МАТЕМАТИКА

Научная статья
УДК 517.938
DOI: 10.17072/1993-0550-2025-2-6-14
https://elibrary.ru/rgkmqb

# О бифуркации циклов на бесконечности в системах с однородными нелинейностями

**Мамирбой Норбек угли Кунгиров**
Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия
mamur.qongirov@mail.ru

**Аннотация**. В настоящей статье изучается задача о бифуркации циклов на бесконечности в динамических системах с однородной нелинейностью четного порядка. Предлагаются достаточные признаки такой бифуркации, определяемые как главной линейной частью, так и характеристиками нелинейностей. Получены асимптотические формулы, позволяющие описать эволюцию возникающих циклов при изменении параметров системы. В качестве приложения рассматривается задача о бифуркации циклов на бесконечности в модифицированной модели Ресслера.

**Ключевые слова**: *бифуркация циклов на бесконечности; устойчивость; бифуркация Андронова–Хопфа; асимптотические формулы*

**Для цитирования:** *Кунгиров М. Н.* О бифуркации циклов на бесконечности в системах с однородными нелинейностями // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. Вып. 2(69). С. 6–14. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-2-6-14. https://elibrary.ru/rgkmqb

**Благодарности:** работа выполнена в рамках государственного задания, соглашение № 075-03-2024-123/1 от 15.02.2024, проект № 324-21.

*Статья поступила в редакцию 30.11.2024; одобрена после рецензирования 19.05.2025; принята к публикации 11.07.2025.*

MATHEMATICS

Research article

# On Bifurcation of Cycles at Infinity in Systems with Homogeneous Nonlinearities

**Mamirboy. N. Kungirov**
Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia
mamur.qongirov@mail.ru

Эта работа © 2025 Кунгиров М. Н. распространяется по лицензии CC BY 4.0. Чтобы ознакомиться с условиями этой лицензии, посетите сайт https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/.

**Abstract.** In this article, the problem of bifurcation of cycles at infinity in dynamical systems with homogeneous nonlinearities of even order is studied. Sufficient conditions for such bifurcation are proposed, determined both by the principal linear part and by the characteristics of the nonlinearities. Asymptotic formulas are obtained, which allow describing the evolution of the emerging cycles as the system parameters change. As an application, the problem of bifurcation of cycles at infinity in a modified Rössler model is considered.

**Keywords:** *bifurcation of cycles at infinity; stability; Andronov–Hopf bifurcation; asymptotic formulas*

**For citation:** Kungirov, M. N. y. (2025), "On Bifurcation of Cycles at Infinity in Systems with Homogeneous Nonlinearities", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 2(69), pp. 6-14. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2025-2-6-14. https://elibrary.ru/rgkmqb

**Acknowledgments:** this work was supported by the state research program, agreement №. 075-03-2024-123/1 dated February 15, 2024, Project №. 324-21.

*The article was submitted 30.11.2024; approved after reviewing 19.05.2025; accepted for publication 11.07.2025*

## 1. Введение и постановка задачи

Рассматривается зависящее от вещественного параметра $\alpha$ нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\alpha), \quad x \in R^N, \qquad N \geq 2, \tag{1}$$

в котором функция $f(x,\alpha)$ является гладкой по $x$ и $\alpha$. Пусть $f(x_0,\alpha_0)=0$, т. е. уравнение (1) при $\alpha = \alpha_0$ имеет точку равновесия $x = x_0$, а матрица Якоби $A(\alpha) = f'_x(x_0,\alpha)$ при $\alpha = \alpha_0$ имеет простые собственные значения $\pm i\omega_0, \omega_0 > 0$. Остальные собственные значения матрицы $A(\alpha_0)$ имеют ненулевые вещественные части. Тогда $\alpha_0$ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа системы (1) в окрестности точки равновесия $x_0$. Другими словами, система (1) при $\alpha$, близких к $\alpha_0$, имеет нестационарные периодические решения $x = x(t,\alpha)$ периода $T = T(\alpha)$ такое, что:

1. Функции $x(t,\alpha)$ и $T(\alpha)$ непрерывно дифференцируемы по α;
2. $T(\alpha) \to T_0$ при $\alpha \to \alpha_0$, $\max_t \|x(t,\alpha) - x_0\| \to 0$ при $\alpha \to \alpha_0$.

Здесь $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . $\|\cdot\|$ – евклидова норма в пространстве $R^N$.

Вместе с тем здесь возможны и другие бифуркации, в частности, бифуркация циклов на бесконечности. Говорят, что $\alpha = \alpha_0$ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа системы (1) на бесконечности, если система (1) при $\alpha$, близком к $\alpha_0$, имеет нестационарное периодическое решение $x = x(t,\alpha)$ периода $T = T(\alpha)$ такое, что:

1. Функции $x(t,\alpha)$ и $T(\alpha)$ непрерывно дифференцируемы по α;
2. $T(\alpha) \to T_0$ при $\alpha \to \alpha_0$, $\max_t \|x(t,\alpha)\| \to \infty$ при $\alpha \to \alpha_0$.

**Замечание 1.** Понятие бифуркации Андронова-Хопфа на бесконечности аналогично понятию классической бифуркации Андронова-Хопфа. В первом случае периодические решения системы возникают в окрестности бесконечности, во втором – в окрестности точки равновесия. Вместе с тем эти виды бифуркаций не могут быть сведены друг к другу простой заменой координат типа $y = x/\|x\|^2$ . Отметим также, что в обоих видах бифуркаций период $T_n$ колебаний стремится к числу $T_0 = 2\pi/\omega_0$, т.е. к периоду свободных колебаний линеаризованной системы $x' = A(\alpha_0)x$. Это означает, что скорость движения по циклу в окрестности бесконечности сколь угодно большая, а в окрестности точки равновесия – сколь угодно мала.

Понятие бифуркации Андронова-Хопфа на бесконечности было введено в [1] для случая общих уравнений в $R^N$, там же сформулированы условия возникновения бифуркации на бесконечности, определяемые главной линейной частью. Теория бифуркации на бесконечности разрабатывалась в работах многих авторов. В [2] вместо непрерывности функциональной нелинейности по фазовым переменным предполагается лишь ее кусочная непрерывность. В [3] и многих других работах С. Рыбицкого (S. Rybicki) задачи о бифуркациях Андронова–Хопфа на бесконечности исследуются в предположении гамильтоновости изучаемых систем. В [4] существенно используется двумерность изучаемых систем. В [5] изучается вырожденный случай бифуркации Андронова–Хопфа на бесконечности.

Важное место в современной нелинейной динамике занимает исследование систем, содержащих однородные нелинейности, в частности, изучение в таких системах сценариев бифуркаций и перехода к хаосу. Укажем некоторые работы в этом направлении, примыкающие к постановкам настоящей статьи. Ряд моделей со степенными нелинейностями приведен в работе [11], в которой основное внимание уделяется вопросам возникновения хаотических режимов. В [8] приводится ряд формул для исследования задач о бифуркации в системах с однородными нелинейностями. В [12] изучаются вопросы о существовании предельных циклов в трехмерных системах с квадратичными нелинейностями.

В настоящей работе исследуется задача о бифуркации Андронова–Хопфа на бесконечности для систем с однородными нелинейностями. Рассматривается система вида:

$$\frac{dy}{dt} = A_0 y + \alpha f(y, \alpha), \quad y \in R^N, \qquad N \geq 2, \tag{2}$$

в которой $A_0$ – квадратная матрица порядка $N$, функция $f(y,\alpha)$ имеет вид

$$f(y,\alpha) = A_1 y + a_{2q}(y,\alpha),$$

где $A_1$ – квадратная матрица порядка $N$, $a_{2q}(y,\alpha)$ является однородным по $y$ вектор-полиномом четного порядка $2q$; здесь $q$ – натуральное число. Предполагается, что матрица $A_0$ имеет простые собственные значения $\pm i\omega_0,\ \omega_0 > 0$, и не имеет других чисто мнимых собственных значений. Основной в настоящей работе является задача получения достаточных условий бифуркации циклов на бесконечности в системе (2), а также построение асимптотических формул для исследования такой бифуркации.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [6] и [7]. В свою очередь, указанные статьи базируются на работе [8], в которой предложены новые формулы в задаче о бифуркации Андронова–Хопфа. Эти формулы позволяют провести детальное исследование ряда приложений, в частности, задач о бифуркации в системах с однородными нелинейностями, задач о вынужденной синхронизации автоколебаний под действием внешнего вынуждающего периодического воздействия [9].

## 2. Основные утверждения

Так как матрица $A_0$ имеет простые собственные значения $\pm i\omega_0, \omega_0 > 0$, то найдутся ненулевые векторы $e, g, \tilde{e}, \tilde{g} \in R^N$ такие, что выполняются равенства

$$A_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig),\ A_0^T(\tilde{e} + i\tilde{g}) = -i\omega_0(\tilde{e} + i\tilde{g}).$$

Здесь $A_0^{\mathrm{T}}$ – транспонированная матрица. Известно (см. [8]), что векторы $e, g, \tilde{e}, \tilde{g} \in R^N$ можно нормировать в соответствии с равенствами

$$(e, \tilde{e}) = (g, \tilde{g}) = 1, (e, \tilde{g}) = (g, \tilde{e}) = 0.$$

Положим

$$\gamma_1 = (A_1 e, \tilde{e}) + (A_1 g, \tilde{g}), \quad \gamma_2 = (A_1 e, \tilde{g}) + (A_1 g, \tilde{e}). \tag{3}$$

Предполагается, что $\gamma_1 \neq 0$.

Следуя [8], определим числа

$$\alpha_2 = -\frac{\omega_0}{\pi\gamma_1}(b_3, \tilde{e}), \quad T_2 = \frac{1}{\omega_0}\left[(b_3, \tilde{g}) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}(b_3, \tilde{e})\right], \tag{4}$$

где

$$b_3 = T_0 \int_0^1 e^{(1-t)T_0 A_0} f_3(t) dt, \quad f_3(t) = F_2(t) \int_0^t e^{(1-s)T_0, A_0} a_{2q}(e(s), 0) ds,$$
$$F_2(t) = T_0 a'_{2qx}(e(t), 0) e^{T_0 \mathrm{A}_0 t}.$$

Здесь $a'_{2qx}(e(t), 0)$ – матрица Якоби вектор-функции $a_{2q}(x, 0)$, $e(t) = e \cdot \cos(2\pi t) - g \cdot \sin(2\pi t)$. В формулах (3) и (4) используются обозначения, соответствующие их аналогам из статьи [8].

**Теорема 1.** *Пусть матрица* $A_0$ *имеет простые собственные значения* $\pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, *и не имеет других чисто мнимых собственных значений. Пусть* $\gamma_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$. *Тогда значение* $\alpha = 0$ *является точкой бифуркации циклов системы (2) на бесконечности.*

Таким образом, в условиях теоремы 1 существуют предельные значения $\alpha \to \alpha_0$ и $T(\alpha) \to T_0$, при которых для $\alpha$, близких к $\alpha_0$, система (2) обладает нестационарным периодическим решением $x = x(t, \alpha)$ с периодом $T = T(\alpha)$, удовлетворяющим условию $\max\limits_t \|x(t, \alpha)\| \to \infty$ при $\alpha \to \alpha_0$.

Бифурцирующие решения системы (2) и значения их периода часто более удобно изучать не в виде прямой зависимости от параметра $\alpha$, т.е. в виде $y = y(t, \alpha)$ и $T = T(\alpha)$, которая может оказаться многозначной, а в параметрической форме:

$$y = y(t, \varepsilon), \ \alpha = \alpha(\varepsilon), \ T = T(\varepsilon), \tag{5}$$

где $\varepsilon$ – вспомогательный малый параметр так, что $\alpha(0) = 0$ и $T(0) = T_0$.

**Теорема 2.** *В условиях теоремы 1 существуют число* $\varepsilon_0 > 0$ *и определенные при* $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ *функции*

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_2 \varepsilon^{2q} + O(\varepsilon^{2q+1}), \quad T(\varepsilon) = T_0 + T_2 \varepsilon^{2q} + O(\varepsilon^{2q+1}), \tag{6}$$

*такие, что система (2) при* $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ *имеет периодическое решение* $y = y(t, \varepsilon)$ *периода* $T(\varepsilon)$, *при этом*

$$y(0, \varepsilon) = \alpha_2^{\frac{1}{1-2q}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{1-2q}} e + o\left(\varepsilon^{\frac{1}{1-2q}}\right). \tag{7}$$

Из теоремы 2 следует, что циклы больших амплитуд в системе (2) возникают при $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$), если $\alpha_2 > 0$ ($\alpha_2 < 0$).

**Теорема 3**. *Пусть в условиях теоремы 1 все отличные от* $\pm\omega_0 i$ *собственные значения матрицы* $A_0$ *имеют отрицательные вещественные части. Тогда, если* $(b_3, \tilde{e}) < 0$ $\big((b_3, \tilde{e}) > 0\big)$, *то циклы* $y(t, \varepsilon)$ *больших амплитуд системы (2) асимптотически орбитально устойчивы (неустойчивы).*

**Доказательство теорем 1 и 2**

Приведем сначала вспомогательные утверждения. С этой целью рассмотрим систему

$$x' = (A_0 + \alpha A_1)x + a_{2q}(x,\alpha),\ x \in R^N, N \geq 2. \tag{8}$$

**Лемма 1.** *Пусть матрица $A_0$ имеет простые собственные значения $\pm\omega_0 i$, $\omega_0 > 0$ и не имеет других чисто мнимых собственных значений. Пусть $\gamma_1 \neq 0$ . Тогда $\alpha = 0$ является точкой бифуркации Андронова–Хопфа системы (8) в окрестности точки равновесия $x = 0$. При этом существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и определенные при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ функции (6) такие, что система (8) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ имеет периодическое решение $x = x(t,\varepsilon)$ периода $T(\varepsilon)$, для которого вектор $\tilde{x}_0(\varepsilon) = x(0,\varepsilon)$ представим в виде $\tilde{x}_0(\varepsilon) = e\varepsilon + O(\varepsilon^{2q})$.*

Лемму 1 можно рассматривать как развитие аналогичного утверждения, доказанного в [8, теорема 2].

**Доказательство леммы -**

Сначала отметим, что функция $x = x(t)$ тогда и только тогда будет $T$ –периодическим решением системы (8), когда функция $y(t) = x(tT)$ будет 1 –периодическим решением системы

$$y' = T(A_0 + \alpha A_1)y + Ta_{2q}(y,\alpha), \qquad y \in R^N. \tag{9}$$

Далее функция $y = y(t)$ тогда и только тогда будет 1 – периодическим решением системы (9), когда вектор $u = y(0) \in R^N$ будет решением операторного уравнения

$$u = B(T,\alpha)u + b(u,T,\alpha), \qquad u \in R^N, \tag{10}$$

где

$$B(T,\alpha) = e^{TA(\alpha)}, \qquad b(u,T,\alpha) = T\int_0^1 \mathrm{e}^{(1-s)TA(\alpha)} a_{2q}(y(s),\alpha)ds;$$

здесь $A(\alpha) = A_0 + \alpha A_1$, $y(t)$ – решение задачи Коши для уравнения (9) при начальном условии $y(0) = u$.

Вектор-функция $b(u,T,\alpha)$ представима в виде

$$b(u,T,\alpha) = b_{2q}(u,T,\alpha) + b_{3q}(u,T,\alpha) + b_{4q}(u,T,\alpha),$$

где

$$b_{2q}(u,T,\alpha) = T\int_0^1 \mathrm{e}^{(1-s)TA(\alpha)} a_{2q}\left(\mathrm{e}^{TA(\alpha)s}u,\alpha\right)ds,$$

$$b_{3q}(u,T,\alpha) = T^2\int_0^1 \mathrm{e}^{(1-s)TA(\alpha)} a'_{2qx}\left(\mathrm{e}^{TA(\alpha)s}u,\alpha\right)\left(\int_0^s \mathrm{e}^{(s-\tau)TA(\alpha)} a_{2q}\left(\mathrm{e}^{TA(\alpha)\tau}u,\alpha\right)d\tau\right)ds,$$

а нелинейность $b_{4q}(u,T,\alpha)$ удовлетворяет соотношению $b_{4q}(u,T,\alpha) = O(\|u\|^{4q})$ при $u \to 0$ равномерно по $T$ и $\alpha$ ; здесь $a'_{2qx}(x,\alpha)$ – матрица Якоби вектор-функции $a_{2q}(x,\alpha)$.

Определим зависящие от вспомогательного параметра $\varepsilon > 0$ функционалы

$$\alpha(u,\varepsilon) = \alpha_0 + \frac{1}{\varepsilon}[(u,\tilde{e}) - \varepsilon], \qquad T(u,\varepsilon) = T_0 + \frac{1}{\varepsilon}(u,\tilde{g}) \tag{11}$$

и подставим их соответственно вместо α и T в уравнение (10). В результате получим уравнение

$$F(u,\varepsilon) \equiv G(u,\varepsilon) + W(u,\varepsilon) = 0, \quad u \in R^N, \tag{12}$$

где

$$G(u,\varepsilon) = u - B[T(u,\varepsilon),\alpha(u,\varepsilon)]u, \quad W(u,\varepsilon) = -b[u,T(u,\varepsilon),\alpha(u,\varepsilon)].$$

Проверка показывает, что для уравнения (12) в шаре $S(\varepsilon)$ радиуса $r = \varepsilon/2$ с центром в точке $\varepsilon e$ при малых $\varepsilon$ выполнены все условия сходимости метода Ньютона-Канторовича с возмущениями [13]. Поэтому уравнение (12) при малых $\varepsilon > 0$ имеет ненулевое решение $u^*(\varepsilon) \in S(\varepsilon)$, которое может быть построено с помощью итераций.

$$u_{n+1}(\varepsilon) = u_n(\varepsilon) - \Gamma_0 F(u_n(\varepsilon),\varepsilon), \quad n = 0,1,2, \ . \ . \ . \ ,$$

где $F$ – оператор (12), $\Gamma_0 = (G')^{-1} : R^N \to R^N$, $u_0(\varepsilon) = \varepsilon e$. Здесь $G'$– производная оператора $G(u,\varepsilon)$ в точке $u = \varepsilon e$; по построению эта производная не зависит от $\varepsilon$ и является обратимой. Подставляя вектор $u^*(\varepsilon)$ в формулы (11), получаем утверждение леммы 1.

**Лемма 2**. *При* $\alpha \neq 0$ *замена* $x = \alpha^{1/2q-1}y$ *переводит уравнение (2) в уравнение (8). Обратная замена переводит уравнение (8) в уравнение (2).*

Справедливость этого утверждения устанавливается простым подсчетом.

Вернемся к доказательству теорем 1 и 2. Из лемм 1 и 2 следует, что уравнение (2) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ имеет $T(\varepsilon)$ – периодическое решение $y = y(t,\varepsilon)$, при этом вектор $\tilde{y}_0(\varepsilon) = y(0,\varepsilon)$ представим в виде

$$y(0,\varepsilon) = \left(\alpha_2\varepsilon^{2q} + O(\varepsilon^{2q+1})\right)^{\frac{1}{1-2q}}\left(\varepsilon e + O(\varepsilon^{2q})\right) = \alpha_2^{\frac{1}{1-2q}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{1-2q}} e + o\left(\varepsilon^{\frac{1}{1-2q}}\right).$$

Так как $2q - 1 > 0$, то $\|y(0,\varepsilon)\| \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом $\max\limits_t \|y(t,\varepsilon)\| \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, что завершает доказательство теорем 1 и 2.

**Доказательство теоремы 3**

По построению, бифурцирующие решения $y(t,\varepsilon)$ системы (2) устойчивы тогда и только тогда, когда устойчивы бифурцирующие решения $x(t,\varepsilon)$ системы (8). В свою очередь, при малых $\varepsilon$ свойства устойчивости решений $x(t,\varepsilon)$ системы (8) определяются знаком ляпуновской величины $L_1$ в задаче о бифуркации Андронова–Хопфа, которая, в соответствии с работой [14], определяется равенством $L_1 = (b_3,\tilde{e})$. Отсюда и из [14] следует, что если $L_1 < 0$, то при малых $\varepsilon$ решения $y(t,\varepsilon)$ системы (2) орбитально асимптотически устойчивы, а если $L_1 > 0$, то неустойчивы. Теорема 3 доказана.

## 3. Пример: модель Рёсслера

В качестве иллюстрация рассмотрим модель Рёсслера, описываемую системой дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью

$$\begin{aligned} x' &= -y - z\,, \\ y' &= x, \\ z' &= \alpha(y - y^2) - bz. \end{aligned} \tag{13}$$

В этой модели $\alpha$ и $b$ – неотрицательные параметры. Модель Рёсслера (см., например, [11]) демонстрирует богатое бифуркационное и хаотическое поведение при различных значениях $\alpha$ и $b$ .

Пусть для определенности $b = 1$. Покажем, что значение $\alpha = 0$ является точкой бифуркации Андронова–Хопфа системы (13) в окрестности нулевой точки равновесия $x =$

$y = z = 0$ и точкой бифуркации на бесконечности. Для этого воспользуемся теоремами 1–3.

Система (13) имеет вид (2):

$$u' = A_0 u + \alpha f(u), \qquad u \in R^3,$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix},\ f(u) = A_1 u + a_2(u),\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, a_2(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_2^2 \end{bmatrix}.$$

При $\alpha = 0$ и $b = 1$ матрица $A_0$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ и $\lambda_3 = -b = -1$, где $\omega_0 = 1$. Несложно убедиться в том, что в качестве векторов $e, g, \tilde{e}, \tilde{g}$ можно взять векторы

$$e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Подсчет показывает, что числа (3) и (4) здесь равны: $\gamma_1 = 1/2, \gamma_2 = 0$. Поэтому, в соответствии с теоремой 1, значение $\alpha = 0$ является для системы (13) точкой бифуркации циклов на бесконечности. В то же время в силу леммы 1 значение $\alpha = 0$ является и точкой бифуркации Андронова–Хопфа в окрестности нулевой точки равновесия системы (13).

Вычислим числа $\alpha_2$ и $T_2$ по формуле (4): $\alpha_2 = -49105{,}58$ и $T_2 = 0$ . Поскольку $\alpha_2 < 0$, то в соответствии с теоремой 2 циклы больших амплитуд в системе (13) возникают при $\alpha < 0$. Наконец, вычисления показывают, что здесь $(b_3, \tilde{e}) = 77134{,}86 > 0$ . Отсюда и из теоремы 3 получим, что циклы больших амплитуд системы (13) неустойчивы.

**Список источников**


1. *Красносельский А. М., Красносельский М. А.* Циклы больших амплитуд в автономных системах с гистерезисом // Доклады Академии наук. Российская академия наук. 1985. Т. 283, № 1. С. 23–26.
2. *He X.* Hopf bifurcation at infinity with discontinuous nonlinearities // J. Austr. Math. Soc. Ser. B. 1991. Vol. 33, № 2. P. 133–148. URL: https://doi.org/10.1017/S0334270000006950 (дата обращения: 02.10.2024).
3. *Fura A., Rybicki S.* Periodic solutions of second order Hamiltonian systems bifurcating from infinity // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 2007. Vol. 24, № 3. P. 471–490. DOI: 10.1016/J.ANIHPC.2006.03.003 (дата обращения: 02.10.2024).
4. *Sabatini M.* Hopf bifurcation from infinity // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 1987. Vol. 78. P. 237–253. URL: https://www.numdam.org/item/RSMUP_1987__78__237_0 (дата обращения: 02.10.2024).
5. *Красносельский А. М.* Вырожденный случай бифуркации Андронова–Хопфа на бесконечности // Автоматика и телемеханика. 2010. № 11. С. 55–68.
6. *Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Кунгиров М. Н.* Бифуркации периодических решений в двупараметрических автономных системах // Вестник Башкирского университета. 2023. Т. 28, № 2. С. 154–157.
7. *Kungirov M. N.* Bifurcation of periodic oscillations arising from a closed phase curve in systems with odd nonlinearities // Lobachevskii journal of mathematics. 2024. Vol. 45,

no. 6. P. 2739–2745. URL: https://doi.org/10.1134/S1995080224603254 (дата обращения: 02.10.2024).
8. *Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Имангулова Э. С.* Главные асимптотики в задаче о бифуркации Андронова–Хопфа и их приложения // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 12. С. 1627–1643.
9. *Имангулова Э. С.* Синхронизация периодических колебаний в задаче о бифуркации Андронова–Хопфа // Вестник Башкирского университета. 2017. Т. 22, № 2. С. 292–296.
10. *Популяционная* динамика: модели и методы / Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Белова А. С. Уфа: РИЦ УУНиТ, 2022. 85 с.
11. *Элегантный* хаос: алгебраически простые хаотические потоки / Спротт Д. К. М. Ижевск: РХД; ИКИ, 2012. 328 с.
12. *Musafirov E., Grin A., Pranevich A., Munteanu F., Sterbeti C.* 3D quadratic ODE systems with an infinite number of limit cycles // ITM Web of Conferences. 2022. Vol. 49. P. 1–6.
13. *Приближённое* решение операторных уравнений. / Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Стеценко В.Я. М.: Наука. 1969. 456 с. URL: http://elib.bsu.by/handle/123456789/12803. (дата обращения: 02.10.2024).
14. *Гусарова Н. И., Муртазина С. А., Фазлытдинов М. Ф., Юмагулов М. Г.* Операторные методы вычисления ляпуновских величин в задачах о локальных бифуркациях динамических систем // Уфимский математический журнал. 2018. Т 10, № 1. С. 25–49.

**References**

1. Krasnosel'skii, A. M. and Krasnosel'skii, M. A. (1985), "Large amplitude cycles in autonomous systems with hysteresis", *Doklady Akademii Nauk. Rossiyskaya Akademiya Nauk*, vol. 283, no. 1, pp. 23-26.
2. He, X. (1991), "Hopf bifurcation at infinity with discontinuous nonlinearities", *The ANZIAM Journal*, vol. 33, issue 2, pp. 133–148.
3. Fura, J. and Rybicki, S. (2007), "Periodic solutions of second order Hamiltonian systems bifurcating from infinity", *In Annales de l'IHP Analyse non linéaire*, vol. 24, no. 3, pp. 471–490.
4. Sabatini, M. (1987), "Hopf bifurcation from infinity", *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, vol. 3, no. 1, pp. 1–17.
5. Krasnosel’skii, A. M. (2010), "A degenerate case of Andronov–Hopf bifurcation at infinity", *Automation and Remote Control*, no. 11, pp. 55-68.
6. Yumagulov, M. G., Ibragimova, L. S. and Kungirov, M. N. (2023), "Bifurcations of periodic solutions in two-parameter autonomous systems", *Vestnik Bashkirskogo universiteta*, vol. 28, no. 2, pp. 154 -157.
7. Kungirov, M. N. (2024), "Bifurcation of periodic oscillations arising from a closed phase curve in systems with odd nonlinearities", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 45, no. 6, pp. 2739–2745.

8. Yumagulov, M. G., Ibragimova, L. S. and Imangulova, E. S. (2017), "Principal asymptotics in the problem on the Andronov–Hopf bifurcation and their applications", *Differential Equations,* vol. 53, no. 12, pp. 1627-1643.
9. Imangulova, E. S. (2017), "Synchronization of periodic oscillations in the Andronov–Hopf bifurcation problem", *Vestnik Bashkirskogo universiteta*, vol. 22, no. 2, pp. 292–296.
10. Yumagulov, M. G., Ibragimova, L. S. and Belova, A. S. (2022), *Populyacionnaya dinamika: modeli i metody* [Population Dynamics: Models and Methods], Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia.
11. Sprott, J. K. (2012), *Elegantnyi haos: algebraichesky prostye haoticheskie potoki* [*Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*], Izhevsk, Russia.
12. Musafirov, E., Grin, A., Pranevich, A., Munteanu, F. and Şterbeţi, C. (2022), "3D Quadratic ODE systems with an infinite number of limit cycles", *In ITM Web of Conferences*, vol. 49, p. 02006.
13. Krasnosel'skiy, M. A., Vainikko, G. M., Zabreiko, P. P. and Stetsenko, V. Ya. (1969), *Priblizhennoe reshenie operatornyh uravnenij* [Approximate Solution of Operator Equations], Nauka, Moscow, Russia.
14. Gusarova, N. I., Murtazina, S. A., Fazlytdinov, M. F. and Yumagulov, M. G. (2018), "Operator methods for calculating Lyapunov values in problems on local bifurcations of dynamical systems", *Ufimskii Matematicheskii Zhurnal*, vol. 10, no. 1, pp. 25-49.

**Информация об авторе:**

*М. Н. Кунгиров* – аспирант, Уфимский университет науки и технологий (450008, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32).

**Information about the author:**

*M. N. Kungirov* – Postgraduate student, Ufa University of Science and Technology (32, Zaki Validi St., Ufa, Russia, 450008).