волоконно-оптический торцевой микротермометр // International Research Journal. 2023. №11 (137). С. 1–8. DOI: 10.23670/IRJ.2023.137.42. EDN: UDAMDG.
7. Liu Z., Zhao B., Zhang Y., Zhang Y., Sha Ch., Yang J., Yuan L. Optical fiber temperature sensor based on Fabry-Perot interferometer with photopolymer material // Sensors and Actuators A: Physical. 2022. November. Vol. 347. P. 113894. DOI: 10.1016/j.sna.2022.113894. EDN: ARPILX.

#### References

1. Yang, M. et al. (2017), "Fiber optic sensors based on nano-films", *Smart Sensors, Measurement and Instrumentation*, pp. 1–30. doi:10.1007/978-3-319-42625-9\_1.
2. Chen, Z. et al. (2018), "High-temperature sensor based on Fabry-Perot interferometer in micro-fiber tip", *Sensors*, 18(1), p. 202. doi:10.3390/s18010202.
3. Li, J. et al. (2022), "Batch-produced all-silica fiber-optic Fabry-Perot pressure sensor for high-temperature applications up to 800 °C", *Sensors and Actuators A: Physical*, 334, p. 113363. doi:10.1016/j.sna.2022.113363.
4. Mohammed, P. A. and Wadsworth, W. J. (2015), "Long free-standing polymer waveguides fabricated between single-mode optical fiber cores", *Journal of Lightwave Technology*, 33(20), pp. 4384–4389. doi:10.1109/jlt.2015.2471810.
5. Hussein, S. M. R. H. et al. (2022), "Applicability limits of the end face fiber-optic gas concentration sensor, based on Fabry-Perot Interferometer", *Karbala International Journal of Modern Science*, 8(3), pp. 339–355. doi:10.33640/2405-609x.3243.
6. Hussein, S. M. et al. (2023), "All-glass fiber-optic end face microthermometer", *International Research Journal*, 11(137), pp. 1–8, doi: 10.23670/IRJ.2023.137.42.
7. Liu, Z. et al. (2022), "Optical fiber temperature sensor based on Fabry-Perot interferometer with photopolymer material", *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 347, p.113894. doi:https://doi.org/10.1016/j.sna.2022.113894.

**Информация об авторах:**

М. А. Чеснокова – аспирант, инженер-исследователь "Молодежной лаборатории интегральной фотоники" Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15);

Д. И. Нурмухаметов – аспирант, младший научный сотрудник, "Молодежной лаборатории интегральной фотоники" Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), ORCID: 0009-0000-5485-7286;

Р. С. Пономарев – кандидат физико-математических наук, заведующий молодежной лабораторией интегральной фотоники Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), Researcher ID: A-7105-2014, ORCID: 0000-0001-9729-628X, CoLab ID: R-3AABE-130F0-LP67Z;

Т. А. Терехина – специалист в области механики и математики, аналитик данных, эксперт ПАО Сбербанк (614016, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Куйбышева, д. 66/1);

В. Н. Аптиков – доктор технических наук, профессор, начальник центра фундаментальной математики физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета, почетный работник высшего профессионального образования РФ (614068, Россия, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), Author ID: (РИНЦ) 11997, ORCID: 0000-0001-8048-3804.

**Information about the authors:**

M. A. Chesnokova – Postgraduate Student, Research Engineer at the Youth Laboratory of Integrated Photonics of Perm State National Research University (15 Bukireva Street, Perm, Russia, 614068);

D. I. Nurmukhametov – Postgraduate Student, Junior Research Assistant at the Youth Laboratory of Integrated Photonics of Perm State National Research University (15 Bukireva Street, Perm, Russia, 614068), ORCID: 0009-0000-5485-7286;

R. S. Ponomarev – Candidate of Science (Physic and Mathematic), Head of the Youth Laboratory of Integrated Photonics of Perm State National Research University (15 Bukireva Street, Perm, Russia, 614068), Researcher ID: A-7105-2014, ORCID: 0000-0001-9729-628X, CoLab ID: R-3AABE-130F0-LP67Z;

T. A. Terekhina – Specialist in Mechanics and Mathematics, Data Analyst, Expert, Sberbank PJSC (66/1 Kuibysheva Street, Perm, Russia, 614016);

V. N. Aptukov – Doctor of Science (Technical), Professor, Head of the Fundamental Mathematics Center at the Physics and Mathematics Institute of Perm State National Research University, Honorary Worker of Higher Professional Education (15 Bukireva Street, Perm, Russia, 614068), AuthorID: 11997, ORCID: 0000-0001-8048-3804.

## КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

Научная статья

УДК 519.633

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-80-101

<https://elibrary.ru/exv1vj>**Высокоточная компактная локально-одномерная  
консервативная сплайн-схема для двумерного уравнения  
диффузии в квазилинейной постановке****Алексей Юрьевич Рахманов<sup>1</sup>, Сергей Владимирович Русаков<sup>2</sup>**<sup>1, 2</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия<sup>1</sup>[alx.rakhmanov@gmail.com](mailto:alx.rakhmanov@gmail.com)<sup>2</sup>[rusakov@psu.ru](mailto:rusakov@psu.ru)

**Аннотация.** Представлен численный метод решения смешанной начально-краевой задачи для двумерного уравнения диффузии в случае квазилинейного коэффициента диффузии, при наличии линейного источника, обеспечивающий четвертый порядок пространственной аппроксимации. Рассматривается алгоритм построения операторов разностной схемы на компактном шаблоне с помощью последовательного покоординатного применения сплайн-интерполяции. Приведен теоретический расчет порядка аппроксимации, обеспечиваемого рассматриваемой разностной схемой, а также найдено условие, при котором схема устойчива. Представлены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающих теоретически найденное значение для порядка аппроксимации.

**Ключевые слова:** численные методы; вычислительная математика; сплайн; сплайн-интерполяция; двумерное параболическое дифференциальное уравнение; кубический сплайн; разностная схема; компактный шаблон разностной схемы.

**Для цитирования:** Рахманов А. Ю., Русаков С. В. Высокоточная компактная локально-одномерная консервативная сплайн-схема для двумерного уравнения диффузии в квазилинейной постановке // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 3(70). С. 80–101. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-80-101. <https://elibrary.ru/exv1vj>.

Статья поступила в редакцию 07.08.2025; одобрена после рецензирования 10.09.2025; принята к публикации 29.09.2025.



© 2025 Рахманов А. Ю., Русаков С. В. Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, перейдите по ссылке <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



## COMPUTER SCIENCE

Research article

### A High-Precision Compact Locally One-Dimensional Conservative Spline Scheme for a Two-Dimensional Diffusion Equation in a Quasi-linear Formulation

Alexey Yu. Rakhmanov, Sergey V. Rusakov

<sup>1, 2</sup>Perm State University, Perm, Russia

<sup>1</sup>alx.rakhmanov@gmail.com

<sup>2</sup>rusakov@psu.ru

**Abstract.** This article presents a method of numerical integration of a mixed initial-boundary value problem for two-dimensional second-order parabolic quasilinear diffusion equation with quasilinear diffusion coefficient and linear external source, that provides a 4th order spatial approximation. We consider an algorithm for constructing the operators of a difference scheme on a compact template using sequential coordinate-wise application of spline interpolation. The theoretical calculation of the approximation order provided by the considered difference scheme is given, and the condition under which the scheme is stable is found. The results of computational experiments confirming the theoretically found value for the approximation order are presented.

**Keywords:** *numerical methods; computational mathematics; spline; spline interpolation; two-dimensional parabolic differential equation; cubic spline; finite difference scheme; FDM; compact finite difference.*

**For citation:** Rakhmanov, A. Yu. and Rusakov S. V. (2025), "A High-Precision Compact Locally One-Dimensional Conservative Spline Scheme for a Two-Dimensional Diffusion Equation in a Quasi-linear Formulation", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(70), pp. 80–101, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-80-101, <https://elibrary.ru/exvlyvj>.

*The article was submitted 07.08.2025; approved after reviewing 10.09.2025; accepted for publication 29.09.2025.*

#### Введение

С целью численного решения начально-краевых задач для многомерных параболических дифференциальных уравнений и их систем в рамках метода конечных разностей наиболее часто применяются методы построения аддитивных разностных схем. Среди таких схем выделяют: факторизованные схемы, разностный оператор, содержащий пространственные производные которых представим в виде произведения разностных операторов меньшей пространственной мерности; схемы расщепления по физическим процессам, при построении которых различные этапы построения схемы соответствуют различным по своей физической природе аспектам описываемого процесса, к которым, например, относится схема широко применяемого метода крупных частиц, разработанного О.М. Белоцерковским и его научной школой; схемы расщепления по пространственным переменным, при которых разностный оператор схемы строится с помощью разностных операторов по отдельным пространственным координатам, также известные как локально-одномерные схемы (Locally One-Dimensional, LOD) [1, 2].

Вопросу разработки эффективных аддитивных локально-одномерных схем, в том числе схем переменных направлений (Alternating Direction Implicit, ADI), посвящено большое количество как фундаментальных, так и современных работ [3–16]. С точки зрения получения схем повышенной точности представляют интерес локально-одномерные

схемы, реализующие сплайн-интерполяцию совместно с методом расщепления по координатам. Так, например, в работах [17, 18] на этапе построения одномерных разностных операторов при реализации схем расщепления применяются сплайн-интерполяции, обеспечивающие повышенный порядок аппроксимации. В работе [19] численное приближение для двумерной задачи строится с помощью двумерного сплайна, представляющего линейную комбинацию одномерных В-сплайнов по отдельным пространственным переменным.

При моделировании многих физико-химических процессов возникают зоны высоких градиентов, что приводит к необходимости использования сеток высокой детализации, либо применения неравномерных сеток [20–23]. В частности, при моделировании процесса, описанного в работе [24], зона высоких градиентов для искомой функции возникает вблизи одной из границ расчетной области. Применение компактных разностных схем повышенного порядка аппроксимации позволяет снизить требования к детализации сетки. Двумерный вариант постановки из работы [24] является модельной задачей для апробации численного метода, представленного в данной статье.

В данной работе представлен метод численного интегрирования смешанной начально-краевой задачи для двумерного дифференциального уравнения параболического типа с помощью компактной мультиоператорной [25] разностной схемы, обладающей четвертым порядком пространственной аппроксимации. Метод является модификацией представленного ранее метода [26] для двумерного случая с периодическими граничными условиями по оси  $y$ , и основывается на построении разностных операторов с помощью значений, полученных путем последовательного применения кубического интерполяционного сплайна по отдельным пространственным координатами. Разностная схема строится, исходя из законов сохранения, сформулированных для каждой ячейки сеточного шаблона, и относится к классу аддитивных схем переменных направлений. Построение локально-одномерных разностных операторов путем интерполяции с помощью кубического сплайна класса  $C^2$  [27, 28], который строится для первообразной от искомой функции рассматриваемого уравнения, позволяет сформулировать компактную разностную схему высокой пространственной точности, обладающую свойством консервативности, базовыми величинами которой вместо значений функции в точке являются ее интегральные средние на контрольных объемах разностной сетки.

## 1. Математическая постановка задачи и численный метод

Рассмотрим смешанную начально-краевую задачу для двумерного параболического дифференциального уравнения, соответствующего уравнению диффузии при наличии источника в области  $G_u = \{(x, y, t) : x_0 \leq x \leq x_L, y_0 \leq y \leq y_L, 0 \leq t \leq T\}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla \cdot (D(u) \nabla u) + K(x, y, t)u, D(u) > 0, K(x, y, t) \leq 0, u(x, y, 0) = u^0(x, y), \\ \frac{\partial u(x_0, y, t)}{\partial x} &= 0, D(u(x_L, y, t)) \frac{\partial u(x_L, y, t)}{\partial x} = -\alpha_1(t)u(x_L, y, t), x \in [x_0; x_L], \\ u(x, y_0, t) &= u(x, y_L, t), \frac{\partial u(x, y_0, t)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, y_L, t)}{\partial y}, y \in [y_0; y_L]. \end{aligned} \quad (1)$$

При этом,  $D(u)$  – монотонная функция при  $(x, y, t) \in G_u$  по условию задачи.

Основная идея численного метода заключается в первоначальном нахождении вспомогательных аппроксимаций с помощью одномерного интерполяционного сплайна, приближающего в среднем, путем последовательной интерполяции вдоль различных

пространственных координат. Далее с помощью найденных аппроксимаций вычисляются разностные операторы, действующие в пространстве сеточных функций с двумя пространственными переменными, необходимые для численного интегрирования задачи (1). Будем проводить построение конечно-разностной схемы на сетке

$$\Omega_{h_x, h_y, \tau} = \{t_k, 0 \leq k \leq K, t_0 = 0, t_K = T\} \times \omega_x \times \omega_y,$$

где  $\omega_x = \{x_i = ih_x, i = \overline{0, N_x}, h_x = \frac{x_L}{N_x}\}$ ,  $\omega_y = \{y_j = jh_y, j = \overline{0, N_y}, h_y = \frac{y_L}{N_y}\}$ .

Проинтегрируем основное уравнение в (1) по контрольному объему  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$  для  $i = \overline{0, N_x - 1}, j = \overline{0, N_y - 1}$ , получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i+1/2, j+1/2}^{(n)}}{\partial t} = & \frac{1}{h_x h_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} (D(u(x_{i+1}, y, t)) \frac{\partial u(x_{i+1}, y, t)}{\partial x} - D(u(x_i, y, t)) \frac{\partial u(x_i, y, t)}{\partial x}) dy + \\ & + \frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (D(u(x, y_{j+1}, t)) \frac{\partial u(x, y_{j+1}, t)}{\partial y} - D(u(x, y_j, t)) \frac{\partial u(x, y_j, t)}{\partial y}) dx + \\ & + \frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} K(x, y, t) u(x, y, t) dx dy; u_{i,j} = u(x_i, y_j, t), i = \overline{0, N_x - 1}, j = \overline{0, N_y - 1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для преобразования задачи (2) к конечно-разностной постановке определим следующие разностные операторы:

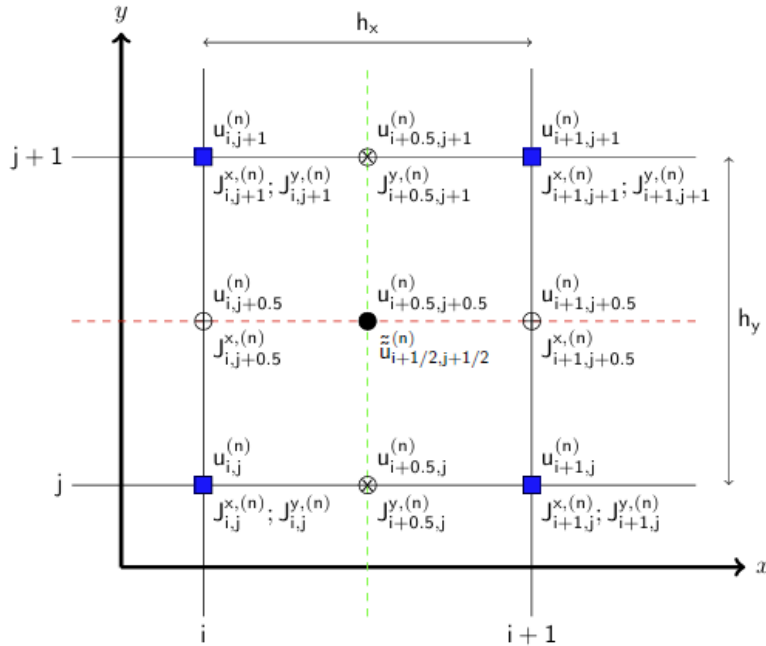
$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{(n)} & \cong \frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x, y, t_n) dx dy + O(h_x^4 + h_y^4), \\ u_{i,j}^{(n)} & \cong u(x_i, y_j, t_n) + O(h_x^4 + h_y^4), \\ \tilde{u}_{i, j+\frac{1}{2}}^{(n)} & \cong \frac{1}{h_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x_i, y, t_n) dy + O(h_x^4 + h_y^4), \\ \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}, j}^{(n)} & \cong \frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y_j, t_n) dx + O(h_y^4), \\ u_{i+0.5, j+0.5}^{(n)} & \cong u(x_i + 0.5h_x, y_j + 0.5h_y, t_n) + O(h_x^4 + h_y^4), \\ J_{i,j}^{x,(n)} & \cong \frac{\partial u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x} + O(h_x^4 + h_y^4), J_{i,j}^{y,(n)} \cong \frac{\partial u(x_i, y_j, t_n)}{\partial y} + O(h_x^4 + h_y^4), \\ \tilde{J}_{i, j+\frac{1}{2}}^{x,(n)} & \cong \frac{1}{h_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial u(x_i, y, t_n)}{\partial x} dy + O(h_x^4 + h_y^4), \\ \tilde{J}_{i+\frac{1}{2}, j}^{y,(n)} & \cong \frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u(x, y_j, t_n)}{\partial y} dx + O(h_x^4 + h_y^4), \\ J_{i+0.5, j}^{y,(n)} & \cong \frac{\partial u(x_i + 0.5h_x, y_j, t_n)}{\partial y} + O(h_x^4 + h_y^4), \\ J_{i, j+0.5}^{x,(n)} & \cong \frac{\partial u(x_i, y_j + 0.5h_y, t_n)}{\partial x} + O(h_x^4 + h_y^4), \\ u_{i+0.5, j}^{(n)} & \cong u(x_i + 0.5h_x, y_j, t_n) + O(h_x^4 + h_y^4), \\ u_{i, j+0.5}^{(n)} & \cong u(x_i, y_j + 0.5h_y, t_n) + O(h_x^4 + h_y^4). \end{aligned} \quad (3)$$

В данном случае рассматриваются начальные условия, заданные для интегральных сред-

них  $u_{i+1/2, j+1/2}^{(n)}$ .

С помощью операторов (3) построим аппроксимации для слагаемых в правой части основного уравнения (2) с помощью формулы численного интегрирования Симпсона при  $t = t_n$ , и получим его конечно-разностный аналог (рис. 1):

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{u}_{i+1/2,j+1/2}^{(n+1)} - \tilde{u}_{i+1/2,j+1/2}^{(n)}}{\tau} = & \frac{1}{6h_x} [(D(u_{i+1,j}^{(n)})J_{i+1,j}^{x,(n)} - D(u_{i,j}^{(n)})J_{i,j}^{x,(n)}) + \\
 & + 4(D(u_{i+1,j+0.5}^{(n)})J_{i+1,j+0.5}^{x,(n)} - D(u_{i,j+0.5}^{(n)})J_{i,j+0.5}^{x,(n)}) + (D(u_{i+1,j+1}^{(n)})J_{i+1,j+1}^{x,(n)} \\
 & - D(u_{i,j+1}^{(n)})J_{i,j+1}^{x,(n)})] + \\
 & + \frac{1}{6h_y} [(D(u_{i,j+1}^{(n)})J_{i,j+1}^{y,(n)} - D(u_{i,j}^{(n)})J_{i,j}^{y,(n)}) + \\
 & + 4(D(u_{i+0.5,j+1}^{(n)})J_{i+0.5,j+1}^{y,(n)} - D(u_{i+0.5,j}^{(n)})J_{i+0.5,j}^{y,(n)}) + (D(u_{i+1,j+1}^{(n)})J_{i+1,j+1}^{y,(n)} \\
 & - D(u_{i+1,j}^{(n)})J_{i+1,j}^{y,(n)})] + \\
 & + \frac{1}{36} [K(x_i, y_j, t_n)u_{i,j}^{(n)} + K(x_i, y_{j+1}, t_n)u_{i,j+1}^{(n)} + K(x_{i+1}, y_j, t_n)u_{i+1,j}^{(n)} \\
 & + K(x_{i+1}, y_{j+1}, t_n)u_{i+1,j+1}^{(n)} \\
 & + 4(K(x_i + \Delta x/2, y_j, t_n)u_{i+0.5,j}^{(n)} + K(x_i + \Delta x/2, y_{j+1}, t_n)u_{i+0.5,j+1}^{(n)} + \\
 & + K(x_i, y_j + \Delta y/2, t_n)u_{i,j+0.5}^{(n)} + K(x_{i+1}, y_j + \Delta y/2, t_n)u_{i+1,j+0.5}^{(n)} \\
 & + 16K(x_i + \Delta x/2, y_j + \Delta y/2, t_n)u_{i+0.5,j+0.5}^{(n)}]; \\
 \tilde{u}_{i+1/2,j+1/2}^{(0)} = & \frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x, y, 0) dy dx, \\
 J_{0,j}^{x,(n)} = 0, D(u_{N_x,j}^{(n)})J_{N_x,j}^{x,(n)} = & -\alpha_1(t)u_{N_x,j}^{(n)}, \\
 \tilde{u}_{i+1/2,1/2}^{(n)} = \tilde{u}_{i+1/2,N_y+1/2}^{(n)}, \tilde{u}_{i+1/2,0}^{(n)} = \tilde{u}_{i+1/2,N_y}^{(n)}, \tilde{J}_{i+1/2,0}^{y,(n)} = \tilde{J}_{i+1/2,N_y}^{y,(n)}, u_{i,1/2}^{(n)} = & u_{i,N_y+1/2}^{(n)}, u_{i,0}^{(n)} = u_{i,N_y}^{(n)}, J_{i,0}^{y,(n)} = J_{i,N_y}^{y,(n)}.
 \end{aligned} \tag{4}$$



**Рис. 1.** Аппроксимаций значений функции  $u(x, y, t)$  и ее частных пространственных производных целых и полуцелых узлах расчетной сетки для временного шага  $t = t_n$

Опишем алгоритм получения значений разностных операторов (3), необходимых для разностной схемы (4).

Для последовательной интерполяции вдоль пространственных координат будем использовать сплайн  $S_{3,1}$  класса  $C^2$ , характеристики которого представлены в работах [27, 28].

Рассмотрим  $S_{3,1}$  как интерполирующий сплайн для функции  $W(x, y, t)$ , являющейся первообразной для функции  $w(x, y, t)$  по пространственной координате, по которой осуществляется интерполяция:

$$S_{3,1}(W(v); v) = (1 - \tau)^2(1 + 2\tau)W_i + \tau^2(3 - 2\tau)W_{i+1} + h_i \tau(1 - \tau)[(1 - \tau)w_i - \tau w_{i+1}], \tau = \frac{v - v_i}{h_i}. \quad (5)$$

Здесь  $W'(y) = w(y)$ .

Из условия получим  $S_{3,1}''(W, v_i - 0) = S_{3,1}''(W, v_i + 0)$  [27] СЛАУ:

$$w_{j-1} + 4w_j + w_{j+1} = 3(\tilde{w}_{j-1/2} + \tilde{w}_{j+1/2}), j = \overline{1, N_y - 1}, \tilde{w}_{j+1/2} = \frac{1}{h_y} \int_{v_j}^{v_{j+1}} w(v) dv. \quad (6)$$

Для  $\frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x, y, t_n) dy dx$  как функции от переменной  $y$  на каждом отрезке  $[x_i, x_{i+1}], i = \overline{0, N_x - 1}$  построим интерполяционный сплайн (5) вида

$S_{3,1}(\int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y, t_n) dx dy, y)$ , действующий вдоль координаты  $x$ . Построим СЛАУ типа

(5) для значений  $u_{i+1/2,j}^{(n)}$  и  $u_{i+1/2,j+1/2}^{(n)}$  во внутренних узлах, дополнив ее условиями периодичности по координате  $y$  по пространству в граничных точках, получив таким образом совместную СЛАУ:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{i+1/2,0}^{(n)} = \tilde{u}_{i+1/2,N_y}^{(n)}, \tilde{u}_{i+1/2,1}^{(n)} = \tilde{u}_{i+1/2,N_y+1}^{(n)}, \tilde{u}_{i+1/2,1/2}^{(n)} = \tilde{u}_{i+1/2,N_y+1/2}^{(n)} \\ \tilde{u}_{i+1/2,j-1}^{(n)} + 4\tilde{u}_{i+1/2,j}^{(n)} + \tilde{u}_{i+1/2,j+1}^{(n)} = 3(\tilde{u}_{i+1/2,j-1/2}^{(n)} + \tilde{u}_{i+1/2,j+1/2}^{(n)}) \end{cases}. \quad (7)$$

Используя представление функций  $\frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y, t_n) dx$ ,  $\frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x, y, t_n) dy dx$  в виде

ряда Тейлора по переменной  $y$  в окрестности точки  $y_j$ , а также применив метод неопределенных коэффициентов, построим компактные центральные разностные операторы  $J_{i+1/2,j}^{y,(n)}$ , обеспечивающие четвертый порядок пространственной аппроксимации по переменной  $y$  [26] с учетом периодических граничных условий:

$$J_{i+1/2,j}^{y,(n)} = (0.5u_{i+1/2,j-1}^{(n)} - 0.5u_{i+1/2,j+1}^{(n)} - 2u_{i+1/2,j-1/2}^{(n)} + 2u_{i+1/2,j+1/2}^{(n)}) / h_y, j = \overline{1, N_y - 1}. \quad (8)$$

Таким образом, были найдены аппроксимации  $u_{i+1/2,j}^{(n)}$ ,  $J_{i+1/2,j}^{y,(n)}$  для отрезков  $[x_i, x_{i+1}], i = \overline{0, N_x - 1}$  (рис. 2а).

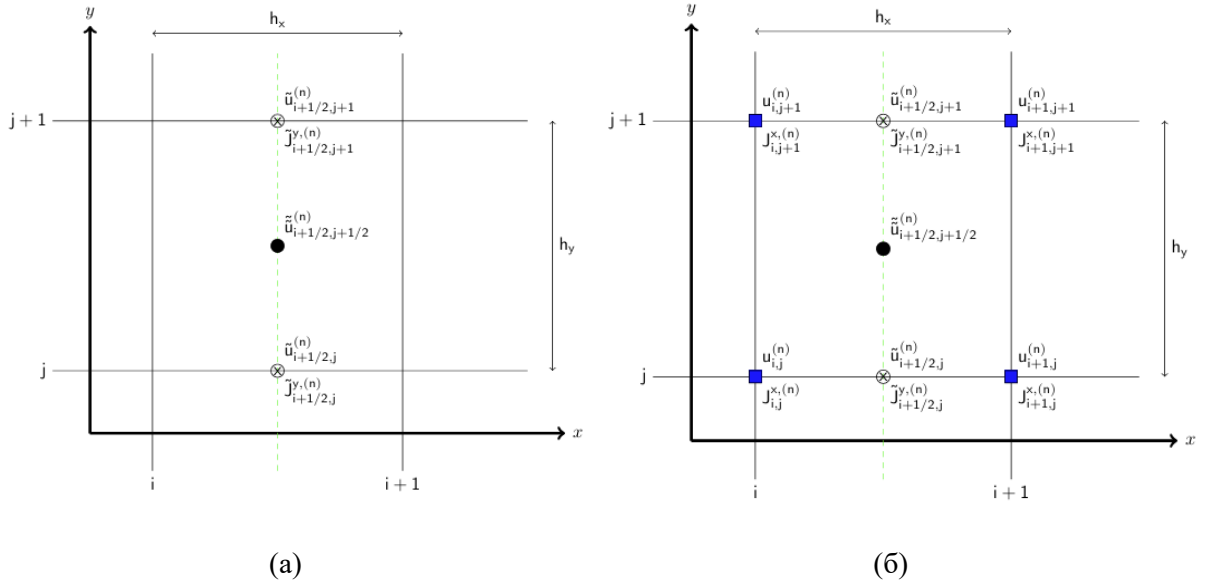
Далее необходимо определить значения  $u_{i,j}^{(n)}$ ,  $J_{i,j}^{x,(n)}$  путем интерполяции с помощью сплайна (5) вдоль координаты  $x$  на основе полученных значений  $u_{i+1/2,j}^{(n)}$  с учетом граничных условий, действующих при  $x = x_0, x = x_L$ . Используя представление функций  $\frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y, t_n) dx$ ,  $u(x, y, t_n)$  в виде ряда Тейлора по переменной  $x$  в окрестности  $x_i$ , а также применив метод неопределенных коэффициентов, построим операторы  $J_{i,j}^{x,(n)}$ :

$$\begin{aligned} J_{0,j}^{x,(n)} &= (-6u_{0,j}^{(n)} - 8u_{1,j}^{(n)} - u_{2,j}^{(n)} + 11.5\tilde{u}_{1/2,j}^{(n)} + 3.5\tilde{u}_{3/2,j}^{(n)})/h_x \\ J_{i,j}^{x,(n)} &= (0.5u_{i-1,j}^{(n)} - 0.5u_{i+1,j}^{(n)} - 2\tilde{u}_{i-1/2,j}^{(n)} + 2\tilde{u}_{i+1/2,j}^{(n)})/h_x, i = \overline{1, N_x - 1} \\ J_{N_x,j}^{x,(n)} &= (6u_{N_x,j}^{(n)} + 8u_{N_x-1,j}^{(n)} + u_{N_x-2,j}^{(n)} - 11.5\tilde{u}_{N_x-1/2,j}^{(n)} - 3.5\tilde{u}_{N_x-3/2,j}^{(n)})/h_x. \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом граничных условий, применив интерполяционный сплайн (5) вида  $S_{3,1}(\int u(x, y_j, t_n) dx, x)$  вдоль координаты  $x$  по всем  $\{y_j\}: j = \overline{0, N_y}$ , определим СЛАУ для нахождения аппроксимаций  $u_{i,j}^{(n)} \simeq u(x_i, y_j, t) + O(h_y^4 + h_x^4)$ , из которых далее могут быть найдены  $J_{i,j}^{x,(n)} \simeq \frac{\partial u(x_i, y_j, t)}{\partial x} + O(h_y^4 + h_x^4)$ :

$$\begin{aligned} 5u_{0,j}^{(n)} + 4u_{1,j}^{(n)} &= 8.5\tilde{u}_{1/2,j}^{(n)} + 0.5\tilde{u}_{3/2,j}^{(n)} \\ u_{i-1,j}^{(n)} + 4u_{i,j}^{(n)} + u_{i+1,j}^{(n)} &= 3(\tilde{u}_{i-1/2,j}^{(n)} + \tilde{u}_{i+1/2,j}^{(n)}), i = \overline{1, N_x - 1} \\ 4u_{N_x-1,j}^{(n)} + \left(5 + \frac{h_x \alpha_1(t)}{D(u_{N_x,j}^{(n)})}\right) u_{N_x,j}^{(n)} &= 8.5\tilde{u}_{N_x-1/2,j}^{(n)} + 0.5\tilde{u}_{N_x-3/2,j}^{(n)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Операторы  $J_{i,j}^{x,(n)}$  могут быть найдены из полученных  $u_{i,j}^{(n)}$  с помощью (9) (рис. 2б).



**Рис. 2.** Нахождение точечных и интегральных разностных операторов с помощью применения интерполирующего сплайна по отдельным координатам (1, 2 шаги): (а) – по координате  $y$ , (б) – по координате  $x$

Для восстановления аппроксимаций  $u_{i,j+1/2}^{(n)} \cong \frac{1}{h_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x_i, y, t_n) dy + O(h_x^4 + h_y^4)$  по найденным  $u_{i,j}^{(n)} \cong u(x_i, y_j, t) + O(h_y^4 + h_x^4)$  применим следующие формулы с учетом периодичности:

$$u_{i,j+1/2}^{(n)} = -\frac{1}{24} u_{i,(j-1+N_y)\%N_y}^{(n)} + \frac{13}{24} u_{i,j\%N_y}^{(n)} + \frac{13}{24} u_{i,(j+1)\%N_y}^{(n)} - \frac{1}{24} u_{i,(j+2)\%N_y}^{(n)}. \quad (11)$$

Используя представление функций  $u(x, y, t_n)$ ,  $\frac{1}{h_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x, y, t_n) dy$  в виде ряда Тейлора по переменной  $y$  в окрестности точки  $y_j$ , а также применив метод неопределенных коэффициентов, найдем с учетом периодических граничных условий операторы  $J_{i,j}^{y,(n)} \cong \frac{\partial u(x_i, y_j, t_n)}{\partial y} + O(h_x^4 + h_y^4)$  (рис. 3а):

$$J_{i,j}^{y,(n)} = \frac{0.5u_{i,j-1}^{(n)} - 0.5u_{i,j+1}^{(n)} - 2\tilde{u}_{i,j-1/2}^{(n)} + 2\tilde{u}_{i,j+1/2}^{(n)}}{h_y}, j = \overline{1, N_y - 1}. \quad (12)$$

Для восстановления аппроксимаций  $\tilde{J}_{i,j+1/2}^{x,(n)} \cong \frac{1}{h_y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial u(x_i, y, t_n)}{\partial x} dy + O(h_x^4 + h_y^4)$  по найденным значениям  $J_{i,j}^{x,(n)} \cong \frac{\partial u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x} + O(h_x^4 + h_y^4)$  применим следующие формулы с учетом периодичности:

$$J_{i,j+1/2}^{x,(n)} = -\frac{1}{24} J_{i,(j-1+N_y)\%N_y}^{x,(n)} + \frac{13}{24} J_{i,j\%N_y}^{x,(n)} + \frac{13}{24} J_{i,(j+1)\%N_y}^{x,(n)} - \frac{1}{24} J_{i,(j+2)\%N_y}^{x,(n)} \quad (13)$$

В результате были получены необходимые точечные и интегральные разностные операторы из (3). Для контрольных объемов  $\{[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]: i = \overline{0, N_x - 1}, j = \overline{0, N_y - 1}\}$  при  $t = t_n$  найдем с помощью формулы численного интегрирования Симпсона, обеспечивающей четвертый порядок точности по пространству, аппроксимации значений функций  $u(x, y, t) \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}$  в полуцелых узлах:

$$\begin{aligned} u_{i+0.5,j}^{(n)} &= 1.5\tilde{u}_{i+1/2,j}^{(n)} - 0.25(u_{i,j}^{(n)} + u_{i+1,j}^{(n)}), u_{i+0.5,j}^{(n)} \\ &= u(x_i + 0.5h_x, y_j, t_n) + O(h_x^4 + h_y^4) \\ u_{i,j+0.5}^{(n)} &= 1.5\tilde{u}_{i,j+1/2}^{(n)} - 0.25(u_{i,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)}), u_{i,j+0.5}^{(n)} \\ &= u(x_i, y_j + 0.5h_y, t_n) + O(h_x^4 + h_y^4) \\ u_{i+0.5,j+0.5}^{(n)} &= (36\tilde{u}_{i+1/2,j+1/2}^{(n)} - (u_{i,j}^{(n)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i+1,j+1}^{(n)}) - \\ &\quad - 4(u_{i+0.5,j}^{(n)} + u_{i+0.5,j+1}^{(n)} + u_{i,j+0.5}^{(n)} + u_{i+1,j+0.5}^{(n)}))/16, u_{i+0.5,j+0.5}^{(n)} = \\ &= u(x_i + 0.5h_x, y_j + 0.5h_y, t_n) + O(h_x^4 + h_y^4) \\ J_{i+0.5,j}^{y,(n)} &= 1.5\tilde{J}_{i+1/2,j}^{y,(n)} - 0.25(J_{i,j}^{y,(n)} + J_{i+1,j}^{y,(n)}), J_{i+0.5,j}^{y,(n)} \\ &= \frac{\partial u(x_i + 0.5h_x, y_j, t_n)}{\partial y} + O(h_x^4 + h_y^4) \\ J_{i,j+0.5}^{x,(n)} &= 1.5\tilde{J}_{i,j+1/2}^{x,(n)} - 0.25(J_{i,j}^{x,(n)} + J_{i,j+1}^{x,(n)}), J_{i,j+0.5}^{x,(n)} = \frac{\partial u(x_i, y_j + 0.5h_y, t_n)}{\partial x} + O(h_x^4 + h_y^4) \end{aligned} \quad (14)$$

Построенная разностная схема (4) формально обеспечивает четвертый порядок пространственной аппроксимации при условии монотонности функции  $D(u)$ .

## 2. Порядок пространственной аппроксимации

Исследуем структуру пространственной погрешности, возникающей в результате применения разностных операторов (3), полученных путем последовательного применения сплайна (5) по одной из пространственных координат, в схеме (4).

Рассмотрим основную СЛАУ (7) для восстановления  $u_{i+1/2}^{(n)}$  по значениям  $u_{i+1/2,j+1/2}^{(n)}$  с учетом периодических граничных условий с помощью применения сплайна (5) по переменной  $y$ , а также разложения правой части в ряд Тейлора, получим СЛАУ для невязок

$$e_{i+1/2,j}^{(n)} = u_{i+1/2}^{(n)} - \frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y_j, t) dx, \text{ далее везде подразумеваются вычисления для временного}$$

слоя  $t_n$ :

$$\begin{cases} 4e_{i+1/2,1}^{(n)} + e_{i+1/2,2}^{(n)} + e_{i+1/2,N_y}^{(n)} = 3(\tilde{u}_{i+1/2,1/2}^{(n)} + \tilde{u}_{i+1/2,3/2}^{(n)}) - 4\tilde{u}_{i+1/2,1}^{(n)} - \tilde{u}_{i+1/2,2}^{(n)} - \tilde{u}_{i+1/2,N_y}^{(n)}, \\ e_{i+1/2,j-1}^{(n)} + 4e_{i+1/2,j}^{(n)} + e_{i+1/2,j+1}^{(n)} = 3(\tilde{u}_{i+1/2,j-1/2}^{(n)} + \tilde{u}_{i+1/2,j+1/2}^{(n)}) - \tilde{u}_{i+1/2,j-1}^{(n)} - 4\tilde{u}_{i+1/2,j}^{(n)} - \tilde{u}_{i+1/2,j+1}^{(n)}, \\ 0 < j < N_y, \\ e_{i+1/2,1}^{(n)} + e_{i+1/2,N_y-1}^{(n)} + 4e_{i+1/2,N_y}^{(n)} = 3(\tilde{u}_{i+1/2,N_y-1/2}^{(n)} + \tilde{u}_{i+1/2,1/2}^{(n)}) - \tilde{u}_{i+1/2,1}^{(n)} - \tilde{u}_{i+1/2,N_y-1}^{(n)} - 4\tilde{u}_{i+1/2,N_y}^{(n)}. \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{Здесь } u_{i+1/2,j+1/2}^{(n)} = \frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x, y, t) dy dx.$$

Представим выражения в правых частях уравнений СЛАУ (6) в виде рядов Тейлора, поскольку они содержат только точные интегральные средние и точечные значения, после чего запишем СЛАУ (7) в матричной форме:

$$\hat{A} e_{i+1/2}^{(n)} = w_{i+1/2}^{(n)}, \hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{matrix} e_{i+1/2}^{(n)} = (e_{i+1/2,0}^{(n)}, \dots, e_{i+1/2,N_y}^{(n)})^T \\ w_{i+1/2}^{(n)} = (w_{i+1/2,0}^{(n)}, \dots, w_{i+1/2,N_y}^{(n)})^T \end{matrix} \quad (16)$$

Опишем вектор в правой части СЛАУ с помощью представление в виде ряда:

$$\begin{aligned} w_{i+1/2}^{(n)} = -h_y^4 & \left( \frac{1}{30} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j, t)}{\partial y^4} - \frac{h_x}{60} \frac{\partial^5 u(x_i, y_j, t)}{\partial x \partial y^4} - \frac{h_x^2}{180} \frac{\partial^6 u(x_i, y_j, t)}{\partial x^2 \partial y^4} - \right. \\ & \left. - \frac{h_x^3}{720} \frac{\partial^7 u(x_i, y_j, t)}{\partial x^3 \partial y^4} - \frac{h_x^4}{3600} \frac{\partial^8 u(x_i, y_j, t)}{\partial x^4 \partial y^4} + O(h_x^5) \right) + O(h_y^6) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{Построим выражение для невязок } e_{i+1/2}^{(n)} = \hat{A}^{-1} w_{i+1/2}^{(n)}, \text{ и } e_{i+1/2,j}^{(n)} = \sum_{k=0}^{N_y} (\hat{A}^{-1})_{jk} w_{i+1/2,k}^{(n)}.$$

Здесь индекс  $i+1/2$  соответствует вертикальной колонке расчетной сетки, состоящей из узлов, для которых  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $k$  соответствует номеру строки в матрице  $\hat{A}^{-1}$ .

Численное исследование матрицы  $\hat{A}^{-1}$  показывает, что абсолютные значения элементов обратной матрицы экспоненциально убывают при удалении от главной диагонали (рис. 4).



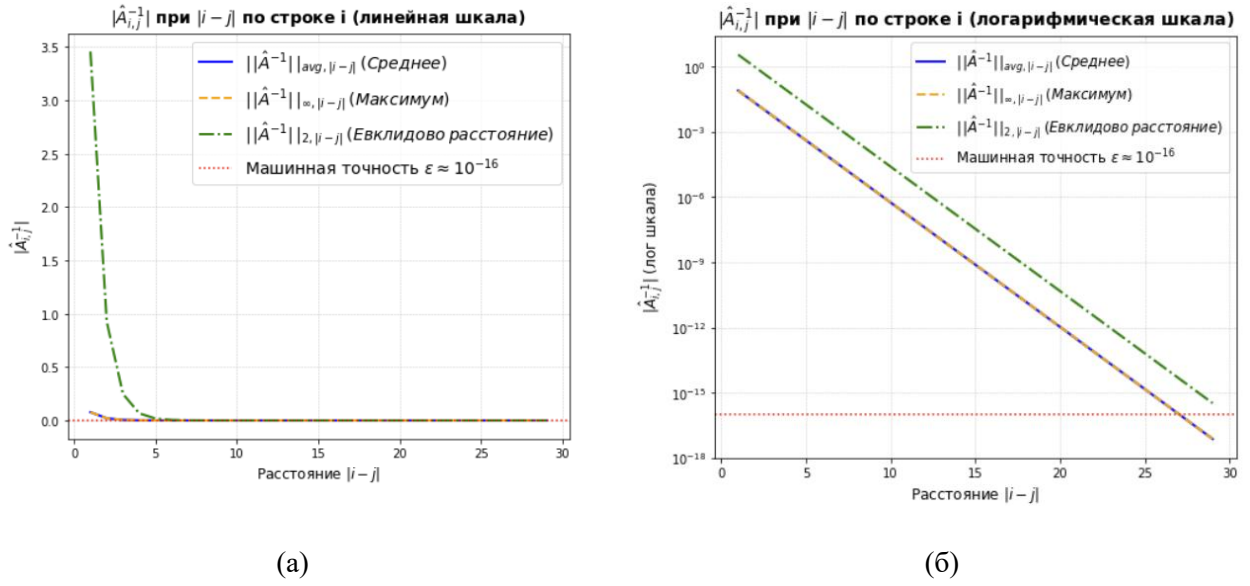


Рис. 4. Зависимость норм  $\left|(\hat{A}^{-1})_{ij}\right|$  от  $|i-j|$ : (а) – линейная шкала, (б) – лог. шкала

График максимального значения по всем строкам для радиуса от главной диагонали, внутри которого абсолютное значение элементов матрицы  $\hat{A}^{-1}$  превышает машинную погрешность, представлен на рис. 5.



Рис. 5. Зависимость  $\max_i \{|i-j| : \left|(\hat{A}^{-1})_{ij}\right| > \varepsilon\}$  от  $N_y$

Таким образом, для  $N_y \leq 27$  имеем  $\max_i \{|i-j| : \left|(\hat{A}^{-1})_{ij}\right| > \varepsilon\} = N_y$ , при  $N_y > 27$   $\max_i \{|i-j| : \left|(\hat{A}^{-1})_{ij}\right| > \varepsilon\} = 27$ . Тогда при  $n \gg 27$  является справедливой следующая оценка:

$$e_{i+1/2,j}^{(n)} = \sum_{k=0}^{N_y} (\hat{A}^{-1})_{jk} w_{i+1/2,k}^{(n)} \sim O(w_{i+1/2,k}^{(n)}) j = 0, 1, \dots, N_y. \quad (18)$$

Таким образом, оценка для вычисленных  $u_{i+1/2,j}$  :

$$\hat{u}_{i+1/2,j}^{(n)} = \frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y_j, t) dx + e_{i+1/2,j}^{y(n)}. \quad (19)$$

Найдем погрешность аппроксимации при вычислении операторов  $J_{i+1/2,j}^{y,(n)}$  (8) по найденным  $u_i, i = 0, 1, \dots, N$  :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{i+1/2,j}^{y,(n)} - \frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u(x, y_j, t_n)}{\partial y} dx &= \\ &= (0.5\tilde{u}_{i+1/2,j-1}^{(n)} - 0.5\tilde{u}_{i+1/2,j+1}^{(n)} - 2\tilde{u}_{i+1/2,j-1/2}^{(n)} + 2\tilde{u}_{i+1/2,j+1/2}^{(n)})/h_y - \\ &- \frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u(x, y_j, t_n)}{\partial y} dx = \\ &= (0.5(\frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y_{j-1}, t_n) dx + e_{i+1/2,j-1}^{y(n)}) - 0.5(\frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y_{j+1}, t_n) dx \\ &\quad + e_{i+1/2,j+1}^{y(n)}) - \\ &- 2\frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} u(x, y, t_n) dy dx + 2\frac{1}{h_x h_y} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x, y, t_n) dy dx)/h_y \\ &- \frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u(x, y_j, t_n)}{\partial y} dx = \\ &= \frac{0.5e_{i+1/2,j-1}^{y(n)} - 0.5e_{i+1/2,j+1}^{y(n)}}{h} + u'(x_i) - h_y^4 (\frac{1}{360} \frac{\partial^5 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial y^5} \\ &\quad + \frac{h_x}{720} \frac{\partial^6 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x \partial y^5} + \\ &\quad + \frac{h_x^2}{2160} \frac{\partial^7 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x^2 \partial y^5} + \frac{h_x^3}{8640} \frac{\partial^8 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x^3 \partial y^5} + \frac{h_x^4}{43200} \frac{\partial^9 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x^4 \partial y^5} + O(h_x^5)) \\ &\quad + O(h_y^6) = \\ &= (-\frac{\partial e_{i+1/2,j}^{y(n)}}{\partial y} - \frac{h_y^2}{6} \frac{\partial^2 e_{i+1/2,j}^{y(n)}}{\partial y^2} + O(h_y^4)) + O(h_y^4) \sim O(h_y^4) \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим основную СЛАУ для восстановления  $u_{i,j}^{(n)}$  по вычисленным значениям

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i+1/2,j}^{(n)} &= \frac{1}{h_x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, y_j, t) dx + e_{i+1/2,j}^{y(n)} \quad (26): \\ \begin{cases} 6u_{0,j}^{(n)} + 8u_{1,j}^{(n)} + u_{2,j}^{(n)} = 11.5\hat{u}_{1/2,j}^{(n)} + 3.5\hat{u}_{3/2,j}^{(n)} - h_x u'_x(x_0, y_j, t), \\ u_{i-1,j}^{(n)} + 4u_{i,j}^{(n)} + u_{i+1,j}^{(n)} = 3(\hat{u}_{i-1/2,j}^{(n)} + \hat{u}_{i+1/2,j}^{(n)}), i = 1, \dots, N_x - 1, \\ u_{N_x-2,j}^{(n)} + 8u_{N_x-1,j}^{(n)} + 6u_{N_x,j}^{(n)} = 3.5\hat{u}_{N_x-3/2,j}^{(n)} + 11.5\hat{u}_{N_x-1/2,j}^{(n)} + h_x u'_x(x_{N_x}, y_j, t). \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

Выполнив линейные преобразования для перехода к системе (10), получим с помощью разложения правой части (21) в ряд Тейлора СЛАУ для невязок

$$e_{i,j}^{yx} = u_{i,j}^{(n)} - u(x_i, y_j, t):$$

$$\begin{cases} 5e_{0,j}^{yx} + 4e_{1,j}^{yx} = 8.5\hat{u}_{1/2,j}^{(n)} + 0.5\hat{u}_{3/2,j}^{(n)} - h_x u_x'(x_0, y_j, t) - 5u(x_0, y_j, t) - 4u(x_1, y_j, t), \\ e_{i-1,j}^{yx} + 4e_{i,j}^{yx} + e_{i+1,j}^{yx} = 3(\hat{u}_{i-1/2,j}^{(n)} + \hat{u}_{i+1/2,j}^{(n)}) - u(x_{i-1}, y_j, t) - 4u(x_i, y_j, t) - u(x_{i+1}, y_j, t), i = \overline{1, N_x - 1}, \\ 4e_{N_x-1,j}^{yx} + 5e_{N_x,j}^{yx} = 0.5\hat{u}_{N_x-3/2,j}^{(n)} + 8.5\hat{u}_{N_x-1/2,j}^{(n)} + h_x u_x'(x_{N_x}, y_j, t) - 4u(x_{N_x-1}, y_j, t) - 5u(x_{N_x}, y_j, t). \end{cases} \quad (22)$$

Представим (22) в матричном виде, раскладывая аналитические компоненты в правой части в ряды Тейлора:

$$A e_j^{yx(n)} = w_j^{yx(n)}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e_j^{yx(n)} &= (e_{j,0}^{yx(n)}, \dots, e_{j,N_x}^{yx(n)})^T \\ w_j^{yx(n)} &= (w_{j,0}^{yx(n)}, \dots, w_{j,N_x}^{yx(n)})^T \\ e_j^{yx(n)} &= A^{-1} w_j^{yx(n)}; \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда получим для  $i$ -го элемента:  $e_{j,i}^{yx(n)} = \sum_{k=0}^{N_x} (A^{-1})_{ik} w_{j,k}^{yx(n)}$ .

Представим компоненты вектора  $w_j^{yx(n)}$  в виде рядов Тейлора:

$$\begin{aligned} w_{j,0}^{yx(n)} &= 8.5e_{1/2,j}^{y(n)} + 0.5e_{3/2,j}^{y(n)} + \frac{h_x^4}{30} \frac{\partial^4 u(x_0, y_j, t_n)}{\partial x^4} + \frac{h_x^5}{45} \frac{\partial^5 u(x_0, y_j, t_n)}{\partial x^5} + O(h_x^6) \\ w_{j,i}^{yx(n)} &= 3(e_{i-1/2,j}^{y(n)} + 0.5e_{i+1/2,j}^{y(n)}) - \frac{h_x^4}{30} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x^4} - \frac{h_x^6}{630} \frac{\partial^6 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x^6} + O(h_x^8) \\ w_{j,N_x}^{yx(n)} &= 0.5e_{N_x-3/2,j}^{y(n)} + 8.5e_{N_x-1/2,j}^{y(n)} + \frac{h_x^4}{30} \frac{\partial^4 u(x_{N_x}, y_j, t_n)}{\partial x^4} - \frac{h_x^5}{45} \frac{\partial^5 u(x_{N_x}, y_j, t_n)}{\partial x^5} + O(h_x^6) \end{aligned} \quad (24)$$

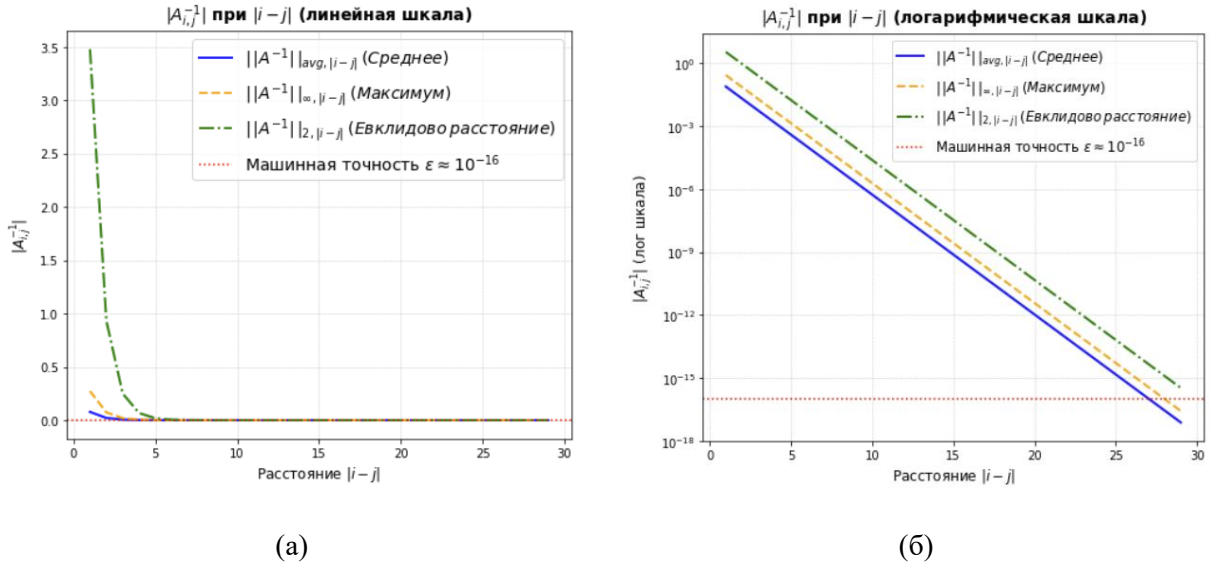
Матрица  $A$  является трехдиагональной (с диагональным преобладанием), ограниченной, квазицентричной матрицей,  $A^{-1}$  существует и также ограничена, тогда, в соответствии с теоремой 2.4 из работы [29], справедлива оценка:

$$\begin{aligned} (A^{-1})_{ij} &\leq C_1 \lambda_1^{|i-j|}, \lambda_1 = \left( \frac{\text{cond}(A) - 1}{\text{cond}(A) + 1} \right)^{1/m}, \text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|, \\ C_1 &= (m+1) \lambda_1^{-m} \|A^{-1}\| \text{cond}(A) \max \left\{ 1, \left[ \frac{1 + \text{cond}(A)}{\text{cond}(A)} \right]^2 / 2 \right\}, m = 2. \end{aligned} \quad (25)$$

Поскольку  $0 < \lambda_1 < 1$ , то для каждой строки  $i$  матрицы  $A^{-1}$  число элементов, модуль которых превышает наперед заданное число  $\varepsilon$ , ограничено:

$$\{j : |(A^{-1})_{ij}| > \varepsilon\} \leq \min(n, 2r+1), r = \text{const}, r = r(\text{cond}(A)), r \neq r(n). \quad (26)$$

Численное исследование элементов матрицы  $A^{-1}$  также показывает экспоненциальное убывание их абсолютных значений при удалении от главной диагонали (рис. 6).



**Рис. 6.** Зависимость норм  $\left| (A^{-1})_{ij} \right|$  от  $|i-j|$ : (а) – линейная шкала, (б) – лог. шкала

Максимальный радиус  $\max_i \{|i-j| : \left| (A^{-1})_{ij} \right| > \varepsilon\}$  соответствует значению, найденному для матрицы  $\hat{A}^{-1}$ . Тогда при  $n \gg 27$  является справедливой следующая оценка:

$$e_{j,i}^{yx(n)} = \sum_{k=0}^{N_x} (A^{-1})_{ik} w_{j,k}^{yx(n)} \sim O(w_{j,k}^{yx(n)}), i = 0, 1, \dots, N_x. \quad (27)$$

Тогда оценка для вычисленных  $u_{i,j}$ :

$$\hat{u}_{i,j}^{(n)} = u(x_i, y_j, t) + e_{j,i}^{yx(n)}. \quad (28)$$

Найдем погрешность при вычислении операторов (9),  $i = 1, \dots, N_x - 1$ :

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j,i}^x - \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} &= (0.5\hat{u}_{i-1,j}^{(n)} - 0.5\hat{u}_{i+1,j}^{(n)} - 2\hat{u}_{i-1/2,j}^{(n)} + 2\hat{u}_{i+1/2,j}^{(n)})/h - \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} = \\ &= \frac{0.5(e_{j,i-1}^{yx(n)} - e_{j,i+1}^{yx(n)}) + 2(e_{i+1/2,j}^{y(n)} - e_{i-1/2,j}^{y(n)})}{h_x} - \frac{h_x^4}{360} \frac{\partial^5 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x^5} + O(h_x^6) = \\ &= O\left(\frac{\partial e_{j,i}^{yx(n)}}{\partial x}\right) + O\left(\frac{\partial e_{i+1/2,j}^{y(n)}}{\partial x}\right) - \frac{h_x^4}{360} \frac{\partial^5 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x^5} + O(h_x^6) \sim O(h_x^4 + h_y^4). \end{aligned} \quad (29)$$

Применяя разложение функций в ряд Тейлора в окрестностях соответствующих узлов, видно, что формулы (11), (13) при их применении к точным значениям соответственно  $u(x_i, y_j, t_n)$  и  $u'_x(x_i, y_j, t_n)$  обеспечивают четвертый порядок аппроксимации по  $y$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24}u(x_i, y_{(j-1+N_y)\%N_y}, t_n) + \frac{13}{24}u(x_i, y_{j\%N_y}, t_n) + \frac{13}{24}u(x_i, y_{(j+1)\%N_y}, t_n) - \\ & - \frac{1}{24}u(x_i, y_{(j+2)\%N_y}, t_n) = \frac{1}{h_x} \int_{y_j}^{y_{j+1}} u(x_i, y, t_n) dy - \frac{11}{720} h_y^4 \frac{\partial^4 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial y^4} + O(h_y^5); \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24} \frac{\partial u(x_i, y_{(j-1+N_y)\%N_y}, t_n)}{\partial x} + \frac{13}{24} \frac{\partial u(x_i, y_{j\%N_y}, t_n)}{\partial x} + \frac{13}{24} \frac{\partial u(x_i, y_{(j+1)\%N_y}, t_n)}{\partial x} - \\ & - \frac{1}{24} \frac{\partial u(x_i, y_{(j+2)\%N_y}, t_n)}{\partial x} = \frac{1}{h_x} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial u(x_i, y, t_n)}{\partial x} dy - \frac{11}{720} h_y^4 \frac{\partial^5 u(x_i, y_j, t_n)}{\partial x \partial y^4} + O(h_y^5). \end{aligned} \quad (31)$$

С учетом (27), (30) оценка погрешности при вычислении операторов (12),  $j=1, \dots, N_y-1$  имеет вид:

$$J_{i,j}^{y,(n)} - \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} = \frac{0.5u_{i,j-1}^{(n)} - 0.5u_{i,j+1}^{(n)} - 2\tilde{u}_{i,j-1/2}^{(n)} + 2\tilde{u}_{i,j+1/2}^{(n)}}{h_y} - \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} \sim O(h_x^4 + h_y^4). \quad (32)$$

Выражения (14) сохраняют общий порядок аппроксимации  $\sim O(h_x^4 + h_y^4)$  как линейные комбинации величин, имеющих погрешность порядка не выше  $\sim O(h_x^4 + h_y^4)$ , с постоянными коэффициентами.

### 3. Устойчивость разностной схемы

Исследуем устойчивость представленной разностной схемы по начальным данным при помощи спектрального признака Неймана.

Представим значения  $u_{j+1/2,k+1/2}^{(n+1)}$ ,  $u_{j,k+1/2}^{(n)}$ ,  $u_{j+1/2,k}^{(n)}$  в виде гармоник:

$$\begin{aligned} u_{j+1/2,k+1/2}^{(n)} &= \lambda^n e^{i(\alpha(j+\frac{1}{2})+\beta(k+\frac{1}{2}))}, \\ u_{j+1/2,k}^{(n)} &= \lambda^n Q(\beta) e^{i(\alpha(j+\frac{1}{2})+\beta k)}, u_{j,k}^{(n)} = Q(\beta) Q(\alpha) e^{i(\alpha j + \beta k)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Тогда из СЛАУ (7), (10) получим:

$$\begin{aligned} Q(\beta)(e^{-i\beta} + 4 + e^{i\beta}) &= 3(e^{-i0.5\beta} + e^{i0.5\beta}), \\ Q(\alpha)(e^{-i\alpha} + 4 + e^{i\alpha}) &= 3(e^{-i0.5\alpha} + e^{i0.5\alpha}) \end{aligned} \quad (34)$$

Откуда найдем значения для  $Q(\alpha)$ ,  $Q(\beta)$ :

$$Q(\alpha) = \frac{3 \cos(\alpha/2)}{2 + \cos \alpha}, Q(\beta) = \frac{3 \cos(\beta/2)}{2 + \cos \beta}. \quad (35)$$

С учетом СЛАУ (10), выражений (35) определим представление для  $u_{i,j}^{(n)}$ :

$$u_{j,k}^{(n)} = \lambda^n \frac{3 \cos(\alpha/2)}{2 + \cos \alpha} \frac{3 \cos(\beta/2)}{2 + \cos \beta} e^{i(\alpha j + \beta k)}. \quad (36)$$

Найдем представления в виде гармоник для остальных аппроксимаций, которые используются в (4). Из (11) получим представление для  $u_{i,j+1/2}^{(n)}$ :

$$u_{j,k+1/2}^{(n)} = - \frac{3\lambda^n e^{\frac{i}{2}(\beta+2\alpha j+2\beta k)} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) (-7 + \cos \beta)}{2(2 + \cos \alpha)(2 + \cos \beta)}. \quad (37)$$

Из выражений (8–9), (12–13) получим представления соответственно для  $J_{i+1/2,j}^{y,(n)}$ ,  $J_{i,j}^{x,(n)}$ ,  $J_{i,j}^{y,(n)}$ ,  $J_{i,j+1/2}^{x,(n)}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{i+1/2,j}^{y,(n)} &= \frac{\lambda^n e^{\frac{i}{2}(\alpha+2\alpha j+\beta(-3+2k))} (-1 - 9e^{i\beta} + 9e^{2i\beta} + 1e^{3i\beta})}{4h_y(2 + \cos \beta)}, \\ J_{i,j}^{x,(n)} &= \frac{\lambda^n e^{\frac{i}{2}(\alpha(-3+2j)+2\beta k)} (-3 - 27e^{i\alpha} + 27e^{2i\alpha} + 3e^{3i\alpha}) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{4h_x(2 + \cos \alpha)(2 + \cos \beta)}, \\ J_{i,j}^{y,(n)} &= - \frac{3i\lambda^n e^{i\alpha j} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) (-4 + \cos \beta) \sin \beta (\cos(\beta k) + i \sin(\beta k))}{h_y(2 + \cos \alpha)(2 + \cos \beta)}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{i,j+1/2}^{x,(n)} &= \frac{117i\lambda^n e^{\frac{i}{2}(\beta+2\alpha j+2\beta k)}}{16h_x(2 + \cos \alpha)(2 + \cos \beta)} \left( \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{9} \sin \frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{26} \sin \frac{\alpha - 4\beta}{2} + \right. \\ &+ \frac{6}{13} \sin \frac{\alpha - 2\beta}{2} - \frac{1}{234} \sin \left( \frac{3\alpha}{2} - 2\beta \right) + \frac{2}{39} \sin \left( \frac{3\alpha}{2} - \beta \right) + \frac{6}{13} \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \beta \right) + \\ &\left. + \frac{2}{39} \sin \left( \frac{3\alpha}{2} + \beta \right) - \frac{1}{234} \sin \left( \frac{3\alpha}{2} + 2\beta \right) - \frac{1}{26} \sin \frac{\alpha + 4\beta}{2} \right); \end{aligned}$$

Из (14) получим представления в виде гармоник для аппроксимаций значений функции  $u(x, y, t)$  в полуцелых узлах:

$$\begin{aligned} u_{j+0.5,k}^{(n)} &= \frac{e^{\frac{i}{2}(\alpha(-1+2j)+2\beta k)} \left( \frac{9}{8} + \frac{27}{4} e^{i\alpha} + \frac{9}{8} e^{2i\alpha} \right) \lambda^n \cos \frac{\beta}{2}}{(2 + \cos \alpha)(2 + \cos \beta)}, \\ u_{j,k+0.5}^{(n)} &= \frac{e^{i\alpha j} \left( -\frac{9}{16} e^{i\beta(-1+k)} + \frac{81}{16} e^{i\beta k} + \frac{81}{16} e^{i\beta(1+k)} - \frac{9}{16} e^{i\beta(2+k)} \right) \lambda^n \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{(2 + \cos \alpha)(2 + \cos \beta)}, \\ u_{j+0.5,k+0.5}^{(n)} &= \frac{e^{\frac{i}{2}(\alpha+\beta+2\alpha j+2\beta k)} \lambda^n \left( \frac{351}{64} + \frac{135}{64} \cos \alpha + \frac{9}{8} \cos \beta + \frac{9}{32} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos 2\beta \right)}{(2 + \cos \alpha)(2 + \cos \beta)}; \end{aligned} \quad (39)$$

Также из (14) получим представления для аппроксимаций частных производных функции  $u(x, y, t)$  в полуцелых узлах:

$$J_{j+0.5, k}^{y, (n)} = -\frac{3ie^{\frac{i}{2}(\alpha+2\alpha j+2\beta k)} \lambda^n}{32h_y(2+\cos\alpha)(2+\cos\beta)} \left( \sin\left(\alpha - \frac{5\beta}{2}\right) - 3\sin\left(\alpha - \frac{3\beta}{2}\right) + \right. \\ \left. + 28\sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - 28\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) - 128\sin\frac{\beta}{2} - 2\sin\frac{3\beta}{2} - 2\sin\frac{5\beta}{2} + \right. \\ \left. + 3\sin\left(\alpha + \frac{3\beta}{2}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{5\beta}{2}\right) \right), \quad (40)$$

$$J_{j, k+0.5}^{x, (n)} = \frac{243ie^{\frac{i}{2}(\beta+2\alpha j+2\beta k)} \lambda^n}{32h_x(2+\cos\alpha)(2+\cos\beta)} \left( \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{9}\sin\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{18}\sin\frac{\alpha-4\beta}{2} + \right. \\ \left. + \frac{4}{9}\sin\frac{\alpha-2\beta}{2} - \frac{1}{162}\sin\left(\frac{3\alpha}{2} - 2\beta\right) + \frac{4}{81}\sin\left(\frac{3\alpha}{2} - \beta\right) + \frac{4}{9}\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) + \right. \\ \left. + \frac{4}{81}\sin\left(\frac{3\alpha}{2} + \beta\right) - \frac{1}{162}\sin\left(\frac{3\alpha}{2} + 2\beta\right) - \frac{1}{18}\sin\frac{\alpha+4\beta}{2} \right).$$

В соответствии со спектральным признаком Неймана, необходимое условие устойчивости разностной схемы (4) по начальным данным выполнено, если  $|\lambda| \leq 1$ . Таким образом, применив метод замороженных коэффициентов для функций  $D(u)$  и  $K(x, y, t)$ , получим условие ограничения величины шага разностной схемы (4) по времени для  $D(u) > 0$ ,  $K(x, y, t) \leq 0$ :

$$0 < \tau \leq \min_{\alpha, \beta} \left[ \frac{h_x^2 h_y^2}{D(q_1(\alpha, \beta)h_x^2 + q_2(\alpha, \beta)h_y^2) - 0.5Kh_x^2 h_y^2} \right], \begin{cases} D = \max_{(x, y, t) \in G_u} D(u(x, y, t)), \\ K = \min_{(x, y, t) \in G_u} K(u(x, y, t)). \end{cases} \quad (41)$$

$$q_1(\alpha, \beta) = \frac{(5 + \cos\beta) \cdot \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2 + \cos\beta}, q_2(\alpha, \beta) = \frac{(5 + \cos\alpha) \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) (7 - \cos\beta) \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2(2 + \cos\alpha)(2 + \cos\beta)};$$

На основе (41) выпишем консервативное условие устойчивости разностной схемы по начальным данным:

$$0 < \tau \leq \frac{h_x^2 h_y^2}{4D(h_x^2 + h_y^2) - 0.5Kh_x^2 h_y^2}, D = \max_{(x, y, t) \in G_u} D(u(x, y, t)), K = \min_{(x, y, t) \in G_u} K(u(x, y, t)). \quad (42)$$

#### 4. Вычислительный эксперимент: сравнение численного и точного аналитического решения

С целью экспериментального подтверждения теоретически найденного значения порядка аппроксимации, которое обеспечивает представленный численный метод, для аналитически заданных функций  $u(x, y, t)$ ,  $D(u)$ ,  $K(x, y, t)$ ,  $\alpha(t)$  была проведена оценка порядка аппроксимации по правилу Рунге. Рассмотрим двухточечную и трехточечную оценки по правилу Рунге.

Определим аналитические функции в модельной задаче для тестирования:

$$u(x, y, t) = T_0 + A \cdot \sin\left(\frac{2\pi y}{y_L} + \omega t\right) \cdot \cos(k_c x), D(u) = 1 + ku, k = const, \quad (43)$$

$$K(x, y, t) = C_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi y}{y_L}\right) + C_2 \cdot \cos(kx), \alpha_1(t) = \frac{-D(u(x_L, y, t_n)) \frac{\partial u(x_L, y, t_n)}{\partial x}}{u(x_L, y, t_n)};$$

Вспомогательная функция для обеспечения тождественного равенства:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(t, x, y) dx dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (D(u) \frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (D(u) \frac{\partial u}{\partial y}) - Ku \right) dx dy. \quad (44)$$

В рамках двухточечной схемы Рунге для оценки порядка аппроксимации будем вычислять отношения ошибок  $p_2 = \frac{\ln(Err_u[h_1] / Err_u[h_2])}{\ln(h_1 / h_2)}$  между численными и аналитическими решениями на сетках с  $N/2$  и  $N$  узлами ( $h_1 / h_2 = 2$ ). С целью вычисления ошибок применим норму  $L_2$ :

$$Err_u[h] = \| u^{числ.} - u^{аналит.} \|_{L_2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} (u_{i,j}^{числ.} - u_{i,j}^{аналит.})^2 h_x h_y}. \quad (45)$$

В рамках трехточечной схемы Рунге для оценки порядка аппроксимации будем вычислять отношения ошибок  $p_3 = \log_2 \left( \frac{Err_u[h-h/2]}{Err_u[h/2-h/4]} \right)$  на сетках с  $N/4$ ,  $N/2$  и  $N$  узлами. С целью вычисления ошибок для численных  $u_{i,j}^{числ.}$  при уменьшении шага в два раза применим норму  $L_2$ , нормирующую индексы для грубой и уточненной сетки, где  $N_x, N_y$  соответствуют грубой сетке:

$$Err_u[h-h/2] = \| u_h - u_{h/2} \|_{L_2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} (u_h(i, j) - u_{h/2}(2i, 2j))^2 h_x h_y}. \quad (46)$$

Полученные параметры  $p_2$  и  $p_3$ , соответствующие двухточечной и трехточечной схемам Рунге для оценки порядка аппроксимации метода, представлены в табл. 1.

**Таблица 1.** Результаты оценки порядка аппроксимации по правилу Рунге

$N_x$	$N_y$	$h$	$h_x = 5h$	$h_y = 4h$	$Err(u)$	$p_2$	$p_3$	$\tau$
8	10	2,50E-02	1,25E-01	1,00E-01	3,79E+00	NaN	NaN	7,63E-10
16	20	1,25E-02	6,25E-02	5,00E-02	1,16E-01	5,0353	NaN	7,63E-10
32	40	6,25E-03	3,13E-02	2,50E-02	7,33E-03	3,9798	5,0059	7,63E-10
64	80	3,13E-03	1,56E-02	1,25E-02	4,10E-04	4,1603	3,94	7,63E-10
128	160	1,56E-03	7,81E-03	6,25E-03	2,32E-05	4,1442	4,1414	7,63E-10
256	320	7,81E-04	3,91E-03	3,13E-03	1,49E-06	3,9638	4,1376	7,63E-10



Как видно из результатов серии экспериментов, оценки порядка сходимости, полученные по двухточечной (параметр  $p_2$ ) и трехточечной (параметр  $p_3$ ) схемам Рунге, стабилизируются в окрестности значения 4, что свидетельствует о четвертом порядке аппроксимации представленного численного метода.

## 5. Заключение

В статье представлена разностная схема численного интегрирования смешанной начально-краевой задачи для двумерного уравнения диффузии в квазилинейной постановке. Рассмотренный численный метод является обобщением представленного ранее [25] численного метода для одномерного параболического дифференциального уравнения. Разностная схема обеспечивает четвертый порядок пространственной аппроксимации, что подтверждается как теоретическими расчетами, так и результатами, полученными в рамках проведения серии вычислительных экспериментов. По переменной  $x$  операторы разностной схемы строятся на шаблоне, контрольный объем которого равен  $2h_x$ . Также найдено условие устойчивости в случае применения явной схемы для шага по времени. Предлагаемая методика построения разностной схемы позволяет применить аналогичный подход в случае трехмерной задачи с сохранением четвертого порядка пространственной аппроксимации.

## Список источников

1. Самарский А. А. Вабищевич П. Н. Аддитивные схемы для задач математической физики. М.: Наука, 2001. 319 с. ISBN 5-02-006505-6., С. 235.
2. Ковеня В. М. Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэродинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014.
3. Яненко Н. Н. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959. 125, № 6. С. 1207–1210.
4. Яненко Н. Н. О сходимости метода расщепления для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Вып. 2, № 5. С. 933–937.
5. Самарский А. А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Т. 2. С. 787–811.
6. Дьяконов Е. Г. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Вып. 2, № 4. С. 549–568.
7. Самарский А. А. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1963. Вып. 3, № 3. С. 431–466.
8. Hubbard B. Some locally one-dimensional difference schemes for parabolic equations in an arbitrary region // Math. Comp. 1966. Vol. 20. P. 53–59.
9. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1967.
10. Лекомцев А. В., Пименов В. Г. Сходимость метода переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 102–118.
11. Xiao-Yu L., Bao-Lin Z. Local one-dimensional ase-i scheme for 2D diffusion equation. Wuhan Univ. J. of Nat. Sci. 1, С. 515–521 (1996).

12. Wu Yu, Ge Yongbin, Zhang Lin, A high-order compact LOD difference method for solving the two-dimensional diffusion reaction equation with nonlinear source term // Journal of Computational Science. 2022. Vol. 62. 101748.
13. Шхануков-Лафишев М. Х. Локально-одномерная схема для нагруженного уравнения теплопроводности с краевыми условиями III рода // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, № 7, С. 1223–1231.
14. Douglas Jr. J., Rachford H. H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. Vol. 82. P. 421–439.
15. Chang M. J., Chow L. C., Chang W. S. (1991): Improved alternating-direction implicit method for solving transient three-dimensional heat diffusion problems, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology, 19:1, 69–84.
16. Momoniat E., Harley C. Peaceman-Rachford ADI Scheme for the Two-Dimensional Flow of a Second-Grade Fluid // International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow. 2012. Vol. 22, iss: 2. P. 228–242
17. Rubin S., Graves R. A. Viscous flow solutions with cubic spline approximation // Comput. Fluids. 1975. Vol. 3, № 1. P. 1–36.
18. Русаков С. В. Разностные сплайн-схемы для задач тепло- и массопереноса. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. С. 95–102.
19. Казаков В. А. Об одном подходе к применению В-сплайнов в схемах расщепления для решения уравнений Навье–Стокса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1988. Т. 28, № 7. С. 1038–1046.
20. Ковеня В. М., Слюняев А. Ю. Модификации алгоритмов расщепления для решения уравнений газовой динамики и Навье–Стокса // ЖВТ. 2007. Т. 12, №3, С. 71–86.
21. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. Т. 1, № 3. С. 425–440.
22. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П. Разностные схемы повышенного порядка точности на неравномерных сетках // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 2. С. 269–280.
23. Čiegis R., Suboč O. High order compact finite difference schemes on nonuniform grids // Applied Numerical Mathematics. 2018. Vol. 132. С. 205–218.
24. Rusakov S. V., Gilev, V. G., Rakhmanov, A. Y. Diffusion-Kinetic Model for Curing of Epoxy Polymer. In: Domoshnitsky, A., Rasin, A., Padhi, S. (eds) Functional Differential Equations and Applications. FDEA // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2019. Vol. 379. Springer, Singapore.
25. Толстых А. И. О мультиоператорном методе построения аппроксимаций и схем произвольно высокого порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 1. С. 56–73.
26. Русаков С. В., Рахманов А. Ю. Сплайн-схема повышенного порядка точности для интегрирования диффузионно-кинетических уравнений // Математические методы в технологиях и технике. 2024. № 2. С. 13–16.
27. Русаков С. В. Разностные сплайн-схемы для задач тепло- и массопереноса. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. С. 8–16.
28. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошников В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. С. 96–101.
29. Demko S., Moss W. F., Smith P. W. Decay Rates for Inverses of Band Matrices // Mathematics of Computation. 1984. Vol. 43, iss. 168. P. 491–499. DOI:10.1090/S0025-5718-1984-0758197-9.

## References

1. Samarskii, A. A. and Vabishchevich, P. N. (2001), *Additivnye skhemy dlya zadach matematicheskoy fiziki* [Additive schemes for mathematical physics problems], Nauka, Moscow, Russia, pp. 235.
2. Kovenya, V. M. (2014), *Algoritmy rasshchepleniya pri reshenii mnogomernykh zadach aerogidrodinamiki* [Splitting Algorithms for Solving Multi-Dimensional Problems of Aerohydrodynamics], Siberian branch of RAS, Novosibirsk, Russia.
3. Yanenko, N. N. (1959), "A difference method of calculating the multidimensional equations of heat conduction", *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, vol. 125, no 6, pp. 1207–1210.
4. Yanenko, N. N. (1962) "On the convergence of the splitting method for the heat conductivity equation with variable coefficients", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, vol. 2, no. 5, pp. 933–937.
5. Samarskii, A. A. (1962) "On an economical difference method for the solution of a multidimensional parabolic equation in an arbitrary region", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, vol. 2, no. 5, pp. 787–811.
6. Diakonov, E. G. (1962) "Difference schemes with a splitting operator for nonstationary equations", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, vVol. 2, no. 4, pp. 549–568.
7. Samarskii, A.A. (1963), "Local one-dimensional difference schemes on non-uniform nets", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, vol. 3, no. 3, pp. 431–466.
8. Hubbard, B. (1966), "Some locally one-dimensional difference schemes for parabolic equations in an arbitrary region", *Math. Comp.*, vol. 20, pp. 53–59.
9. Yanenko, N. N. (1967), *Metod drobnnykh shagov resheniya mnogomernykh zadach matematicheskoy fiziki* [Fractional step method for solving multidimensional problems in mathematical physics], Siberian branch of RAS, Novosibirsk, Russia.
10. Lekomtsev, A. V. and Pimenov, V. G. (2010), "Convergence of the alternating direction method for the numerical solution of a heat conduction equation with delay", *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 16, no. 1, pp. 102–118.
11. Xiao-Yu L., Bao-Lin Z. (1996), "Local one-dimensional ase-i scheme for 2D diffusion equation", *Wuhan Univ. J. of Nat. Sci.*, vol. 1, pp. 515–521.
12. Wu, Yu, Ge, Y. and Zhang, L. (2022), "A high-order compact LOD difference method for solving the two-dimensional diffusion reaction equation with nonlinear source term", *Journal of Computational Science*, vol. 62, P. 101748.
13. Shhanukov-Lafishev, M. H. (2009), "Locally one-dimensional scheme for a loaded heat equation with Robin boundary conditions", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, vol. 49, no. 7, pp. 1223–1231; *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 49, no. 7, pp. 1167–1174.
14. Douglas, Jr. J. and Rachford, H. H. (1956), "On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables", *Trans. Amer. Math. Soc*, vol. 82, pp. 421–439.
15. Chang, M. J., Chow, L. C. and Chang, W. S. (1991), "Improved alternating-direction implicit method for solving transient three-dimensional heat diffusion problems", *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology*, vol. 19, no.1, pp. 69–84.
16. Momoniat, E. and Harley C. (2012), "Peaceman-Rachford ADI Scheme for the Two-Dimensional Flow of a Second-Grade Fluid", *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, vol. 22, pp. 228–242.
17. Rubin, S. and Graves, R. A. (1975), "Viscous flow solutions with cubic spline approximation", *Comput. Fluids.*, vol. 3, no 1, pp. 1–36.

18. Rusakov, S. V. (1990), *Raznostnye splajn-skhemyy dlya zadach teplo- i massoperenosa* [Difference Spline Schemes for Heat and Mass Transfer Problems], Izd. Irkutsk. Univ., Irkutsk, Russia, pp. 95–102.
19. Kazakov, V. A. (1988), "An approach to using B splines in splitting schemes to solve the Navier–Stokes equations", *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, vol. 28, no 7, pp. 1038–1046.
20. Kovenya, V. M. and Slyunyaev, A. Yu. (2007), "Modifications of splitting algorithms for solving the equations of gas dynamics and Navier-Stokes", *Zhurnal Vychislitel'nye tekhnologii*, vol. 12, no 3, pp. 71–86.
21. Tikhonov, A. N. and Samarskii, A. A. (1961), "Homogeneous difference schemes of high order of accuracy on non-uniform sets", *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, vol. 1, no 3, pp. 425–440.
22. Samarskii, A. A., Vabishchevich, P. N. and Matus, P. P. (1996), "Difference schemes of high order of precision on irregular grids", *Different. Urav.*, vol. 32, no 2, pp. 269–280.
23. Čiegis, R. and Suboč, O. (2018), "High order compact finite difference schemes on nonuniform grids", *Applied Numerical Mathematics*, vol. 132, pp. 205–218.
24. Rusakov, S. V., Gilev, V. G. and Rakhmanov, A. Y. (2021), "Diffusion-Kinetic Model for Curing of Epoxy Polymer", *In: Domoshnitsky, A., Rasin, A., Padhi, S. (eds) Functional Differential Equations and Applications. FDEA 2019. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol. 379, Springer, Singapore.
25. Tolstykh, A. (2011), "On the Multioperator Method for Constructing Approximations and Finite Difference Schemes of an Arbitrarily High Order", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 51, no 1, pp. 56–73.
26. Rusakov, S. V. and Rakhmanov, A. Yu. (2024), "A spline scheme of an increased order of accuracy for the integration of diffusion-kinetic equations", *Matematicheskie metody v tekhnologii i tekhnike*, no 2, pp. 13–16.
27. Rusakov, S. V. (1990), *Raznostnye splajn-skhemyy dlya zadach teplo- i massoperenosa* [Difference Spline Schemes for Heat and Mass Transfer Problems], Izd. Irkutsk. Univ., Irkutsk, Russia, pp. 8–16.
28. Zavialov, Yu. S., Kvasov, B. I. and Miroshnichenko, V. L. (1980), *Metody splajn funktsij* [Methods of spline-functions], Nauka, Moscow, Russia, pp. 96–101.
29. Demko, S., Moss, W. F. and Smith, P. W. (1984), "Decay Rates for Inverses of Band Matrices", *Mathematics of Computation*, v. 43(168), P. 491–499. DOI:10.1090/S0025-5718-1984-0758197-9.

#### **Информация об авторах:**

А. Ю. Рахманов – аспирант направления "Информатика и вычислительная техника" физико-математического института Пермского государственного национально-исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), AuthorID: 1238074, ORCID: 0009-0001-3332-2124, Scopus ID: 57226198082, Web of Science ResearcherID: KSM-1753-2024;

С. В. Русаков – доктор физико-математических наук, профессор, профессор центра прикладной математики и физики физико-математического института Пермского государственного национально-исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), AuthorID: 16433, ORCID: 0000-0001-6862-1100, Scopus ID: 56085029200, Web of Science ResearcherID: JYP-8622-2024.

#### **Information about the authors:**

A. Yu. Rakhmanov – Postgraduate student in Computer Science and Computer Engineering, Physics and Mathematics Institute of Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia,

614068), AuthorID: 1238074, ORCID: 0009-0001-3332-2124, Scopus ID: 57226198082, Web of Science ResearcherID: KSM-1753-2024;

S. V. Rusakov – Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Professor of Applied Mathematics and Physics Center, Physics and Mathematics Institute of Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068), AuthorID: 16433, ORCID: 0000-0001-6862-1100, Scopus ID: 56085029200, Web of Science ResearcherID: JYP-8622-2024.

Научная статья

УДК 004.942

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-102-110

<https://elibrary.ru/amekjl>



## Моделирование отсрочки поимки цели в АДТ-игре с тремя защитниками

Александр Сергеевич Самохин

Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва,  
Россия  
[samokhin@ipu.ru](mailto:samokhin@ipu.ru)

**Аннотация.** Рассматривается вариант Attacker-Defender-Target задачи с тремя защитниками. Задача рассматривается в простых движениях в плоской постановке: цель и защитники движутся прямолинейно с постоянной скоростью. Начальное положение цели и атакующего задано. В этом случае движение цели определяется её начальным вектором скорости, а защитников – моментом и углом выпуска. Считается, что все защитники выпускаются сразу в начальный момент времени обнаружения атаки, так как их выпуск позже может быть шумным и демаскировать цель для атакующего. Защитники представляют собой ложные цели, фактически задача заключается в определении таких траекторий защитников, при которых атакующий вначале занимается их перехватом, и только после этого переключается на преследование основной цели. Тем самым время перехвата основной цели увеличивается, и при некоторых значениях параметров она может стать недостижима для имеющего ограниченный запас энергоресурса атакующего. В исследовании рассматривается модель работы системы самонаведения автономного атакующего аппарата, основанная на пропорциональной навигации, при этом сначала атакующий решает задачу совместного преследования целей, затем обходит цели по очереди. Разработан программный комплекс, проведено численное моделирование, определены оптимальные углы выпуска трех защитников для различных курсовых углов цели. Для каждого из рассмотренных случаев найдено решение, при котором атакующему не хватает энергоресурса для перехвата основной цели.

**Ключевые слова:** преследование; система самонаведения; использование защитников; автономный аппарат; оптимизация; численное моделирование; перехват; АДТ; пропорциональная навигация; ложная цель.

**Для цитирования:** Самохин А. С. Моделирование отсрочки поимки цели в АДТ-игре с тремя защитниками // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 3(70). С. 102–110. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-102-110. <https://elibrary.ru/amekjl>.

**Благодарности:** работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 23-19-00134.

Статья поступила в редакцию 29.04.2025; одобрена после рецензирования 21.05.2025; принята к публикации 26.09.2025.



Research article

## Modeling of the Target Interception Delay in an ADT-Game With Three Defenders

Alexander S. Samokhin

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
samokhin@ipu.ru

**Abstract.** The paper considers a variant of the flat Attacker-Defender-Target problem with 3 defenders. The problem is considered in simple motions in a flat setting: the target and the defenders move rectilinearly with constant velocity. The initial position of the target and the attacker is given. In this case, the motion of the target is determined by its initial velocity vector, and that of the defenders by the momentum and angle of release. All defenders are considered to be released immediately at the initial time of attack detection, as their release later may be noisy and de-mask the target for the attacker. The defenders are false targets (decoys). In fact, the task is to determine such trajectories of the defenders that the attacker first intercepts them and only then switches to pursuit of the main target. In this way, the time to intercept the primary target increases, and at some parameter values it may become unattainable for an attacker with limited energy resources. The study considers a model of the operation of the homing system of an autonomous attack vehicle based on proportional navigation, with the attacker first solving the problem of joint pursuit of targets, then circling the targets one by one. A software package was developed, numerical simulations were performed, and the optimal release angles of 3 defenders were determined for different target heading angles. For each of the cases considered, a solution was found in which the attacker lacks the energy resource to intercept the main target.

**Keywords:** *pursuit; homing system; use of defenders; autonomous vehicle; optimization; numerical simulation; interception; ADT; proportional navigation; decoy.*

**For citation:** Samokhin, A. S. (2025), "Modeling of the Target Interception Delay in an ADT-Game With Three Defenders", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(70), pp. 102–110, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-102-110, <https://elibrary.ru/amekjl>.

**Acknowledgments:** the work was supported by the Russian Science Foundation, Project № 23-19-00134.

*The article was submitted 29.04.2025; approved after reviewing 21.05.2025; accepted for publication 26.09.2025.*

### Введение

Существуют различные способы защиты подвижного объекта в водной среде от мобильного атакующего, оснащенного системой самонаведения: маневр уклонения, выпуск ловушки, генерирующей пузырьки [1], использование пассивных ложных целей, отражающих гидроакустический сигнал, буксируемых постановщиков гидроакустических помех (jammer, towed decoy, towed acoustic countermeasures, false-target generator) [2, 3], активный защитник, который перехватывает атакующего (hard-kill) [3], активная ложная цель (decoy) [4–5].

В настоящей статье рассматривается случай активной защиты, в то время как основная цель уклоняется от атаки, она может выпустить три ложных цели. Ложные цели отвлекают внимание атакующего, вынуждают атакующего тратить энергоресурс на свою поимку, и позволяют тем самым основной цели уйти от перехвата атакующим в связи с исчерпанием его запаса хода (soft-kill). В таком случае взаимодействие объектов может

быть математически описано как ADT-игра (Attacker–Defender–Target), "атакующий – защитник – цель" [6–11].

В [8] приводится обзор методов определения управления для каждого из игроков ADT-игры. Управление может определяться на основе как нейросетевых [8, 9], так и классических подходов. В статье [10] Рубиновичем Е. Я. задача решена геометрически – найдено управление, при котором защитник, обладающий большей маневренностью, чем цель, гарантированно перехватит атакующего на его пути движения к цели.

В работах [11–13] ADT-игры исследуются на основе подхода теории дифференциальных игр, предполагается, что защитник движется быстрее цели.

В большинстве исследований каждая из сторон "атакующий – защитник – цель" представлена одним игроком. Отметим работы [12, 13], в которых проанализирована игра в случае двух атакующих. В [14] при этом решается уравнение Риккати. В работе [15] рассмотрен случай сразу нескольких преследователей, в статье [16] исследовалась дифференциальная игра с несколькими нападающими, несколькими защитниками в случае неподвижной цели.

Настоящая работа является развитием [17], в которой рассматривалась ADT-игра в плоской постановке при использовании одного или двух защитников, движущихся медленнее цели и атакующего, на случай трех защитников.

## 1. Постановка задачи

Все игроки представляют собой материальные точки. Перемещение цели и защитников рассматривается в простых движениях. В декартовой системе координат движение цели описывается соотношениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_T = v_T \cos(\gamma_T), \\ \dot{y}_T = v_T \sin(\gamma_T), \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $(x_T(t), y_T(t)) = \mathbf{r}_T(t)$  – координаты цели в момент времени  $t$ , при этом  $x_T(0) = y_T(0) = 0$ .

Движение защитников описывается аналогичными соотношениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_{Di} = v_D \cos(\gamma_{Di}), \\ \dot{y}_{Di} = v_D \sin(\gamma_{Di}), \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $i=1..3$ ,  $(x_{Di}(t), y_{Di}(t)) = \mathbf{r}_{Di}(t)$  – координаты  $i$ -го защитника в момент времени  $t$ ,

Автономный атакующий аппарат движется с постоянной скоростью и в качестве системы самонаведения использует пропорциональную навигацию [18–20]. Его перемещение задается уравнением:

$$\dot{\mathbf{r}}_A(t) = v_A(t) \frac{\hat{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{r}_A(t)}{|\hat{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{r}_A(t)|}, \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{r}_A(t)$  – положение атакующего в момент времени  $t$ ,  $\hat{\mathbf{r}}(t)$  – положение выбранной для преследования цели. Вначале атакующий движется к центру масс всех видимых объектов, осуществляя совместное преследование, т.е.  $\hat{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{4}(\mathbf{r}_T(t) + \mathbf{r}_{D1}(t) + \mathbf{r}_{D2}(t) + \mathbf{r}_{D3}(t))$ . Далее атакующий преследует объекты отдельно, по очереди, пока не поразит основную цель или пока у него не закончится энергоресурс, т.е. пока не наступит момент времени  $T_{\max}$ .

Курсовой угол цели  $\gamma_T$  полагается постоянным, углы выпуска защитников  $\gamma_{Di}$  оптимизируются с целью максимизации времени перехвата цели атакующим:



$$T \rightarrow \max. \quad (1.4)$$

## 2. Методы исследования

Положения цели и защитников в любой момент времени вычисляются аналитически по формулам (1.1)–(1.2). Для определения траектории атакующего необходимо интегрировать уравнение (1.3), что в работе осуществлялось численно методом Рунге–Кутты с автоматическим выбором шага. Корректность работы метода была проверена на тестовых примерах с известным ответом.

На первом этапе преследования на каждом шаге интегрирования сравнивалось расстояние  $l = |\mathbf{r}_A(t) - \hat{\mathbf{r}}(t)|$  между атакующим и центром масс коалиции цели и защитников со всеми расстояниями между игроками коалиции  $l_{ij}$ . В случае существования таких  $i, j$ , что  $l > l_{ij}$ , начинался второй этап преследования, на котором атакующий переключался с преследования центра масс на поочередное преследование ближайших целей. Ближайшая цель при этом определялась на каждом шаге интегрирования, атакующий мог переключаться между ними.

На каждом шаге обоих этапов преследования определялись расстояния от атакующего до ложных целей и в случае, если оказывалось, что расстояние до  $i$ -го защитника меньше  $\varepsilon$ , то атакующий распознает его как ложную цель и далее этот защитник не оказывает на него влияние, движение же самого  $i$ -го защитника в этот момент прекращается.

Оптимизируемые углы выпуска защитников  $\gamma_{Di}$  перебирались на сетке их возможных значений с измельчением данной сетки в окрестности максимумов функционала (1.4), полученных при решении на более грубой сетке.

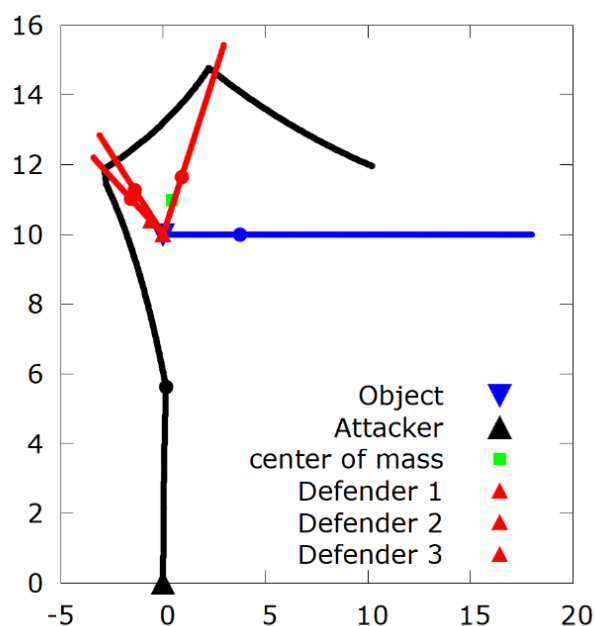
Игра заканчивалась проигрышем коалиции цели и защитников в момент времени  $\tau$ :  $\mathbf{r}_A(\tau) = \mathbf{r}_T(\tau)$ ,  $\tau < T_{\max}$ , такой что в этот момент происходит поражение цели атакующим или выигрышем коалиции по полной выработке энергоресурса атакующим в момент  $t = T_{\max}$ , если к этому моменту цель не была достигнута атакующим.

В случае проигрыша атакующего, вычислялось расстояние между ним и целью на момент окончания игры  $d(T_{\max})$ , а также проводилось дальнейшее моделирование до перехвата им цели в некоторый момент  $T$  в предположении о неограниченности энергоресурса атакующего, что всегда возможно при условии  $v_A > v_T$ .

## 3. Результаты численного моделирования

Моделирование проводилось для обезразмеренных значений параметров:  $v_D = 0.3$ ,  $v_T = 0.6$ ,  $v_A = 0.9$  – скорости игроков,  $d(0) = 10$  – начальное расстояние между атакующим и целью,  $T_{\max} = 30$  – запас энергоресурса атакующего,  $\varepsilon = 1$  – расстояние на котором атакующий распознает защитника как ложную цель.

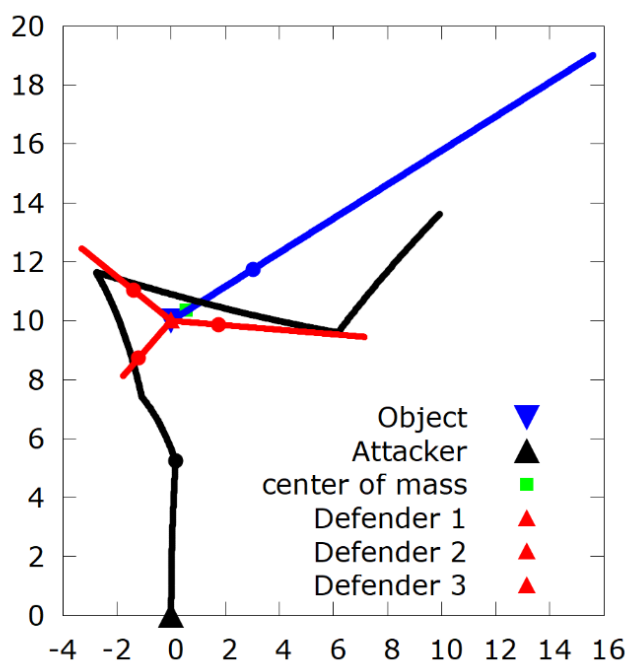
На рисунках 1–3 закрашенными кругами отражено положение всех игроков в момент перехода атакующего от совместного преследования к поочередному, квадратам – центр масс сигналов коалиции в этот момент времени, треугольниками – начальное положение цели, защитников и атакующего. Черной линией показана траектория движения атакующего, синей – цели, красными – защитников.



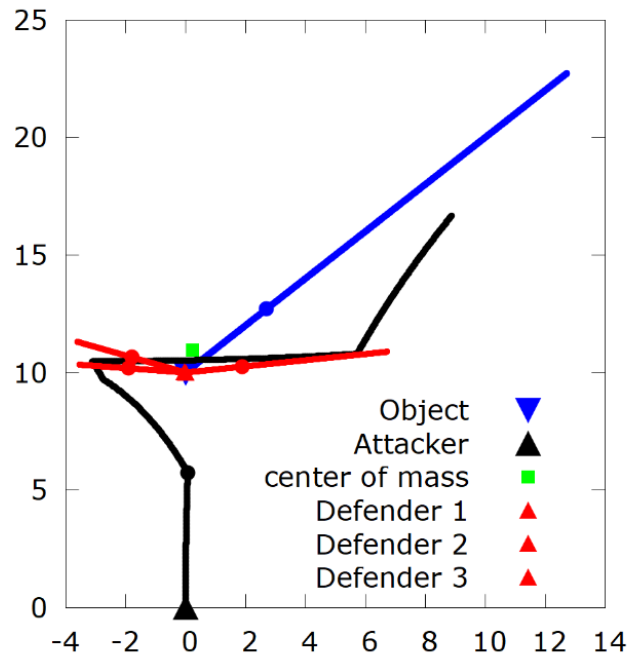
**Рис. 1.** Траектории движения атакующего, цели, трех защитников, соответствующие оптимальным углам выпуска защитников для курсового угла цели  $\gamma_T = 0^\circ$

В случае курсового угла цели  $\gamma_T = 0^\circ$  оптимальными углами выпуска трех защитников оказались  $61.36^\circ$ ,  $137.56^\circ$  и  $147.17^\circ$  соответственно. При этом  $d(T_{\max}) = 8.04$ ,  $T = 56.49$ , см. рис. 1.

В случае  $\gamma_T = 30^\circ$  оптимальными углами выпуска защитников оказались  $-133.40^\circ$ ,  $-4.38^\circ$  и  $143.41^\circ$ . При этом  $d(T_{\max}) = 7.82$ ,  $T = 55.78$ , см. рис. 2.



**Рис. 2.** Траектории движения атакующего, цели, трех защитников, соответствующие оптимальным углам выпуска защитников для курсового угла цели  $\gamma_T = 30^\circ$



**Рис. 3.** Траектории движения атакующего, цели, трех защитников, соответствующие оптимальным углам выпуска защитников для курсового угла цели  $\gamma_T = 45^\circ$

В случае  $\gamma_T = 45^\circ$  оптимальными углами выпуска защитников оказались  $7.47^\circ$ ,  $160.12^\circ$  и  $174.65^\circ$ . При этом  $d(T_{\max}) = 7.19$ ,  $T = 53.75$ , см. рис. 3.

Отметим, что в каждом из рассмотренных случаев атакующему хватает энергоресурса для перехвата цели в случае отсутствия защитников.

В результате проведенного численного моделирования, в котором оптимизировался выпуск защитников, во всех трех рассмотренных случаях получены сценарии выпуска защитников, при которых атакующий не сумеет догнать цель до исчерпания своего энергоресурса, что означает целесообразность выпуска ложных целей для защиты от атакующего, оснащенного системой самонаведения.

#### 4. Заключение

В работе рассмотрена ADT-игра пяти игроков: атакующего и коалиции из цели и трех защитников. Динамика задачи рассматривается в простых движениях, цель и защитники движутся прямолинейно. Атакующий оснащен системой самонаведения, его траектория определяется законом пропорциональной навигации.

Проведено численное моделирование для трех различных курсовых углов цели, найдены оптимальные углы выпуска защитников, позволяющие максимально отсрочить поимку цели атакующим. В каждом из случаев найдены решения для коалиции, при которых атакующий последовательно преследует ложные цели и в итоге ему не хватает энергоресурса для перехвата основной цели.

В качестве развития работы задача может быть рассмотрена в 3-мерной постановке с более сложной динамикой объектов, с ограничением на время выпуска защитников, может быть исследован вопрос оптимизации угла маневра защищаемого объекта и проанализирован случай нескольких атакующих.

## Список источников

1. *Liu F., Dong X., Li Q., Ren Z.* Cooperative differential games guidance laws for multiple attackers against an active defense target // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2021. Vol. 35(11). P. 374–389. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2021.07.033>.
2. *Galdorisi G., Truver S. C.* America (LHA-6) Class: Opportunities & Challenges // *Naval Engineers Journal*. 2020. Vol. 132. № 4. P. 71–83.
3. *Jomon G., Sinchu, P., Kumar K., Santhanakrishnan T.* Towed Acoustic Countermeasures for Defending Acoustic Homing Torpedoes // *Defence science journal*. 2019. Vol. 69, № 6. P. 607–612. DOI: 10.14429/dsj.69.13337.
4. *Zhan K., Yu B., Wang J.* Simulations of the Anti-Torpedo Tactic of the Conventional Submarine Using Decoys and Jammers // *Applied Mechanics and Materials*. 2011. Vol. 65. P. 165–168. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.65.165.
5. *Jomon G., Jojish J. V., Santhanakrishnan T.* System of Systems Architecture for Generic Torpedo Defence System for Surface Ships // *Advances in Military Technology*. 2019. Vol. 14, № 2. P. 307–319. DOI: 10.3849/aimt.01330.
6. *Pachter M., Garcia E., Casbeer D.W.* Toward a Solution of the Active Target Defense Differential Game // *Dyn Games Appl.* 2019. Vol. 9. P. 165–216. DOI: 10.1007/s13235-018-0250-1. EDN: YVMEJV.
7. *García E., Casbeer D., Pachter M.* The Complete Differential Game of Active Target Defense // *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2021. Vol. 191. P. 1–25. DOI: 10.1007/s10957-021-01816-z. EDN: PCQWLU.
8. *Gong X., Chen W., Chen Z.* Intelligent Game Strategies in Target-Missile-Defender Engagement Using Curriculum-Based Deep Reinforcement Learning // *Aerospace*. 2023. Vol. 10, № 2. Art. № 133. 21 P. DOI: 10.3390/aerospace10020133. EDN: WZLPIB.
9. *English J. T., Wilhelm J.* Defender-Aware Attacking Guidance Policy for the Target-Attacker-Defender Differential Game // *Journal of Aerospace Information Systems*. 2021. Vol. 18. № 6. P. 366–376. DOI: 10.2514/1.I010877. EDN: UOMOQV.
10. *Rubinovich E.Ya.* Missile-Target-Defender Problem with Incomplete a priori Information // *Dynamic Games and Applications (Special Issue)*. 2021. Vol. 9. № 17. P. 851–857. DOI: 10.1007/s13235-019-00297-0.
11. *Alkaher D., Moshaiov A.* Game-Based Safe Aircraft Navigation in the Presence of Energy-Bleeding Coasting Missile // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2016. Vol. 39. P. 1539–1550. DOI: 10.2514/1.G001676.
12. *García E., Casbeer D. W., Pachter M.* Active Target Defense Differential Game with a Fast Defender // *IET Control Theory and Applications*. 2017. Vol. 17, № 11. P. 2985–2993. DOI: 10.1049/iet-cta.2017.0302.
13. *Liu F., Dong X., Li Q., Ren Z.* Cooperative differential games guidance laws for multiple attackers against an active defense target // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2022. Vol. 35. P. 374–389. DOI: 10.1016/j.cja.2021.07.033. EDN: VOTPXS.
14. *Liang H., Wang J., Liu J., Liu P.* Guidance strategies for interceptor against active defense spacecraft in two-on-two engagement // *Aerospace Science and Technology*. 2020. Vol. 96, Art. № 105529. 10 P. DOI: 10.1016/j.ast.2019.105529. EDN: IZLTJL.
15. *Zhou Z., Zhang W., Ding J., et al.* Cooperative pursuit with Voronoi partitions // *Automatica*. 2016. Vol. 72. P. 64–72. DOI: 10.1016/j.automatica.2016.05.007.
16. *Chen M., Zhou Z., Tomlin C.J.* Multiplayer reach-avoid games via pairwise outcomes // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2017. Vol. 62, № 3. P. 1451–1457. DOI: 10.1109/TAC.2016.2577619.

17. Галяев А.А., Самохин А.С., Самохина М.А. Моделирование отсрочки поимки цели в АДТ-игре с использованием одного или двух защитников // Проблемы управления. 2024. № 2. 83–94. DOI: 10.25728/pu.2024.2.7. EDN: GZFMGO.
18. García E., Casbeer D., Pham Kh., Pachter M. Cooperative Aircraft Defense from an Attacking Missile using Proportional Navigation // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. Kissimmee, Florida, 2015. P. 2926–2931. DOI: 10.2514/6.2015-0337.
19. Girard A., Kabamba P. Proportional Navigation: Optimal Homing and Optimal Evasion // SIAM Review. 2015. Vol. 57 P. 611–624. DOI: 10.1137/13094730120.
20. Palumbo N., Blauwkamp R., Lloyd J. Modern Homing Missile Guidance Theory and Techniques // Johns Hopkins APL Technical Digest. 2010. Vol. 29, № 1. P. 42–59.

## References

1. Liu, F., Dong, X., Li, Q. and Ren, Z. (2022), "Cooperative differential games guidance laws for multiple attackers against an active defense target", *Chinese Journal of Aeronautics*, vol. 35, pp. 374–389, <https://doi.org/10.1016/j.cja.2021.07.033>.
2. Galdorisi, G. and Truver, S. C. (2020), "America (LHA-6) Class: Opportunities & Challenges", *Naval Engineers Journal*, vol. 132, no. 4, pp. 71–83.
3. Jomon, G., Sinchu, P., Kumar, K. and Santhanakrishnan, T. (2019), "Towed Acoustic Countermeasures for Defending Acoustic Homing Torpedoes", *Defence science journal*, vol. 69, no. 6, pp. 607–612, <https://doi.org/10.14429/dsj.69.13337>.
4. Zhan, K., Yu, B. and Wang, J. (2011), "Simulations of the Anti-Torpedo Tactic of the Conventional Submarine Using Decoys and Jammers", *Applied Mechanics and Materials*, vol. 65, pp. 165–168, <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.65.165>.
5. Jomon, G., Jojish, J. V. and Santhanakrishnan, T. (2019), "System of Systems Architecture for Generic Torpedo Defence System for Surface Ships", *Advances in Military Technology*, vol. 14, no. 2, pp. 307–319, <https://doi.org/10.3849/aimt.01330>.
6. Pachter, M., Garcia, E. and Casbeer D. W. (2019), "Toward a Solution of the Active Target Defense Differential Game", *Dyn Games Appl.*, vol. 9, pp. 165–216, <https://doi.org/10.1007/s13235-018-0250-1>.
7. García, E., Casbeer, D. and Pachter, M. (2021), "The Complete Differential Game of Active Target Defense", *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 191, pp. 1–25, <https://doi.org/10.1007/s10957-021-01816-z>.
8. Gong, X., Chen, W. and Chen, Z., (2023) "Intelligent Game Strategies in Target-Missile-Defender Engagement Using Curriculum-Based Deep Reinforcement Learning", *Aerospace*, vol. 10, no 2(133), p. 21, <https://doi.org/10.3390/aerospace10020133>.
9. English, J. T. and Wilhelm, J. (2021), "Defender-Aware Attacking Guidance Policy for the Target–Attacker–Defender Differential Game", *Journal of Aerospace Information Systems*, vol. 18, no. 6, pp. 366–376, <https://doi.org/10.2514/1.I010877>.
10. Rubinovich, E.Ya. (2021), "Missile-Target-Defender Problem with Incomplete a priori Information", *Dynamic Games and Applications (Special Issue)*, vol. 9, no 17, pp. 851–857, <https://doi.org/10.1007/s13235-019-00297-0>.
11. Alkaher, D. and Moshaiov, A. (2016), "Game-Based Safe Aircraft Navigation in the Presence of Energy-Bleeding Coasting Missile", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 39, pp. 1539–1550, <https://doi.org/10.2514/1.G001676>.
12. García, E., Casbeer, D. W. and Pachter, M. (2017), "Active Target Defense Differential Game with a Fast Defender", *IET Control Theory and Applications*, vol. 17, no. 11, pp. 2985–2993, <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2017.0302>.
13. Kim, W., Shin, M., Park, J. and Bae, S. (2024), "A Simulator Development of Surface Warship Torpedo Defense System considering Bubble-Generating Wake Decoy", *J. KIMS Technol.*, vol. 27, no 3, pp. 416–42, <https://doi.org/10.9766/KIMST.2024.27.3.416>.

14. Liang, H., Wang, J., Liu, J. and Liu, P. (2020), "Guidance strategies for interceptor against active defense spacecraft in two-on-two engagement", *Aerospace Science and Technology*, vol. 96, art. no 105529, 10 p., <https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105529>.
15. Zhou, Z., Zhang, W., Ding, J., et al. (2016), "Cooperative pursuit with Voronoi partitions", *Automatica*, vol. 72, pp. 64–72, <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.05.007>.
16. Chen, M., Zhou, Z. and Tomlin, C.J. (2017), "Multiplayer reach-avoid games via pairwise outcomes", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 3, pp. 1451–1457, <https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2577619>.
17. Galyaev, A. A., Samokhin, A. S. and Samokhina, M. A. (2024), "Modeling of the Target's Interception Delay in an ADT Game with One or Two Defenders", *Control Sciences*, no 2, pp. 66–76, <http://doi.org/10.25728/cs.2024.2.7>.
18. García, E., Casbeer, D., Pham, Kh. and Pachter, M. (2015), "Cooperative Aircraft Defense from an Attacking Missile using Proportional Navigation", *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Kissimmee, Florida, pp. 2926–2931, <https://doi.org/10.2514/6.2015-0337>.
19. Girard, A. and Kabamba, P. (2015), "Proportional Navigation: Optimal Homing and Optimal Evasion", *SIAM Review*, vol. 57, pp. 611–624, <https://doi.org/10.1137/130947301>.
20. Palumbo, N., Blauwkamp, R. and Lloyd, J. (2010), "Modern Homing Missile Guidance Theory and Techniques", *Johns Hopkins APL Technical Digest*, vol. 29, no. 1, pp. 42–59.

#### **Информация об авторах:**

А. С. Самохин – кандидат физико-математических наук, член Академии навигации и управления движением, старший научный сотрудник 38 лаборатории "Управление по неполным данным" Института проблем управления имени В. А. Трапезникова Российской академии наук (117997, Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65), WoS Researcher ID: N-1400-2019, Scopus Author ID: 56150017500, РИНЦ Author ID: 1029494, ORCID: 0000-0002-0821-050X, Istina Researcher ID: 3497959.

#### **Information about the authors:**

A. S. Samokhin – candidate of physical and mathematical sciences, member of Academy of Navigation and Motion Control, senior researcher, 38 laboratory "Control based on incomplete data", V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (65 Profsoyuznaya street, Moscow, 117997, Russia), WoS Researcher ID: N-1400-2019, Scopus Author ID: 56150017500, RSCI Author ID: 1029494, ORCID: 0000-0002-0821-050X, Istina Researcher ID: 3497959.

Научный периодический журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" зарегистрирован в 2007 г. как самостоятельное издание, являющееся продолжением серии журнала "Вестник Пермского университета", издаваемого с 1994 г. В каждом номере научного журнала автору разрешается опубликование в любом разделе не более одной статьи, в том числе в соавторстве.

Статьи, оформленные в соответствии с нижеизложенными правилами, должны быть отправлены через **личный кабинет автора на сайте журнала**. Статьи отправляются в двух форматах: текстовый документ и pdf-файл без данных об авторе (для организации слепого рецензирования). Вместе с рукописью отправляются контактные данные авторов в свободной форме в текстовом документе (ФИО, должность, место работы с указанием полного адреса, e-mail, номер телефона), сопроводительное письмо и экспертное заключение о возможности открытого опубликования. Для публикации статьи необходимо заполнить и подписать согласие на обработку персональных данных и лицензионный договор.

**Аннотация статьи** (на русском и английском языках) должна содержать основные краткие сведения: описание проблемы, включая цели и задачи исследования; методы исследования с указанием новизны, если имеется; полученные результаты и выводы. Объем аннотации примерно 250 слов.

**Текст статьи** должен содержать разделы: Введение, Постановка задачи, Методы исследования, Результаты, Обсуждения, Заключение, **Благодарности** для русскоязычной статьи; Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion, Acknowledgements для англоязычной статьи. Объем рукописи – не менее 6 страниц машинописного текста.

**Оформление.** Текст статьи необходимо оформить **в редакторе Word**. Формат листа, используемый для написания статьи – А4. Размеры верхнего и нижнего полей – 2.6 см, правого и левого – 2.5 см. Расстояние до верхнего и нижнего колонтитулов 1.25 см. Шрифтом Times New Roman Сур, размер – 12 пт, межстрочный интервал – множитель 1.1. Подписи к рисункам и таблицам набираются курсивом, в конце заголовков и ячеек таблицы точка не ставится. Формулы набираются в редакторе формул.

#### Структура статьи

**Вид статьи** (научная, обзорная или др.).

**Название раздела** (математика, механика, компьютерные науки и информатика).

**УДК**

**DOI:**

**EDN**

**Название статьи на русском языке** (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

**Ф.И.О. автора (-ов) полностью** (Times New Roman – 12 pt, полужирный).

**Место работы (с указанием подразделения), город и страна** (шрифт Times New Roman – 11 пт), **e-mail**.

**Аннотация на русском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Ключевые слова на русском языке:** 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 11 пт, курсив).

**Информация для цитирования** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Благодарности** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Даты поступления, одобрения и принятия рукописи** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Название статьи на английском языке** (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

**На английском языке Ф.И.О. автора (-ов) полностью** (шрифт Times New Roman – 12 пт, полужирный).

**Место работы (с указанием подразделения), город и страна** на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт), **e-mail**.

**Аннотация на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Ключевые слова на английском языке:** 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 11 пт, курсив).

**Информация для цитирования на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Благодарности на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Даты поступления, одобрения и принятия рукописи на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Основной текст** статьи (шрифт Times New Roman – 12 пт) набирается в ширину страницы, абзацный отступ основного текста – 1.0 см (задается автоматически, не пробелами). Другие отступы не допускаются. Выравнивание текста по ширине.

**Список источников** оформляется в едином формате, в соответствии с ГОСТ Р 7.0.100–2018, без использования тире. Если в списке литературы используется источник из электронного ресурса, необходимо указать дату обращения. Ссылка на литературный источник указывается в тексте статьи в квадратных скобках после упоминания цитаты. Список использованных литературных источников необходимо представить на русском и английском языках (**References**). **Список литературы на латинице**, называемый References, готовится отдельно от Списка литературы и размещается сразу за указанным списком. Ссылки на зарубежные источники необходимо повторять в Списке литературы и References. В References недопустимо использовать российские ГОСТы. Необходимо следовать требованиям международных стандартов. Инструкция по оформлению списка литературы в латинице – References, стандарт "Harvard" находится по ссылке [http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-hurnal/metodicheskie\\_materialy/standart\\_Harvard.doc](http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-hurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc).

#### ПОРЯДОК РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ И ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ

Все рукописи проходят двойное слепое рецензирование двумя специалистами в научной области исследования. При возникновении спорной ситуации назначается третий рецензент. Окончательное решение о публикации рукописи принимает главный редактор журнала.

Датой поступления статьи считается день ее отправки через личный кабинет на сайте журнала или по электронной почте журнала (главного редактора). Рукописи рассматриваются в порядке их поступления в течение одного месяца в зависимости от сложности ситуации и объема работы. Редакция оставляет за собой право без согласования с автором проводить литературную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла.

Одобрённые статьи публикуются бесплатно. Полнотекстовая версия каждой рукописи выставляется на сайте журнала и в системе РИНЦ (e-library).

Scientific periodical journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" is published since 1994 in the series of the journal "Bulletin of Perm University". Then it was registered as an independent publication in 2007.

An author is allowed to publish no more than one article (also as co-author) in any section for each issue of the journal.

Article's structure should be accordant with the rules below and should be sent through the **author's personal account on the journal's website**. Articles should be sent in two formats: a text document and a pdf-file without information about the author(s) (for review). Authors contact data (name, position and place of work with address, e-mail, phone number in a text document), a cover letter and an expert letter on the open publication possibility should be sent with the manuscript. Author(s) must make and sign consent to the personal data processing and an agreement.

**Abstract** (in Russian and English) should contain main information of research: a problem including the goals and objectives of the study; research methods with novelty indication, if any; significant results and findings. The abstract size is approximately 250 words.

**Text** should contain sections: Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion, Acknowledgments. The manuscript size is at least 6 typewritten pages.

An article text must be formatted in the editor Word. The sheet format is A4. The top and bottom margins are 2.6 cm, the right and left margins are 2.5 cm. The distances to the header and footer are 1.25 cm. Times New Roman Cyr font, size – 12 pt, single spacing. Legends for figures and tables are typed in italics style. Formulas are typed in the Equation editor.

## The structure of the article

### Article's type

**UDC**

**DOI**

**EDN**

**TITLE in Russian** (Times New Roman font – 16 pt, bold).

**Name: author (s) name in full** (Times New Roman font – 12 pt).

**Place of work (with departments), city, country** (Times New Roman font – 11 pt), **e-mail**

**Abstract in Russian** (Times New Roman font – 11 pt).

**Keywords in Russian:** 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 11 pt, italic).

**Information for citation in English** (Times New Roman font – 11 pt, italic).

**Acknowledgments in English** (Times New Roman font – 11 pt, italic).

**Submitted, approved, accepted dates of receipt in English** (Times New Roman font – 11 pt, italic).

**TITLE in English** (Times New Roman font – 16 pt, bold).

**In English author (s) name in full, place of work (with departments), city, country** (Times New Roman font – 11 pt), **e-mail**.

**Abstract in English** (Times New Roman font – 11 pt).

**Keywords in English:** 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 11 pt).

**Information for citation in English** (Times New Roman font – 11 pt).

**Acknowledgments in English** (Times New Roman font – 11 pt).

**Submitted, approved, accepted dates of receipt in English** (Times New Roman font – 11 pt).

**The article text** (Times New Roman font – 12 pt) is typed the paragraph indent is 1.0 cm (set automatically, not spaces). No other indents are allowed. Justify the text in width (Times New Roman font – 16 pt)..

**References** are formed in a single format with using GOST R 7.0.100–2018 without a dash. If a source from an electronic resource is used, the author should indicate the request date. To indicate a source in text author uses square brackets after the quotation mention. References must be submitted **in Russian and English**.

**The References** list in Latin, called References, is prepared separately from the References List in Russian and placed below. Foreign sources references should be repeated in the References Lists in Russian and English. It is inadmissible to use Russian GOSTs in References. It is necessary to follow the requirements of international standards. Instructions on the References in Latin script design – References, Harvard standard can be found at [http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie\\_materialy/standart\\_Harvard.doc](http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc)

## REVIEW AND PUBLICATION OF ARTICLES

All manuscripts are double-blind peer-reviewed by two research scientists. If a disputable situation arises, a third reviewer is appointed. The final decision on the manuscript publication is made by the editor-in-chief of the journal.

The receipt date of the article is the day of its submission through the personal account on the journal's website or by e-mail of the journal (or editor-in-chief). Manuscripts are reviewed in the order they are received within one month, review period may be changed depending on a situation complexity and a works amount. The journal editors can to edit the article text without basic meaning change.

Approved articles are published free. The full-text version of each manuscript is posted on the journal's website and in the RSCI system (e-library).



Научное издание

ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
Математика. Механика. Информатика

Выпуск 3(70)

2025

Адрес учредителя и издателя

614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ

Адрес редакции

614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ

Физико-математический институт

e-mail: vestnik\_mmi@psu.ru

Редактор Е. В. Шумилова

Корректор В. Е. Пирожкова

Компьютерная верстка: А. А. Силина

Подписано в печать 01.10.2025. Выход в свет 03.10.2025

Формат 60×84/8. Усл. печ. л. 13,14. Тираж 500 экз. Заказ 108

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Управление издательской деятельности

614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15. Тел. (342) 239-66-36

Отпечатано в типографии ПГНИУ.

Тел. (342) 239-65-47

Подписной индекс журнала

«Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика»

в онлайн-каталоге «Урал-Пресс» –015010

[https://www.ural-press.ru/catalog/97266/8708250/?sphrase\\_id=396133](https://www.ural-press.ru/catalog/97266/8708250/?sphrase_id=396133)

Распространяется бесплатно и по подписке