МЕХАНИКА

Научная статья
УДК 531.9; 514.853
DOI: 10.17072/1993-0550-2025-1-52-66
https://elibrary.ru/achxhc

# Движение гиростата в световом потоке полуевклидова пространства

**Николай Николаевич Макеев**
г. Саратов, Россия
nmakeyev@mail.ru

**Аннотация.** Исследуется движение гиростата в стационарном поле сил светового давления полуевклидова пространства. Гиростат с кинетической осевой симметрией и постоянным гиростатическим моментом движется так, что его носитель вращается вокруг центра инерции. Поле сил светового давления порождается стационарным световым потоком постоянной интенсивности, образованным параллельными лучами света, и принимается консервативным. На основе усовершенствованной термомеханической модели динамического взаимодействия светового излучения с твердой поверхностью строится динамическая система и рассматривается ограниченная задача исследования движения особого вида. В результате применения аффинного преобразования переменных, определяющих движение гиростата, получены точные решения задачи об интегрировании динамической системы гиростата в консервативном поле сил светового давления. Рассмотрены два режима движения гиростата и их аналоговая интерпретация.

**Ключевые слова:** *гиростат; полуевклидово пространство; поле сил светового давления; аффинное преобразование переменных; годограф вектора угловой скорости*

**Для цитирования:** *Макеев Н.Н.* Движение гиростата в световом потоке полуевклидова пространства // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. Вып. 1 (68). С. 52–66. DOI: 10.17072/ 1993-0550-2025-1-52-66. https://elibrary.ru/achxhc.

*Статья поступила в редакцию 10.10.2024; одобрена после рецензирования 29.11.2024; принята к публикации 16.03.2025.*

MECHANICS

Research article

# Gyrostat Motion in the Light Flow of Semi-Euclidean Space

**Nikolay N. Makeev**
Saratov, Russia
nmakeyev@mail.ru

**Abstract.** The motion of a gyrostat in a stationary field of light pressure forces in semi-Euclidean space is investigated. A gyrostat with kinetic axial symmetry and a constant gyrostatic moment moves so that its carrier rotates around the center of inertia. The field of light pressure forces is generated by a stationary light flux of constant intensity, formed by parallel rays of light, and is assumed to be conservative. Based on an improved thermomechanical model of the dynamic interaction of light radiation with a solid surface, a dynamic system is constructed and the limited problem of studying motion of a special type is considered. As a result of applying an affine transformation of the variables determining the motion of the gyrostat, exact solutions to the problem of integrating a dynamic gyrostat system in a conservative field of light pressure forces were obtained. Two modes of gyrostat motion and their analog interpretation are considered.

**Keywords:** *gyrostat; semi-Euclidean space; light pressure force field; affine transformation of variables; angular velocity vector hodograph*

**For citation:** Makeev, N. N. (2025), "Gyrostat Motion in the Light Field Flow of Semi-Euclidean Space", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science,* no. 1(68), pp. 52-66. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2025-1-52-66. https://elibrary.ru/achxhc.

*The article was submitted 10.10.2024; approved after reviewing 29.11.2024; accepted for publication 16.03.2025.*

## Введение

Рассматривается движение гиростата в стационарном однородном потоке светового излучения представляемого пучком прямолинейных параллельных лучей постоянной интенсивности. Полагается, что этот поток индуцируется стационарным источником светового излучения постоянной мощности, генерирующим световую волну, взаимодействующую со средой ее распространения и вызывающую эффект светового давления на твердые поверхности (динамический *эффект П.Н. Лебедева*).

Световой поток формирует *поле сил светового давления* (СД-поле) и порождает силу давления – пондеромоторный эффект светового излучения, обусловленный передачей импульса электромагнитного поля. Это давление реализуется распределенной поверхностной силой, величина которой пропорциональна плотности энергии светового потока и непосредственно зависит от оптических и термомеханических свойств освещаемой поверхности.

В настоящей работе принята термомеханическая модель, предложенная в статье [1] и учитывающая ряд динамически значимых эффектов, которые не рассматривают традиционно принятые модели.

В цитируемой статье исследуется задача об устойчивости перманентных вращений абсолютно твердого тела в СД-поле, которое при определенных условиях может быть консервативным [1]. Свойство консервативности поля способствует получению решений аналитическими методами задачи о нахождении точных частных решений системы уравнений сферического движения тела. Такого рода задачи являются актуальными модельными задачами классической динамики твердого тела.

Многообразие точных частных решений уравнений движения механических систем имеют для исследований их характерных свойств существенное значение. Эти решения являются носителями основной информации о динамически значимых особенностях движения данного механического объекта и позволяют оценивать возможности применения приближенных методов нахождения решений уравнений его движения.

К настоящему времени не найдены какие-либо общие методы построения видов частных решений систем уравнений движения. В силу этого, как правило, рассматриваются задачи частного характера, решаемые в ограниченной постановке в рамках классической механики.

В настоящей работе рассматривается ограниченная задача о нахождении точных частных решений системы уравнений сферического движения гиростата в стационарном СД-поле неевклидова пространства, поставленная для определенного класса его движений при заданных ограничениях и стационарных связях. Эта работа является продолжением исследования, приведенного в статье [2].

**1. Предварительные положения**

Согласно классификации, применяемой в проективной геометрии, рассматриваемое здесь полуевклидово пространство является действительным аффинным трехмерным пространством с индексом 2 и дефектом 0. Оно может быть определено и как полугиперболическое пространство с несобственной абсолютной плоскостью.

В данной работе под движением гиростата (в смысле механического движения) понимается перемещение в конфигурационном пространстве его тела-носителя как абсолютно твердого тела. При этом все необходимые геометрические объекты и связанные с ними геометрические построения, вводимые в публикациях различными способами, приняты здесь согласно схеме, установленной в работе [2].

Вследствие существующего гомеоморфизма задача о движении гиростата в плоскости Лобачевского эквивалентна задаче о его вращении вокруг неподвижного полюса в полуевклидовом пространстве с метрическим тензором $g_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$, отнесенном к пространству конфигураций, с компонентами $g_{11} = g_{22} = -1$, $g_{33} = 1$ при $i = j$, где, кроме того, имеем $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Здесь векторы $\mathbf{e}_i$ ($i$ = 1, 2, 3) − орты осей заданной ортогональной системы координат конфигурационного пространства гиростата.

Согласно проективной модели Э. Бельтрами–Ф. Клейна плоскость Лобачевского наглядно представляется в виде внутренних точек абсолюта гиперболической плоскости

$$g_{ij} x^i x^j \equiv -(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0,$$

где $x^i, x^j$ − контравариантные координаты.

Под гиростатом в полуевклидовом пространстве в общепринятом смысле понимается механический объект, расположенный внутри изотропного конуса этого пространства, а под неподвижным полюсом $O$, совпадающим с его центром инерции, относительно которого движется гиростат, − вершина данного конуса. Тогда для радиусов-векторов точек гиростата существует условие $\mathbf{r}_s^2 = g_{ij} r_s^i r_s^j > 0$, согласно которому данные векторы, по определению, являются собственными.

Настоящая работа является продолжением исследования задачи о нахождении точных частных решений системы уравнений движения гиростата в полуевклидовом пространстве, приведенного в статье [2].

Пусть $\mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$ – направляющий орт светового потока, заданный координатами $s_j$ относительно ортобазиса, неизменно связанного с носителем гиростата.

Предполагается, что СД-поле светового потока является консервативным, характеризуемым одномерным стационарным квадратичным потенциалом [1]

$$U(s_3) = \int G(s_3)\, ds_3, \tag{1}$$

где функция плотности потока светового излучения $G$ определяется равенством

$$G(s_3) = n_1 + n_2 s_3 \quad (-\infty < s_3 \leq -1), \tag{2}$$

а функция $U$ определена в открытой регулярной односвязной области конфигурационного пространства при условии $n_2 \neq 0$. Здесь $n_1 \neq n_2$ – заданные постоянные термомеханические модельные параметры [1], характеризующие теплофизические и оптические свойства светоотражающей и лучепоглощающей абсолютно твердой поверхности гиростата.

Движение гиростата вокруг полюса $O$ относительно ортобазиса, связанного с носителем, в силовом поле светового потока с потенциалом, заданным соотношениями (1), (2), согласно принятым предпосылкам, определяется автономной системой уравнений [2]

$$\begin{gathered} \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}) = (U_{\mathrm{s}} \times \mathbf{s}), \\ \dot{\mathbf{s}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}) = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где обозначено

$$U_{\mathrm{s}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{s}}.$$

Согласно соотношениям (1), (2) для функции $U$ имеем [1]

$$U(s_3) = n_1 s_3 + \frac{1}{2} n_2 s_3^2, \tag{4}$$

где $s_3$ – соответствующий направляющий косинус орта **s,** определенный в данном полуевклидовом пространстве.

Введем правые координатные ортобазисы с общим началом в неподвижном полюсе $O$: ортобазис $\Gamma_0$, неподвижный относительно инерциального конфигурационного пространства гиростата, и ортобазис $\Gamma(Ox_1x_2x_3)$, неизменно связанный с телом-носителем гиростата, оси $Ox_j$ которого совмещены с его главными в полюсе $O$ осями приведенного (по Н.Е. Жуковскому) тензора инерции данного гиростата.

Обозначим: $A_j$ − диагональные элементы матрицы тензора инерции, являющиеся главными центральными моментами инерции, соответствующими собственным значениям оператора инерции гиростата; $\mathbf{K}(K_j)$ − кинетический момент гиростата относительно полюса $O$; $\mathbf{k}(k_j)$ − постоянный гиростатический вектор-момент, заданный проекциями $k_j$ на оси ортобазиса $\Gamma$; главные центральные моменты инерции гиростата $A_1, A_2$ − моменты относительно не изотропных (идеальных) главных осей $Ox_1$, $Ox_2$, а момент $A_3$ − относительно собственной главной оси инерции $Ox_3$; $\boldsymbol{\omega}(\omega_j)$ − абсолютная угловая скорость тела-носителя. Здесь и всюду далее текущий индекс $j$ принимает значения $j = 1, 2, 3$. В частности, символ $(\omega_j)$ кратко обозначает всю данную совокупность допустимых значений $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, если иное не оговорено.

Пусть $\mathbf{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ − орты осей базиса Г. Тогда вектор абсолютной угловой скорости носителя гиростата относительно полюса $O$ представляется в виде [2]

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 - \omega_3 \mathbf{e}_3. \tag{5}$$

Для компонент $s_j$ собственного орта **s** имеет место тривиальное тождество [2]

$$\|\mathbf{s}\|^2 \equiv - s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 = 1. \tag{6}$$

Система параметров ориентации механического объекта в неевклидовых пространствах относительно заданных ортобазисов вводится по-разному; здесь единой общепринятой схемы не существует.

Следуя конструкционной схеме построения параметров ориентации собственного базового вектора **s** в полуевклидовом пространстве, принятой в работе [2], введем аналоги традиционно принятых классических углов Эйлера $\lambda, \vartheta, \varphi,$ определяющих ориентацию ортобазиса $\Gamma$ относительно $\Gamma_0$ в конфигурационном пространстве. Положим, что $\mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$ – *орт*, определяющий ориентацию однородного параллельного светового потока относительно базиса $\Gamma$. Этот вектор является *направляющим ортом* светового потока, ориентированным против направления падающих на поверхность носителя пучка лучей света. Его зависимость от указанных параметров ориентации определяется равенствами [2]

$$(s_1, s_2, s_3) == (\operatorname{sh}\vartheta \sin\varphi, \operatorname{sh}\vartheta \cos\varphi, -\operatorname{ch}\vartheta), \tag{7}$$

удовлетворяющими соотношению (6). Здесь параметры ориентации $\vartheta, \varphi$ по аналогии с классическими углами Эйлера будем называть *параметрами нутации и собственного вращения.* При этом данные параметры (как и их классические аналоги) являются безразмерными величинами.

Система уравнений (3), согласно соотношениям (1), (2), (5)–(9) и введенным предпосылкам в проекциях на координатные оси ортобазиса $\Gamma$, принимает вид [2]

$$\begin{gathered} A_1\dot{\omega}_1 + (A_2 + A_3)\omega_2\omega_3 + k_3\omega_2 + k_2\omega_3 = -G(s_3)s_2, \\ A_2\dot{\omega}_2 - (A_1 + A_3)\omega_3\omega_1 - k_1\omega_3 - k_3\omega_1 = G(s_3)s_1, \\ A_3\dot{\omega}_3 + (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 - k_2\omega_1 + k_1\omega_2 = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\dot{s}_1 = \omega_2 s_3 - \omega_3 s_2, \quad \dot{s}_2 = \omega_3 s_1 - \omega_1 s_3, \quad \dot{s}_3 = \omega_2 s_1 - \omega_1 s_2. \tag{9}$$

Система уравнений (9) имеет первым тривиальным интегралом тождество (6) [2].

Уравнения (8), (9) образуют многопараметрическую динамическую систему с квадратичной нелинейностью, в которой подсистема (8) имеет особые точки: точку $\mathbf{s}_q(0, 0, 1)$ и множество $\mathbf{s}(s_1, s_2, s_p)$, где критическое значение $s_p = -n_1/n_2$ соответствует статическому условию $G(s_p) = 0$ и является единственным таковым значением.

Для динамической системы (8), (9) *ставится следующая ограниченная задача*. Полагая, что при $t \in T = [0, +\infty)$ априорно существует точное частное решение $\{\omega_j(t), s_j(t)\}$ данной системы, удовлетворяющее начальным условиям $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}^0 (\omega^0_j)$, $\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}^0 (s^0_j)$, найти это решение, удовлетворяющее некоторым принятым ограничениям, налагаемым на характеристики движения гиростата.

*Целью настоящей работы* является решение поставленной задачи, получаемое на основе динамической системы (8), (9) и предпосылок, принятых для данной задачи.

## 2. Движение на линейной связи

Рассмотрим решение поставленной задачи как движение гиростата на заданной стационарной связи, содержащей линейную зависимость между векторами $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}$. Соотношение такого рода было априорно принято в исследованиях [3, 4], относящихся к сферическому движению твердого тела в евклидовом пространстве, и применялось в работе [5], где рассмотрено движение гиростата в гиперболическом пространстве. В этих работах авторы, задавая возможный вид искомого решения, реализовывали гипотетические линейные зависимости, связывающие между собой переменные решаемых задач.

Из многообразия возможных движений, характеризуемых объединенной системой уравнений (8), (9), выделим движения (допуская, что они существуют), удовлетворяющие для $t \in T$ зависимости вида

$$\mathbf{s} = \mathbf{B}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}, \tag{10}$$

где постоянные матрица $\mathbf{B}$ и вектор $\mathbf{C}$ не заданы и подлежат определению. Здесь обозначено $\mathbf{B} = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $\mathbf{C} = [C_j]^T$.

Согласно равенству (10) в осях ортобазиса $\Gamma$, имеем

$$s_j = B_j\,\omega_j + C_j \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{11}$$

и предполагается, что $B_1 B_2 B_3 \neq 0$, $n_2 \neq 0$.

Преобразование вида (11) называется здесь и далее *линейной связью* между указанными переменными. При заданных условиях эта трансформация геометрически может быть истолкована как невырожденное аффинное преобразование, являющееся композицией центроаффинного преобразования с центром, совпадающим с неподвижным полюсом $O$, и параллельного переноса. При этом все постоянные $B_j$ являются коэффициентами центроаффинного преобразования, а величины $C_j$ – параметрами параллельного переноса. Первое из заданных ограничений выражает условие невырожденности данного преобразования [5].

Исключая из объединенной системы уравнений (8), (9) все величины $s_j$ в силу соотношений (11), в результате получаем систему условий в форме равенств:

$$\begin{gathered} A_1\dot{\omega}_1 + R_2\omega_2\omega_3 + P_2\omega_2 + Q_2\omega_3 + HC_2 = 0, \\ A_2\dot{\omega}_2 - R_1\omega_3\omega_1 - P_1\omega_1 - Q_1\omega_3 - HC_1 = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} B_1\dot{\omega}_1 + (B_2 - B_3)\omega_2\omega_3 + C_2\omega_3 - C_3\omega_2 = 0, \\ B_2\dot{\omega}_2 + (B_3 - B_1)\omega_3\omega_1 + C_3\omega_1 - C_1\,\omega_3 = 0, \\ B_3\,\dot{\omega}_3 + (B_2 - B_1)\omega_1\omega_2 + C_2\omega_1 - C_1\omega_2 = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

К равенствам (12) следует присоединить третье уравнение системы (8), не изменяющееся при преобразовании (11).

В уравнениях (12) обозначено:

$$\begin{gathered} m_j = A_j + A_3, \qquad m_3 = A_1 - A_2, \\ P_j = H\,B_j + k_3, \quad Q_j = n_2 B_3 C_j + k_j, \\ R_j = n_2 B_3 B_j + m_j \qquad (j = 1, 2), \\ H \equiv G(C_3) = n_1 + n_2 C_3. \end{gathered}$$

Отметим, что уравнения системы (12) по структуре соответствуют уравнениям задачи о движении гиростата с реактивным приводом, известной как задача Р. Граммеля в динамике твердого тела, а уравнения системы (13) структурно идентичны уравнениям задачи об инерционном движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом относительно неподвижного полюса в полуевклидовом пространстве.

Очевидно, что соответствующие уравнения систем (12), (13), рассматриваемые с учетом третьего уравнения системы (8), в силу соотношений связи (11) должны быть эквивалентны по переменным $\omega_j$. Следовательно, эти уравнения совместны при выполнении следующих условий:

$$(A_1 - A_2)B_3 - (B_2 - B_1)A_3 = 0, \tag{14}$$

$$A_3 C_j + B_3 k_j = 0, \tag{15}$$

$$A_{3-j} C_3 + P_j B_{3-j} = 0, \tag{16}$$

$$A_{3-j} C_j - Q_j B_{3-j} = 0, \tag{17}$$

$$A_{3-j}(B_j - B_3) - R_j B_{3-j} = 0, \tag{18}$$

$$H C_j = 0 \quad (j = 1, 2). \tag{19}$$

Система (14)–(19) содержит 11 однородных уравнений (среди которых имеются попарно симметричные уравнения) с шестью неизвестными $B_j$, $C_j$ ($j$ = 1, 2, 3), подлежащими определению в соответствии с имеющимися вариантами. Каждый из этих вариантов относится к определенному режиму движения гиростата в СД-поле, удовлетворяющему гипотезе (11), и базируется на соответствующем частном решении объединенной системы уравнений (8), (9).

Введем условие существования осевой кинетической симметрии гиростата [2]

$$A_1 = A_2 = A > A_3, \tag{20}$$

согласно которому из ограничения (14) следует:

$$m_1 = m_2 = m = A + A_3, \quad m_3 = 0,$$

$$B_1 = B_2 = B, \quad B \neq B_3. \tag{21}$$

В силу условий (20), (21) требование (14) тождественно удовлетворяется и тогда имеем

$$\begin{gathered} P_1 = P_2 = HB + k_3, \\ R_1 = R_2 = n_2 B B_3 + m, \end{gathered} \tag{22}$$

вследствие чего условия (16), (18) определяющей системы сводятся к двум независимым ограничениям, приводимым далее.

Согласно принятым условиям, гиростат, состояние которого характеризуется системой уравнений (8), (9), может совершать движения следующих двух родов (соответственно, двух режимов движения).

### 3. Движение первого рода

Согласно ограничениям (19) для дальнейшего примем

$$H \neq 0, \quad C_1 = C_2 = 0 \tag{23}$$

и уравнения системы (12) становятся однородными по переменным $\omega_j$. Из первого условия (23) следует $C_3 \neq s_p$, что, в силу равенства (11), соответствует требованию

$$\omega_3 \neq B_3^{-1}(s_3 - s_p).$$

К *движениям первого рода* отнесем состояния гиростата, при которых выполняются заданные условия (23).

Из тождества (6), примененного к точке статического равновесия гиростата, в которой $\boldsymbol{\omega} = 0$, и соотношений (7), (11), (23), получаем $C_3 = -1$, откуда непосредственно следует, что $H = n_1 - n_2 \neq 0$.

Согласно условиям (22), (23) из соотношений (15), (17) следует:

$$k_1 = k_2 = 0 \tag{24}$$

и тогда определяющая система уравнений (16), (18), содержащая неизвестные параметры $B$, $B_3$, сводится к равенствам

$$HB^2 + k_3 B - A = 0, \tag{25}$$

$$A(B - B_3) - B(n_2 B B_3 + m) = 0. \tag{26}$$

Согласно равенствам (25), (26) при выполнении условия

$$D_1 = k_3^2 + 4AH \geq 0 \tag{27}$$

для ненулевых параметров $B$, $B_3$ имеем

$$B = (2H)^{-1}(-k_3 \pm \sqrt{D_1}), \tag{28}$$

$$B_3 = \frac{(A - m)B}{A + n_2 B^2}. \tag{29}$$

В силу решения (28), (29) и зависимостей (20), (21), (23) система уравнений (13) при ограничении (27) принимает каноническую (нормализованную) форму:

$$\begin{gathered} \ddot{\omega}_j + \Omega^2 \omega_j = 0 \quad (j = 1, 2), \\ \ddot{\omega}_3 = 0, \end{gathered} \tag{30}$$

где обозначено

$$\Omega = B^{-1}(B - B_3)\omega_3^0.$$

Здесь и всюду далее нулевой верхний индекс относится к значениям величин при $t = 0$.

К уравнениям (30) следует присоединить систему начальных условий, заданных в виде

$$\begin{gathered} \dot{\omega}_1^0 = -\Omega\,\omega_2^0, \quad \dot{\omega}_2^0 = \Omega\,\omega_1^0, \quad \dot{\omega}_3^0 = 0, \\ \omega_j(0) = \omega_j^0 \quad (j = 1, 2, 3). \end{gathered}$$

В пространстве переменных $\omega_j$ система уравнений (30) соответствует симметричной системе трех линейных осцилляторов, находящихся на идеальных стационарных упругих связях и совершающих свободные колебания вдоль прямой линии. Эти осцилляторы связаны между собой так, что нулевой главной частоте соответствует равномерное поступательное движение данной системы, а ненулевым частотам – свободные продольные колебания ее крайних осцилляторов. Структура данной системы осцилляторов идентична структуре известной классической модели линейной трехатомной молекулы (*модель Г. Голдстейна и Дж. У. Лича*).

Система осцилляторов (30) является невырожденной при выполнении условия

$$\Omega \neq 0.$$

Таким образом, в силу системы (30) решение объединенной системы уравнений (8), (9), подчиняющееся гипотезе (10) при условиях (23), (24), представляется в виде:

$$\begin{gathered}[\omega_1(t), \omega_2(t)] = H_1[\cos\sigma(t), \sin\sigma(t)],\\ \omega_3(t) = \omega_3^0, \qquad \sigma(t) = \Omega t + \alpha,\end{gathered} \tag{31}$$

$$[s_1(t), s_2(t)] = B[\omega_1(t), \omega_2(t)], \tag{32}$$

$$s_3(t) = s_3^0 \equiv B_3\omega_3^0 - 1. \tag{33}$$

Постоянные $H_1, \alpha$ в равенствах (31) определяются соотношениями

$$\begin{gathered}H_1 = +\sqrt{(\omega_1^0)^2 + (\omega_2^0)} \neq 0,\\ (\cos\alpha, \sin\alpha) = H_1^{-1}(\omega_1^0, \omega_2^0),\end{gathered}$$

а параметры $B, B_3$ в равенствах (32), (33) – формулами (28), (29).

Соотношения (31) являются параметрическими уравнениями подвижного (относительно ортобазиса $\Gamma$) годографа вектора $\boldsymbol{\omega}$ с параметром $t$, а равенства (32), (33) – уравнениями такого же рода для орта $\mathbf{s}$. Очевидно, что эти годографы являются подобными невырожденными геометрическими фигурами.

Согласно зависимостям (31), несущей поверхностью подвижного годографа вектора $\boldsymbol{\omega}$ в пространстве квазикоординат $\omega_j$ является круговой цилиндр радиуса $H_1$ с уравнением

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = H_1^2, \tag{34}$$

образующие которого параллельны оси $Ox_3$ ортобазиса $\Gamma$. При этом параметры данной задачи взаимосвязаны тождеством

$$-(BH_1)^2 + (s_3^0)^2 = 1,$$

где величина $s_3^0 = -\operatorname{ch}\vartheta^0$ и определяется равенством (33). Здесь $\vartheta$ – аналог (в полуевклидовом пространстве) угла нутации оси кинетической симметрии гиростата.

Таким образом, линейное преобразование вида (11) динамической системы (8), (9), реализованное при условиях (20), (21), (23), (24), (27), соответствующее движению первого рода, выделяет из полного множества возможных движений гиростата в стационарном консервативном СД-поле его движение, идентичное движению в пространстве квазикоординат $\omega_j$ системы трех изотропных стационарных свободных линейных осцилляторов, определяемых соотношениями (31)–(33).

Из соотношений (7), (32), (34) следуют характерные условия:

$$\dot{\lambda}(t) = N_1, \quad \dot{\varphi}(t) = N_2, \quad \vartheta(t) = \vartheta^0, \tag{35}$$

где постоянные величины равны

$$\begin{gathered}N_1 = \pm H_1(\operatorname{sh}\vartheta^0)^{-1}, \quad \vartheta^0 \neq 0,\\ N_2 = -\Omega \neq 0.\end{gathered} \tag{36}$$

Здесь знак параметра $N_1$ определяет направление прецессирования оси кинетической симметрии гиростата; второе условие (36) исключает критическую точку из диапазона изменения параметра ориентации $\vartheta$.

Итак, решение (31)–(33) системы уравнений (8), (9) при условиях (20), (23), (24), определяет *регулярную прецессию* носителя, совершаемую при моментно-силовом воздействии на гиростат стационарного однородного СД-поля.

## 4. Движение второго рода

Рассмотрим режим движения гиростата, при котором решение объединенной системы уравнений (8), (9) вместо ограничений (23) удовлетворяет одному характерному условию $H=0$, согласно которому

$$C_3 = s_p, \tag{37}$$

где $s_p$ – упомянутое ранее критическое значение параметра $s_3$; далее полагаем $(C_1, C_2) \neq 0$. Принятые здесь условия характеризуют для гиростата *движения второго рода*.

Согласно равенству (4), в критической точке потенциал $U(s_3)$ имеет изолированный локальный экстремум, характер которого определяется знаком параметра $n_2$.

Введем условия

$$k_j \neq 0 \quad (j=1,2,3), \tag{38}$$

к которым присоединим ограничения (20), (21). В силу соотношений (20), (21), (37) условия (14)–(18) сводятся к следующим:

$$(n_2 B_3 C_j + k_j)B - AC_j = 0, \tag{39}$$

$$A_3 C_j + B_3 k_j = 0 \quad (j=1,2), \tag{40}$$

$$AC_3 + Bk_3 = 0, \tag{41}$$

$$k_1 C_2 - k_2 C_1 = 0, \tag{42}$$

причем ограничение (42) выражает коллинеарность проекций векторов **k**, **C** на координатную плоскость $Ox_1x_2$ ортобазиса $\Gamma$ при условиях (38) и $(C_1, C_2) \neq 0$.

Из уравнения (41) при $n_2 k_3 \neq 0$, согласно условиям (37), (38), непосредственно следует:

$$B = \frac{An_1}{n_2 k_3}, \tag{43}$$

а в силу соотношений (39), (40), (43) имеем

$$B_3^2 - \mu_1 k_3 B_3 - \mu_2 A_3 = 0, \tag{44}$$

где обозначено $\mu_j = n_j^{-1}$ $(j=1,2)$. Из уравнения (44) находим

$$B_3 = \frac{1}{2}\mu_1 (k_3 \pm \sqrt{D_2}), \tag{45}$$

$$D_2(k_3) = k_3^2 - 4A_3 n_1 s_p \geq 0$$

и из равенства (40) следуют выражения:

$$C_j = -A_3^{-1} B_3 k_j \quad (j=1,2), \tag{46}$$

удовлетворяющие условию (42). При этом величина параметра $k_3$ ограничена условием $D_2 \geq 0$, а различные знаки перед радикалом в равенствах (45), (46) имеют место лишь при $D_2 \neq 0$.

Таким образом, для решения системы уравнений (8), (9), подчиненного гипотезе (11) и условиям (37), (38), имеем

$$\begin{gathered} s_j = B\omega_j + C_j \quad (j=1,2), \\ s_3 = B_3 \omega_3 + s_p. \end{gathered} \tag{47}$$

Выделяя в системе уравнений (13) линейную комбинацию вида

$$L(\omega_1, \omega_2) = C_1\omega_1 + C_2\omega_2,$$

в результате получаем

$$\dot{L}(\omega_1, \omega_2) = (b\omega_3 + c)(C_1\omega_2 - C_2\omega_1), \tag{48}$$

где обозначено

$$b = B^{-1}(B_3 - B), \quad c = B^{-1}s_p.$$

Согласно третьему уравнению системы (13) из равенства (48), в результате интегрирования при условии (20) находим

$$L(\omega_1, \omega_2) = B_3\left(\frac{1}{2}b\omega_3^2 + c\omega_1 + B^{-1}D\right), \tag{49}$$

где $D$ – аддитивно входящая постоянная интегрирования.

Полагая $\omega_3 = u$ и дифференцируя по $t$ третье уравнение системы (13), в силу выражений (46), (49) получаем

$$\ddot{\omega}_3 + P(\omega_3) = 0, \tag{50}$$

где

$$P(\omega_3) = \sum_{k=0}^{3} c_k(\omega_3)^k$$

– полином с коэффициентами

$$\begin{gathered} c_0 = B^{-2}cD, \quad c_1 = c^2 + B^{-2}bD - (A_3^2B)^{-1}B_3k^2, \quad c_2 = \frac{3}{2}bc, \\ c_3 = \frac{1}{2}b^2, \quad k = +\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \end{gathered} \tag{51}$$

и параметром $k$.

К выражениям (51) следует присоединить определяющие равенства (43), (45).

Уравнение (50) является результирующим, определяющим величину $\omega_3$, полученным в результате редуцирования системы уравнений (13). Это уравнение имеет первый интеграл

$$\pm\int\frac{du}{\sqrt{Q(u)}} = t, \tag{52}$$

где полином

$$Q(u) = -\frac{1}{2}c_3u^4 - \frac{2}{3}c_2u^3 - c_1u^2 - 2c_0u + 2H.$$

Здесь $H$ – вторая постоянная интегрирования. Знак в левой части равенства (52) выбирается, исходя из условия $t > 0$.

Интеграл в равенстве (52) является эллиптическим интегралом первого рода, причем величина $Q^2(u)$ – алгебраическая функция жанра 1. Эта функция в фазовом пространстве геометрически интерпретируется как классическая поверхность Римана, представленная в виде односвязного невырожденного тора.

В дальнейшем предполагается, что все корни полинома $Q(u)$ являются простыми. В ином случае интеграл (52) не является эллиптическим и выражается в элементарных (круговых тригонометрических или гиперболических) функциях.

Обращая стандартным методом [6, с. 320] зависимость (52), в результате получаем

$$u(t) = u_p + \frac{1}{4}Q'(u_p)[\wp(t;\, g_2,\, g_3) - \frac{1}{24}Q''(u_p)]^{-1}, \tag{53}$$

где $\wp(t;\, g_2,\, g_3)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса с инвариантами

$$g_2 = \frac{1}{12}c_1^2 - \frac{1}{3}c_0 c_2 - c_3 H,$$

$$g_3 = \frac{1}{6}\Big[c_1\Big(\frac{1}{36}c_1^2 - \frac{1}{6}c_0 c_2 + c_3 H\Big) - \frac{1}{3}c_2^2 H\Big] + \frac{1}{8}c_0^2 c_3,$$

$u_p$ – простой действительный корень полинома $Q(u)$; штрих обозначает производную функцию от указанной переменной.

В силу равенств (7), (47) имеем

$$\operatorname{ch}\vartheta = -(B_3 u + s_p), \tag{54}$$

откуда, согласно решению (53), следует, что в движении гиростата по параметру $\vartheta$ ось его кинетической симметрии совершает периодические перемещения в конфигурационном пространстве. Это движение реализуется в области конфигурационного пространства, находящегося между двумя соосными конусами с общей вершиной в полюсе $O$, расположенными внутри заданного изотропного конуса, вершина которого совмещена с тем же полюсом. При этом, согласно равенствам (45), (54), для величины $k_3$ имеет место следующая оценка сверху:

$$\mu_1[k_3 \pm \sqrt{D_2(k_3)}\,] \le -2(1 + s_p).$$

Представляя равенство (53) в сокращенном виде, как $u = \Phi(t)$, и полагая

$$F(t) = b\,\Phi(t) + c \ne 0, \quad \lambda_j = B^{-1}C_j \quad (j = 1,\, 2), \tag{55}$$

из уравнений (13) при условиях (20), (21), получаем разделенную систему:

$$\dot\omega_1 - F(t)\,\omega_2 = -\lambda_2\,\Phi(t),$$
$$\dot\omega_2 + F(t)\,\omega_1 = \lambda_1\,\Phi(t),$$

представляемую для $t \in T$ при $F \ne 0$ в виде

$$\ddot\omega_j - N\dot\omega_j + F^2\omega_j = L_j(t) \quad (j = 1, 2), \tag{56}$$

где обозначено

$$L_1(t) = b^{-1}[\lambda_1(F - c)F - \lambda_2 cN],$$
$$L_2(t) = b^{-1}[\lambda_1 cN + \lambda_2(c - F)F], \tag{57}$$
$$N(t) = \frac{\dot F(t)}{F(t)}.$$

Здесь функции $F(t), \Phi(t)$ взаимосвяаны равенством (55).

Рассматривая уравнения линейной системы (56) сначала без правых частей, положим $\omega_j(t) = w_j(\tau)$ $(j = 1,\, 2)$, где новая переменная

$$\tau = \int_0^t F(s)\,ds. \tag{58}$$

В результате данная система уравнений приводится к виду [7, с. 430]

$$w_j'' + w_j = 0 \quad (j = 1, 2), \tag{59}$$

где штрих обозначает дифференцирование по переменной $\tau$.

Обращая зависимость вида (58) с эллиптической функцией $F(t)$, получаем

$$t = J(\tau),$$

где $J$ – эллиптический интеграл первого рода. Сохраняя прежние обозначения, из равенств (57) находим зависимости вида $L_j(\tau)$. Тогда преобразованная система, соответствующая системе уравнений (59), имеет вид

$$w_j'' + w_j = L_j(\tau) \quad (j = 1, 2). \tag{60}$$

Решение системы уравнений (60) представляется в форме

$$w_j(\tau) = w_j^0 \cos\tau + (w_j')^0 \sin\tau + \int_0^\tau L_j(s)\sin(\tau - s)\,ds \qquad (j = 1, 2), \tag{61}$$

где нулевые индексы относятся к значениям величин при $\tau = 0$.

Равенства (61) представляют параметрические уравнения ортогональной проекции подвижного годографа вектора $\boldsymbol{\omega}$ на координатную плоскость базиса $\Gamma$, ортогональную оси кинетической симметрии гиростата. Этот годограф является реономной геометрической фигурой, уравнения которой параметризованы приведенным временем $\tau$. Согласно определяющему тождеству (6) и соотношениям (47), в случае собственного кинетического момента гиростата получаем тождественное равенство

$$B^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - B_3^2\omega_3^2 - 2B_3C_3\omega_3 + 2B(C_1\omega_1 + C_2\omega_2) = 0,$$

где $C_3 = s_p$. Здесь использовано очевидное тривиальное тождество

$$-C_1^2 - C_2^2 + C_3^2 = 1,$$

которое представляет собой уравнение эллипсоида, охватывающего область пространства квазикоординат $\omega_j$, содержащую подвижный годограф вектора $\boldsymbol{\omega}$.

Итак, линейное преобразование вида (47) динамической системы (8), (9), реализованное при условиях (20), (21), (37), (38), $D_2 \geq 0$, соответствующее движению второго рода, выделяет из полного множества возможных движений гиростата в стационарном консервативном однородном СД-поле два вида движений: периодическое по параметру $\vartheta$ движение, соответствующее выражению (53), и движение системы двух изотропных линейных осцилляторов (30), (60), находящихся под заданным нестационарным динамическим воздействием (57).

## Заключение

Рассмотренная в статье задача относится к классу задач о движении гиростата под действием стационарного однородного консервативного силового СД-поля, находящегося в заданном полуевклидовом пространстве. Решение поставленной задачи достигается путем введения гипотетической линейной зависимости, связывающей переменные $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{s}$ – угловой скорости носителя гиростата и направляющего орта однородного параллельного светового потока постоянной интенсивности. Этот подход является известным приемом исследования, восходящим к работам Н.Е. Жуковского и В. Вольтерра [4], который применялся в исследованиях С.А. Чаплыгина, П.В. Харламова [3], Е.И. Харламовой [4]. Использование данного подхода в работе [3] позволило создать новую концепцию построения решений уравнений движения по инерции твердого тела, ограниченного многосвязной поверхностью, в покоящейся безграничной идеальной однородной жидкости, и произвести классификацию найденных точных решений.

Данный прием реализован в работе [4], где задача о движении гиростата в центральном гравитационном поле сведена к классической задаче Н.Е. Жуковского об интегрировании уравнений движении твердого тела с полостями, полностью заполненными идеальной однородной жидкостью, разрешенной в квадратурах.

Класс задач, в которых применяется упомянутая гипотетическая линейная зависимость, обусловлен характерными свойствами аффинного преобразования, связывающего линейной зависимостью переменные $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{s}$. Применение этого преобразования позволяет из всего возможного многообразия движений гиростата выделить движения, обладающие свойством композиции гомотетии и перемещения в кинетике. Это свойство явно отражено в соотношениях (32), (47), соответствующих движениям первого и второго рода, соответственно.

Таким образом, линейное $\boldsymbol{\omega}-\mathbf{s}$ преобразование исходной динамической системы для изображающей точки в пространстве квазикоординат $\omega_j$ приводит к движениям двух видов: к линейным колебаниям, совершаемым под воздействием заданной внешней нестационарной динамической нагрузки $L_1(\tau), L_2(\tau)$, и к периодическому движению в одномерном пространстве с квазикоординатой $w_3 = u$. Такая интерпретация соответствует известной осцилляторной модели движения твердого тела в стационарных силовых полях.

**Список источников**

1. *Коган А.Ю., Кирсанова Т.С.* Термомеханические явления в движении относительно центра масс космического аппарата с солнечным стабилизатором // Космические исследования. 1992. Т. 30, вып. 3. С. 312–320.
2. *Макеев Н.Н.* Динамика гиростата в световом поле полуевклидова пространства // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 3(66). С. 35–46. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-35-46 EDN: FQYVKC.
3. *Харламов П.В.* О решениях уравнений динамики твердого тела // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 3. С. 567–572.
4. *Харламова Е.И.* Некоторые решения задачи о движении тела, имеющего закрепленную точку // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 4. С. 733–737.
5. *Макеев Н.Н.* К задаче приведения уравнений динамики твердого тела в гиперболическом пространстве // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4 (63). С. 70–79. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-70-79 EDN: DUFGMT.
6. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа: в 2 ч. М.: Физматгиз. Ч. 2, 1963. 516 с.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961. 704 с.

**References**


1. Kogan, A. Yu. and Kirsanova, T. S. (1992), "Termomekhanicheskie yavleniya v dvizhenii otnositel`no tsentra mass kosmicheskogo apparata s solnechnym stabilizatorom", *Kosmicheskie issledovaniy*, vol. 30, issue 3, pp. 312-320.
2. Makeev, N. N. (2024), "Dvizhenie girostata vokrug tsentra inertsii v poluevklidovom prostranstve", *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika,* issue 2 (65), pp. 42–53. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-42-53. Russia.
3. Kharlamov, P. V. (1965), "O resheniyakh uravneniy dinamiki tverdogo tela", *Prikladnaya matematika i mekhanika,* vol. 29, issue 3, pp. 567-572.
4. Kharlamova, E. I. (1965), "Nekotorye resheniya zadachi o dvizhenii tela, imeyushchego zakreplennuyu tochku", *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 29, issue 4, pp. 733-737.
5. Makeev, N. N. (2023), "K zadache privedeniya uravneniy dinamiki tverdogo tela v giperbolicheskom prostranstve", *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika,* issue 4 (63), pp. 70-79. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-70-79. Russia.
6. Uitteker, E. T. and Vatson, Dzh. N. (1963), "*Kurs sovremennogo analiza*. *V 2 Ch.*" [A course in modern analysis. In 2 parts], Fizmatgiz, Moscow, Ch.2, 516 pp. Russia.
7. Kamke, E. (1961), "*Spravochnik po obyknovennym differentsial`nym uravneniyam*", Fizmatgiz, Moscow, 704 pp. Russia.



**Информация об авторе:**

*Н. Н. Макеев* − доктор физико-математических наук, профессор (410000, Россия, г. Саратов), AuthorID: 374535.

**Information about the author:**

*N. N. Makeev* − Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Saratov, Russia, 410000), AuthorID: 374535.